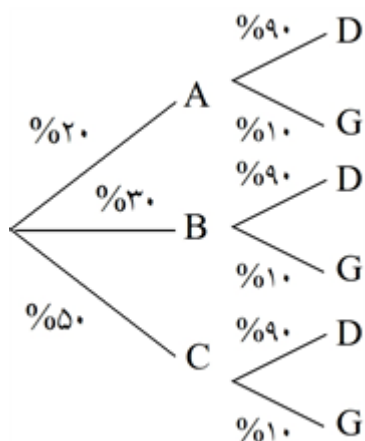


گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱



$$\begin{aligned} P(G) &= P(A \cap G) + P(B \cap G) + P(C \cap G) \\ &= P(A) \times P(G|A) + P(B) \times P(G|B) + P(C) \times P(G|C) \\ &= \frac{20}{100} \times \frac{10}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{10}{100} + \frac{50}{100} \times \frac{10}{100} = 0.04 \end{aligned}$$

$$P(A|G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{0.02}{0.04} = 0.5$$

$$P(B|G) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{0.03}{0.04} = 0.75$$

$$P(C|G) = \frac{P(C \cap G)}{P(G)} = \frac{0.05}{0.04} = 1.25$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۲

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)^+} \frac{2\sqrt{x - \frac{r}{a}}}{\sqrt{x - \frac{r}{a}} \times \sqrt{x + \frac{r}{a}}} + \lim_{x \rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)^+} \frac{3\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{r}{a}}\right)}{\sqrt{x - \frac{r}{a}} \times \sqrt{x + \frac{r}{a}}} \\ &\times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{r}{a}}}{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{r}{a}}} \times \frac{\sqrt{x - \frac{r}{a}}}{\sqrt{x - \frac{r}{a}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{r}{a}}} + \frac{3 \times 0}{\sqrt{\frac{r}{a}} + 2\sqrt{\frac{r}{a}}} = 2\sqrt{\frac{a}{r}} = \sqrt{\frac{4a}{r}} = \sqrt{\frac{2a}{r}} \end{aligned}$$

تذکر: برای ساده‌تر شدن راه حل و رسیدن به گزینه درست می‌توان $a = 3$ را در نظر گرفت.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. b_1 و i_1 را به ترتیب نقاط مرزی و درونی چندضلعی بزرگ در نظر می‌گیریم:

$$b_1 = 14 \Rightarrow S_1 = \frac{b_1}{2} + i_1 - 1 = 6 + i_1$$

همچنین b_2 و i_2 را به ترتیب تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی کوچک در نظر می‌گیریم:

$$b_2 = 6 \Rightarrow S_2 = \frac{b_2}{2} + i_2 - 1 = 2 + i_2$$

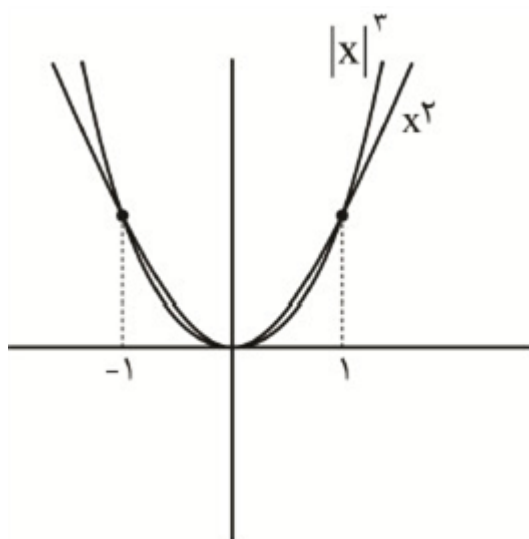
مساحت بین دو چندضلعی به صورت $S_1 - S_2 = 6 + i_1 - i_2 = 6$ بنا بر فرض مسئله $i_1 - i_2$ پس:

$$\text{مساحت بین دو چندضلعی شبکه‌ای} = 6 + 6 = 12$$

۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

برای حل معادله $x^2 = |x|^3$ و نامعادلات $x^2 > |x|^3$ و $x^2 < |x|^3$ ، نمودارهای توابع $y = x^2$ و $y = |x|^3$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



$$\text{gof} = \begin{cases} 1 & x^2 - |x|^3 > 0 \Rightarrow x^2 > |x|^3 \\ 0 & x^2 - |x|^3 = 0 \Rightarrow x^2 = |x|^3 \\ -1 & x^2 - |x|^3 < 0 \Rightarrow x^2 < |x|^3 \end{cases}$$

پس ضابطه gof برابر است با:

$$\text{gof} = \begin{cases} 1 & -1 < x < 0 \text{ یا } 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0, \pm 1 \\ -1 & x < -1 \text{ یا } 1 < x \end{cases}$$

واضح است که تابع در هر سه نقطه مرزی $x = 0$ و $x = \pm 1$ ناپیوسته است.

۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$P(\text{حداقل یکی}) = 1 - P(\text{هیچکدام}) = 1 - P(A' \cap B' \cap C') = 1 - P(A')P(B')P(C') = 0/76$$

$$\Rightarrow 1 - (1 - 0/5)(1 - 0/4)(1 - P(C)) = 0/76 \Rightarrow 0/5 \times 0/4 \times (1 - P(C)) = 0/24$$

$$\Rightarrow 1 - P(C) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} \Rightarrow P(C) = \frac{2}{5}$$

۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در نقاطی که $\frac{x}{2}$ صحیح شود تابع $\left[\frac{x}{2}\right]$ ناپیوسته است.

در این بازه $x = 2$ و $x = 4$ طول نقاط ناپیوستگی $\left[\frac{x}{2}\right]$ هستند. برای آنکه f پیوسته باشد، باید $x = 2$ و $x = 4$ صفرهای تابع

$$g(x) = 2x^2 + ax + 3b$$
 باشند. پس:

$$2x^2 + ax + 3b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 \times 4 = \frac{3b}{2} \\ 2 + 4 = -\frac{a}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{16}{3} \\ a = -12 \end{cases} \Rightarrow b - a = \frac{16}{3} + 12 = \frac{16 + 36}{3} = \frac{52}{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شعاع دایره عبارت است از:

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4 + 16 - 4(-31)} = 6$$

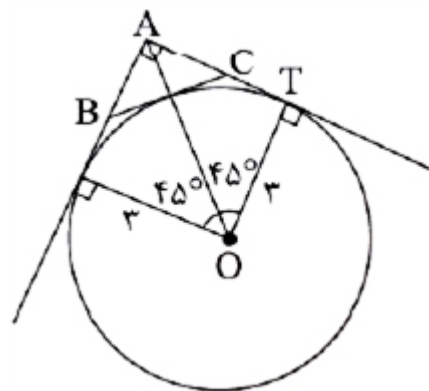
نقطه O مرکز دایره محاطی خارجی مثلث $\triangle ABC$ است. پس OA نیمساز زاویه A است و شعاع OT بر خط شامل AC عمود

$$AT = OT = 6$$

است. بنابراین مثلث قائم الزاویه $\triangle AOT$ متساوی الساقین است. پس:

می دانیم $AT = P$ پس $P = 6$ است. داریم:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= 6 \\ r &= \frac{S}{P-a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6 = \frac{6}{6-a} \Rightarrow 6(6-a) = 6 \Rightarrow 6a = 30 \Rightarrow a = 5$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$P(A|B) + P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{31}{20}$$

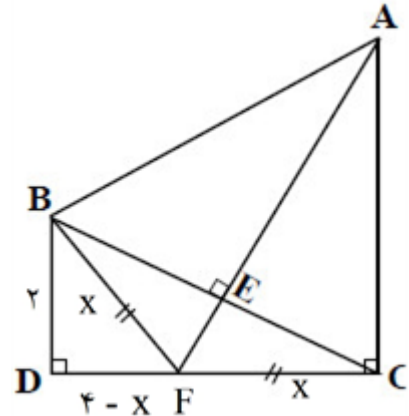
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ حد چپ و راست و مقدار تابع برابرند. پس داریم:

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^+} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{2} - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}x\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^-} \frac{2x^2 - 3x + 1}{a\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^-} \frac{2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x-1)}{a\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)}{a} = \frac{-1}{a}$$

$$\text{مقدار تابع} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = b \Rightarrow \sqrt{2} = -\frac{1}{a} = b \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در نظر می‌گیریم $BF = FC = x$ پس $DF = DC - FC = ۴ - x$ اکنون با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌نویسیم.



$$\triangle BDF : x^2 = (4 - x)^2 + 2^2 \Rightarrow x^2 = 16 + x^2 - 8x + 4 \\ \Rightarrow x = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\triangle BDC : BC^2 = BD^2 + DC^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \\ \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}$$

با توجه به شکل FE عمود منصف BC است پس $BE = EC = \frac{BC}{2} = \sqrt{5}$ بنابراین:

$$\triangle FEC : FE^2 = FC^2 - EC^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - (\sqrt{5})^2 = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4} \Rightarrow FE = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

از طرفی بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم.

$$\triangle AFC : FC^2 = FE \times AF \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \times AF \Rightarrow AF = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{25}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$AE = AF - FE = \frac{5\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$

پس:

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} AE \times BE = \frac{1}{2} (2\sqrt{5})(\sqrt{5}) = 5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون $q \Rightarrow p$ نادرست است، پس قطعاً q درست و p نادرست است.

گزینه ۱: $p \wedge q \equiv F$ و $\sim q \vee p \equiv F$ ، ارزش یکسان دارند.

گزینه ۲: $\sim p \Rightarrow q \equiv T$ و $p \vee q \equiv T$ ، ارزش یکسان دارند.

گزینه ۳: $\sim p \wedge \sim q \equiv F$ و $q \vee \sim p \equiv T$ ، ارزش متفاوت دارند.

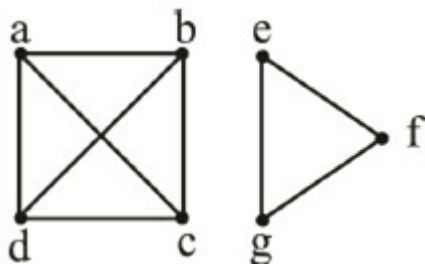
گزینه ۴: $\sim p = T$ و $q \Rightarrow p \equiv T$ ، ارزش یکسان دارند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا ۶۴۸ را به حاصل ضرب اعداد اول تجزیه می‌کنیم:

$$648 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

این گراف ناهمبند است و با رسم یک یال همبند می‌شود؛ پس از دو بخش تشکیل شده است و با توجه به درجات رأس‌ها، تنها گراف ممکن به شکل زیر خواهد بود:

این گراف ۵ دور به طول ۳ دارد که عبارتند از:



$$abca - abda - acda - bcdb - efge$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر از عرض از مبدأ منحنی f و خط g را که بر هم منطبق‌اند، k در نظر بگیریم، ضابطه توابع f و g به صورت زیر است:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-k}{3}(x+1)(x-3) \\ g(x) = \frac{-k}{3}x + k \end{cases}$$

صورت زیر است:

$$\Rightarrow \begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{-k}{3}x + k\right) = \frac{-k}{3}\left(\left(\frac{-k}{3}x + k\right) + 1\right)\left(\left(\frac{-k}{3}x + k\right) - 3\right) \\ g(x^2) = \frac{-k}{3}x^2 + k \end{cases}$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f \circ g)(x)}{x + g(x^2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-k}{3}\left(\left(\frac{-k}{3}x + k\right) + 1\right)\left(\left(\frac{-k}{3}x + k\right) - 3\right)}{x + \left(\frac{-k}{3}x^2 + k\right)}$$

$$\frac{\text{قاعده}}{\text{پر توان}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-k}{3}\left(\frac{-k}{3}x\right)\left(\frac{-k}{3}x\right)}{\frac{-k}{3}x^2} = \frac{k^2}{9}$$

$$\frac{k^2}{9} = \frac{1}{4} \Rightarrow k^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow k = \pm \frac{3}{2} \xrightarrow[k > 0]{\text{با توجه به شکل}} f(\cdot) = k = \frac{3}{2} \quad \text{پس داریم:}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از آنجا که $a, b \in \mathbb{Z}$ هستند، پس عبارت داخل جزء صحیح عددی صحیح است.

بنابراین برای اینکه حد دو طرفه برابر با ۶ باشد، باید داشته باشیم:

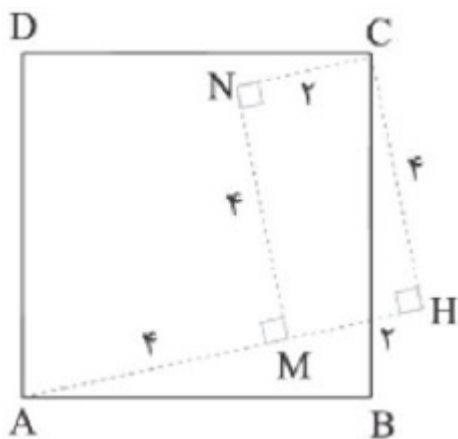
$$-2x^2 + bx + 4 = -2(x-a)^2 + 6 \Rightarrow -2x^2 + bx = -2x^2 + 4ax - 2a^2 + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4a \\ -2a^2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (1, 4) \text{ یا } (-1, -4)$$

بنابراین $a + b = \pm 5$ است.

۱۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر AM را امتداد داده و از C بر آن عمود رسم کنیم چهارضلعی MNCH مستطیل است و داریم:



$$\begin{aligned} MH = 2, CH = 4 &\Rightarrow AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{52} \\ &\Rightarrow AB = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = \sqrt{26} \end{aligned}$$

۱۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در زیرمجموعه‌های داده شده اعداد ۱ و ۳ استفاده شده‌اند. در نتیجه برای X حالات زیر به وجود می‌آید.

$$x = 4 \xrightarrow{x-2 \in A_1} x - 2 = 2 \notin A \text{ غیرممکن}$$

$$x = 5 \xrightarrow{x+3 \in A_2} x + 3 = 8 \notin A \text{ غیرممکن}$$

$$x = 6 \begin{cases} \xrightarrow{x-2 \in A_1} x - 2 = 4 \in A \\ \xrightarrow{x+3 \in A_2} x + 3 = 9 \in A \end{cases} \text{ قابل قبول}$$

$$x = 7 \xrightarrow{x+3 \in A_2} x + 3 = 10 \notin A \text{ غیرممکن}$$

$$x = 9 \xrightarrow{x+3 \in A_2} x + 3 = 12 \notin A \text{ غیرممکن}$$

بنابراین مقدار $x = 6$ خواهد بود. در نتیجه اعداد ۱، ۳، ۴، ۶، ۹ در ۳ زیرمجموعه A_1 ، A_2 و A_3 به کار رفته‌اند. حال به سراغ Y

می‌رویم.

$$y = 5 \xrightarrow{2+y \in A_2} 2 + y = 7 \in A \Rightarrow \text{افراز کامل شد}$$

$$y = 7 \xrightarrow{2+y \in A_2} 2 + y = 9 \in A \xrightarrow{\text{ولی}} x + 3 = 9 \in A_2 \text{ قبلاً تولید شده است. غیرممکن}$$

$$\Rightarrow x = 6, y = 5 \Rightarrow x + y = 11$$

۱۷

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تابع $1 - \cos x$ در یک همسایگی محذوف صفر، مثبت است.

۱۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از هر رأس $n - 3$ قطر می‌گذرد. با توجه به قطرهای مشترک، در مجموع $3(n - 3) - 3$ قطر بین

$$3(n - 3) - 3 = 18 \Rightarrow 3(n - 3) = 21 \Rightarrow n = 10$$

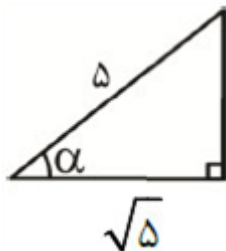
آن‌ها وجود دارد. پس:

با رسم قطرهای گذرنده از یک رأس n ضلعی، سطح آن به $n - 2$ مثلث تقسیم می‌شود. پس جواب $10 - 2 = 8$ می‌باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از فرض سؤال داریم:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{5}}{5} \xrightarrow{\text{حذف } 2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

با رسم یک مثلث قائم الزاویه فرضی داریم:



فیثاغورس: $2\sqrt{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

می‌دانیم که شیب هر خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور x می‌سازد. پس:

$$m_{f^{-1}} = \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{2 \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}{2 \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{-4}{3}$$

می‌دانیم دو تابع خطی که وارون هم هستند، شیب‌های برعکس هم دارند، پس $m_f = \frac{-3}{4}$ نهایتاً داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left| \frac{-3}{4}x + h \right|}{\frac{-4}{3}x + h'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-3}{4}x + h}{\frac{-4}{3}x + h'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-3}{4}x}{\frac{-4}{3}x} = \frac{9}{16}$$

دقت کنید که در محاسبه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{-3}{4}x + h \right|$ ، داخل قدرمطلق مثبت است و خود عبارت از قدرمطلق، بیرون آمده است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از نقطه C عمود CH را بر خط d وارد می‌کنیم تا دوزنقه قائم‌الزاویه $ABCH$ ایجاد شود. از دوران این

دوزنقه حول خط d یک مخروط ناقص به وجود می‌آید و از دوران مثلث قائم‌الزاویه ACH یک مخروط ایجاد می‌شود. پس حجم حاصل برابر تفاضل حجم مخروط ناقص از حجم این مخروط است.

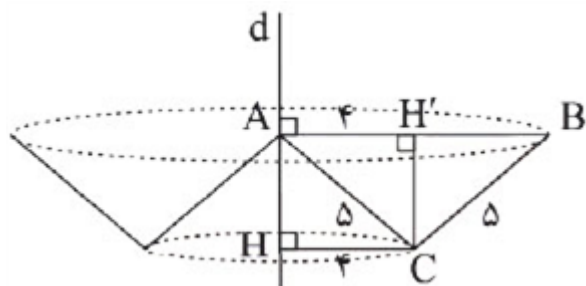
در مثلث متساوی‌الساقین ABC ارتفاع CH' را رسم می‌کنیم.

در این صورت $AH' = 4$ و $CH' = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ است و داریم:

$$\text{حجم مخروط ناقص} = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r'^2 + rr') = \frac{1}{3}\pi(3)(8^2 + 4^2 + (8 \times 4)) = 112\pi$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi hr'^2 = \frac{1}{3}\pi(3)(4)^2 = 16\pi$$

$$\text{حجم خواسته شده} = 112\pi - 16\pi = 96\pi$$



۲۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مرکز دایره C بنا بر فرض روی خط $y = -x$ قرار دارد پس مرکز این دایره به صورت $O(x, -x)$ است. از طرف دیگر مرکز دایره C بر روی خطی قرار دارد که از مرکز دایره C' و نقطه تماس دو دایره عبور می کند، بنابراین داریم:

$$C' : x^2 + y^2 + 4x - 14 = 0 \Rightarrow \text{مرکز} : O'(-2, 0)$$

$$m_{O'A} = \frac{3 - 0}{1 - (-2)} = 1$$

$$O'A \text{ معادله} : y - 3 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x + 2$$

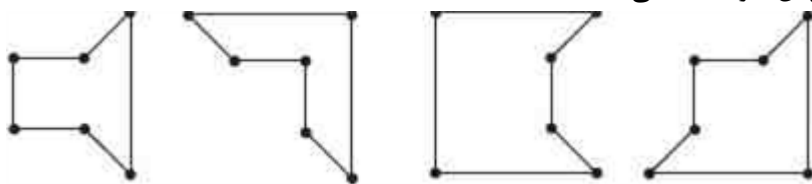
نقطه $O(x, -x)$ روی خط گذرنده از O' و A قرار دارد. پس:

$$-x = x + 2 \Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 1$$

بنابراین نقطه $O(-1, 1)$ مرکز دایره C است و در نتیجه شعاع آن برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(1 + 1)^2 + (3 - 1)^2} = 2\sqrt{2}$$

۲۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در شکل گراف ۴ مدل دور به طول ۶ داریم که از هر مدل ۴ دور وجود دارد. پس جواب ۱۶ می باشد.



$$f(x) = -4x^2 + 4bx + 2a$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 0 \Rightarrow f(x) = -4(x - 2)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-4(x - 2)^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} -4(x - 2) = 0$$

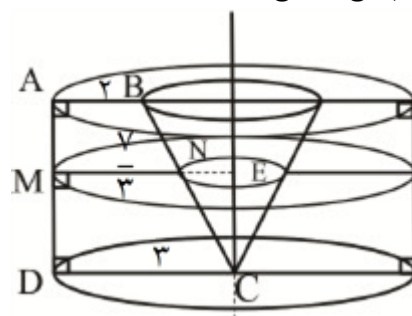
زیرا:

پس $2a = -16$ یعنی $a = -8$ و $4b = 16$ یعنی $b = 4$.

$$f(x) = -4x^2 + 16x - 16 = -4(x - 2)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x + 4x^2 - 16x + 16} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 12x + 16} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x}{4x} = -\frac{3}{1}$$

۲۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$MN = \frac{AM \times DC + DM \times AB}{AM + DM} \Rightarrow MN = \frac{1(3) + 2(3)}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$NE = ME - MN = 3 - \frac{9}{3} = 0$$

$$S = \pi(3)^2 - \pi\left(\frac{9}{3}\right)^2 = 9\pi - \frac{9\pi}{1} = \frac{0\pi}{1}$$

۲۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مجموعه همسایگی بسته هر رأس در یک گراف، شامل آن رأس و تمام رأس‌های مجاور آن است. اگر $N_G[x] = N_G[y]$ باشد، آنگاه یال xy حتماً به گراف G تعلق دارد و چون این فرض برای هر دو رأس دلخواه گراف G برقرار است، پس G یک گراف کامل است. با توجه به اینکه در گراف کامل K_p ، رابطه $\Delta = \delta = p - 1$ برقرار است، پس داریم:

$$\Delta + \delta = 10 \Rightarrow (p - 1) = 10 \Rightarrow p - 1 = 5 \Rightarrow p = 6$$

$$q = \frac{p(p-1)}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$p + q = 6 + 15 = 21$$

۲۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا حد تابع $f(x)$ را در $+\infty$ محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x^2 - 5x + 6) + 13x - 11}{x^2 - 5x + 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{13x - 11}{x^2 - 5x + 6} = 2 + 0^+ = 2^+$$

کافی است برای محاسبه مقدار حد تابع $y = \text{fof}(x)$ در $+\infty$ ، حد راست تابع $f(x)$ را در $x = 2$ محاسبه کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{fof}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 + 3x + 1}{(x-2)(x-3)} = \frac{15}{0^+ \times -1} = \frac{15}{0^-} = -\infty$$

۲۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. پیشامدهای A و B را به گونه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} A : \text{پیشامد قبول شدن نوید} \\ B : \text{پیشامد تقلب کردن نوید} \end{cases}$$

حال اطلاعات مسئله را بر حسب پیشامدهای A و B بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} P(A|B) = 0/7 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{10}{7} P(A \cap B) = P(B) \quad (1) \\ P(B|A) = 0/6 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{5}{3} P(A \cap B) = P(A) \quad (2) \\ P(A' \cap B') = 0/2 \Rightarrow P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = \frac{2}{10} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{8}{10} \quad (3) \end{cases}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow{(1), (2), (3)} \text{ حال داریم:}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{5}{3} P(A \cap B) + \frac{10}{7} P(A \cap B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{44}{21} P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{4 \times 21}{5 \times 44} = \frac{21}{55} \xrightarrow{(1)} P(B) = \frac{21}{55} \times \frac{10}{7} = \frac{6}{11}$$

$$a = \text{عرض از مبدا} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow m = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{a}{2}x + a$$

$$\Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + a \Rightarrow \frac{a}{2}x = -y + a \Rightarrow x = -\frac{2}{a}y + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{2}{a}x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{a}x + 2}{\left| 2\left(-\frac{a}{2}x + a\right) - a\left(-\frac{2}{a}x + 2\right) \right|} = 2$$

$$\text{مخرج} = \left| -ax + \cancel{2a} + 2x - \cancel{2a} \right| = |2x - ax| = |x| \times |2 - a| = -x|2 - a|$$

$$\text{ضریب بالاترین درجه صورت} = -\frac{2}{a}$$

$$\text{ضریب بالاترین درجه در مخرج} = -|2 - a|$$

$$\begin{aligned} \text{جواب حد} &= \frac{-\frac{2}{a}}{-2|2 - a|} = 2 \Rightarrow |2 - a| = \frac{1}{a} \Rightarrow a|2 - a| = 1 \\ &\begin{cases} a \geq 2 \rightarrow a(-2 + a) = 1 : a^2 - 2a - 1 = 0 \\ \Delta = 8 \\ a = 1 \pm \sqrt{2} \\ a \geq 2 \Rightarrow a = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \\ &\begin{cases} a \leq 2 \rightarrow a(2 - a) = 1 \\ -a^2 + 2a - 1 = 0 \\ a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

غ ق ق چون گفته مقدار غیر صحیح a

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: گرافی که دنباله‌ی درجات رئوس آن تشکیل تصاعد حسابی دهند، گراف منتظم است. در گراف منتظم درجه‌ی همه‌ی رئوس یکسان است.

نکته: گراف فرد - منتظم از مرتبه‌ی فرد وجود ندارد.

درجه‌ی رئوس گراف منتظم از مرتبه‌ی ۱۷ برابر با یکی از اعداد $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ است. از طرفی چون درجه‌ی رئوس باید مضرب ۳ باشد، مقادیر $\{6, 12\}$ قابل قبول است.

به‌ازای $r = 12$ ، حداکثر اندازه‌ی گراف برابر است با:

$$rp = 2q \Rightarrow q = \frac{rp}{2}$$

$$q = \frac{12 \times 17}{2} = 102$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ تنها در صورتی نادرست است که گزاره $p \wedge q$ درست و گزاره r نادرست باشد. همچنین از درستی گزاره $p \wedge q$ ، درستی گزاره‌های p و q نتیجه می‌شود. بنابراین گزاره $(\sim q \Rightarrow r) \Rightarrow \sim p$ به انتفای مقدم درست است. از بین گزاره‌های داده شده، تنها گزاره $p \wedge \sim r$ دارای ارزش درست است.

$$(X' \cup Y')' = X \cap Y$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۳۱)

$$2^{n(X \cap Y)} = 8 \Rightarrow n(X \cap Y) = 3$$

$$n((X' \cup Y')') = n(X \cap Y') = n(X - Y) = n(X - X \cap Y) = n(X) - n(X \cap Y) \\ = 8 - 3 = 5$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = 2^5 = 32$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۳۲)

برای یافتن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ روش زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 4x - 1} - 2\sqrt{x^2 + 6x}}{-x + 1 + x + 3} \times \frac{\sqrt{4x^2 - 4x - 1} + 2\sqrt{x^2 + 6x}}{\sqrt{4x^2 - 4x - 1} + 2\sqrt{x^2 + 6x}} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x - 1 - 4x^2 - 24x}{4(|2x| + 2|x|)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-28x}{-16x} = \frac{28}{16} = \frac{7}{4}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۳۳)

فرض می‌کنیم مرکز دایره، نقطه‌ی $O(\alpha, \beta)$ باشد، داریم:

$$OB = OA = OH = R$$

بنابراین:

$$OH = OB \Rightarrow \frac{|4\alpha + 3\beta|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = |\alpha|$$

$$\Rightarrow |4\alpha + 3\beta| = 5\alpha \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha + 3\beta = 5\alpha \Rightarrow \alpha = 3\beta \\ -4\alpha - 3\beta = 5\alpha \Rightarrow \beta = -3\alpha \end{cases}$$

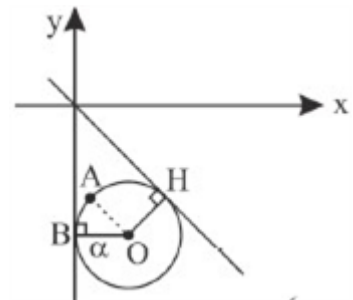
$$\begin{matrix} \alpha > 0 \\ \beta < 0 \end{matrix} \Rightarrow \beta = -3\alpha$$

با توجه به روابط $\beta = -3\alpha$ و $OB = OA$ داریم:

$$\alpha = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\beta + 4)^2} \xrightarrow{\beta = -3\alpha} \alpha = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (-3\alpha + 4)^2}$$

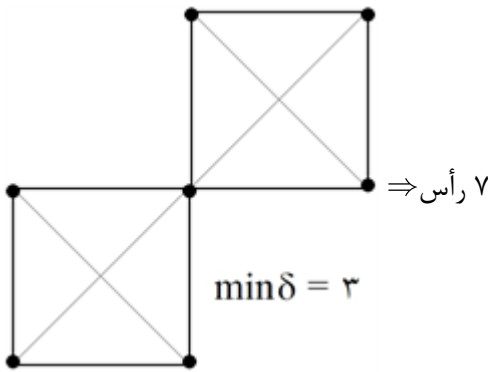
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha^2 = 1 \cdot \alpha^2 - 26\alpha + 17 \Rightarrow 9\alpha^2 - 26\alpha + 17 = 0 \Rightarrow (9\alpha - 17)(\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = \frac{17}{9} \end{cases}$$

بزرگ‌ترین شعاع دایره برابر $\frac{17}{9}$ است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گراف مورد بحث در اینجا:

$$P = 7$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۲	۱	۱	۱	۲
↓	↓	↓	↓	↓	↓
احتمال: $k + 2k + k + k + k + 2k = 1$					

$$8k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$$

$$P(\text{عدد انتخابی بین ۹۷ تا ۹۹}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای تعیین مجانب قائم ابتدا ضابطه تابع را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

$$y = \frac{2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} + 2 \cos^2 \frac{x}{4}}{2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} - 2 \cos^2 \frac{x}{4}} = \frac{2 \cos \frac{x}{4} \left(\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right)}{2 \cos \frac{x}{4} \left(\sin \frac{x}{4} - \cos \frac{x}{4} \right)} = \frac{\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4}}{\sin \frac{x}{4} - \cos \frac{x}{4}}$$

$$= \frac{\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4}}{\sqrt{2} \sin \left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4} \right)}$$

مجانب قائم تابع از ریشه مخرج کسر به دست می‌آید.

$$\sqrt{2} \sin \left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow \sin \left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{4} - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow x = 4k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

تنها مجانب قائم تابع در بازه $(0, 2\pi)$ خط $x = \frac{\pi}{4}$ است. برای تشخیص وضعیت نمودار داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2} \sin(\cdot^+)} = \frac{\sqrt{2}}{\cdot^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2} \sin(\cdot^-)} = \frac{\sqrt{2}}{\cdot^-} = -\infty \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

بنابراین نمودار $f(x)$ در همسایگی $x = \frac{\pi}{4}$ به صورت مقابل است:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع $f(x)$ در $x = -2$ ناپیوسته است و برای آن که حد داشته باشد $x = -2$ باید ریشه صورت کسر نیز باشد و از طرفی $x = -2$ ریشه معادله اول هم هست و داریم:

$$2\sqrt{2-x-ax^2}-2b=0 \Rightarrow 4-4a-2b=0 \Rightarrow 2a+b=2 \quad (1)$$

$$-8-8a+2b=0 \Rightarrow 4a-b=-4 \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=2 \\ 4a-b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)-x^2}{bx+a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2-2ax^2+2b}{x+2}-x^2}{bx+a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-2a-2)x^2}{bx^2} = \frac{-2a-2}{b} = \frac{-\frac{4}{3}-2}{\frac{8}{3}} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. یال‌های ۱۰ گانه قابل رسم با این مجموعه رئوس را بررسی می‌کنیم.

(۱) گراف شامل یال ac و ad بوده اما فاقد یال‌های bc و bd است. از طرفی فاقد یال ab است.

(۲) ممکن است هر دو رأس a و b مجاور با رأس e باشند و یا هیچ‌کدام با رأس e مجاور نباشند. همچنین ممکن است فقط رأس b با رأس e مجاور باشد، پس ۳ حالت متفاوت در مورد ارتباط رئوس a و b با رأس e وجود دارد.

(۳) یال‌های cd , ce و ed هر کدام می‌توانند در گراف باشند یا نباشند.

بنابراین: تعداد گراف‌های مطلوب $= 3 \times 2^3 = 24$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مرکز دایره را به صورت $O(\alpha, 2\alpha-1)$ در نظر می‌گیریم فاصله $|OA|$ و $|OH|$ که فاصله مرکز تا خط مماس است با هم برابر است.

$$\sqrt{(\alpha-2)^2+(2\alpha-2)^2} = \frac{|3\alpha+8\alpha-4-10|}{\Delta} = \frac{|11\alpha-14|}{\Delta} \Rightarrow (5\alpha^2-12\alpha+8)$$

$$= \frac{121\alpha^2-308\alpha+196}{25} \Rightarrow 4\alpha^2+8\alpha+4=0 \Rightarrow \alpha^2+2\alpha+1=0$$

$$\Rightarrow (\alpha+1)^2=0 \Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow O(-1, -3)$$

$$R = \frac{|-11-14|}{\Delta} = 5$$

$$(x+1)^2+(y+3)^2=25 \Rightarrow \left(\frac{x+1}{5}\right)^2+\left(\frac{y+3}{5}\right)^2=1$$

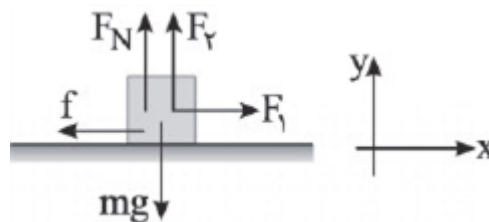
$$\begin{cases} \frac{x+1}{5} = \sin \theta \\ \frac{y+3}{5} = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \sin \theta - 1 \\ y = 5 \cos \theta - 3 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \frac{x+1}{5} = \cos \theta \Rightarrow x = 5 \cos \theta - 1 \\ \frac{y+3}{5} = \sin \theta \Rightarrow y = 5 \sin \theta - 3 \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$\begin{aligned}
 C &= [(A \cup B) - B] \cup [A \cup (A \cap B)]' = [(A \cup B) \cap B'] \cup A' \\
 &\quad \text{قانون جذب} \\
 &= [(A \cap B') \cup (B \cap B')] \cup A' = (A \cap B') \cup A' = (A \cup A') \cap (B' \cup A') = A' \cup B' \\
 &\quad \quad \quad \emptyset \quad \quad \quad U \\
 D &= (A - B) \cup B' = (A \cap B') \cup B' = B' \\
 &\quad \text{قانون جذب} \\
 C - D &= (A' \cup B') - B' = (A' \cup B') \cap B = (A' \cap B) \cup (B' \cap B) = B \cap A' = B - A \\
 &\quad \quad \quad \emptyset
 \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned}
 F_{(\text{net})_y} &= 0 \Rightarrow F_N + F_y = mg \\
 F_N &= mg - F_y = 20 - 5 = 15 \text{ N} \\
 f_{s_{\max}} &= \mu_s F_N = 0.8 \times 15 = 12 \text{ N}
 \end{aligned}$$



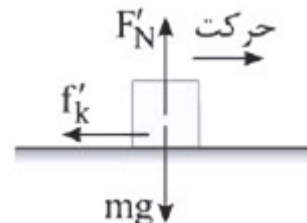
چون $F_1 > f_{s_{\max}}$ است، جسم به حرکت درمی‌آید.

در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 4 \text{ s}$ داریم:

$$\begin{aligned}
 F - f_k &= ma_1, f_k = \mu_k F_N = 0.6 \times 15 = 9 \text{ N} \Rightarrow 15 - 9 = 2a \Rightarrow 6 = 2a_1 \Rightarrow a_1 = 3 \frac{m}{s^2} \\
 v_f &= a_1 t + v_i \Rightarrow v_f = 3 \times 4 = 12 \frac{m}{s}
 \end{aligned}$$

سرعت جسم در لحظه $t = 4 \text{ s}$:

پس از قطع نیروها تا توقف داریم:



$$\begin{aligned}
 F'_N &= mg \\
 f'_k &= \mu_k mg \\
 -f'_k &= ma_2 \Rightarrow -\mu_k mg = ma_2 \\
 \Rightarrow a_2 &= -\mu_k g \Rightarrow a_2 = -0.6 \times 10 = -6 \frac{m}{s^2} \\
 \Delta x_1 &= \left(\frac{v_f + v_i}{2} \right) \times t = \frac{12}{2} \times 4 = 24 \text{ m} \\
 v_f^2 - v_i^2 &= 2a_2(\Delta x_2) \Rightarrow 0 - (12)^2 = 2 \times (-6) \times \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 12 \text{ m} \\
 \Delta x &= \Delta x_1 + \Delta x_2 = 24 + 12 = 36 \text{ m}
 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی توپ، تندی توپ را هنگام برخورد به زمین و سپس هنگام

جدا شدن از سطح زمین به دست می‌آوریم:

تندی گلوله در لحظه برخورد به زمین:

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{د}}^2 = mgh$$

$$\Rightarrow v_1^2 - v_{\text{د}}^2 = 2gh \Rightarrow v_1^2 = v_{\text{د}}^2 + 2gh$$

$$v_1 = \sqrt{v_{\text{د}}^2 + 2gh} = \sqrt{900 + 2 \times 10 \times 80}$$

$$= \sqrt{2500} = 50 \frac{m}{s}$$

تندی گلوله هنگام جدا شدن از زمین:

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -mgh \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 - 2gh$$

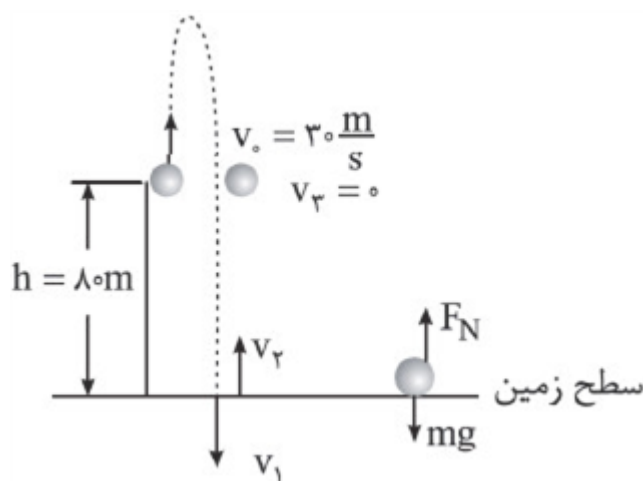
$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2gh} = \sqrt{2500 - 2 \times 10 \times 80} = \sqrt{900} = 30 \frac{m}{s}$$

اگر جهت مثبت محور مکان را رو به فرض کنیم، سرعت توپ هنگام برخورد به زمین و هنگام جدا شدن از سطح زمین برابر است

$$\text{با: } v_1 = -50 \frac{m}{s}, v_2 = +30 \frac{m}{s}$$

$$\bar{F}_{\text{net}_{av}} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \bar{F}_{\text{net}_{av}} = \frac{0.2 \times (30 - (-50))}{0.2} = 90 N$$

$$\bar{F}_{\text{net}} = mg + \bar{F}_N \Rightarrow 90 = -2 + \bar{F}_N \Rightarrow \bar{F}_N = 92 N$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\left(\frac{r_B}{r_A}\right)^3} \Rightarrow \frac{8}{27} = \sqrt{\left(\frac{r_B}{r_A}\right)^3} \Rightarrow \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{r_B}{r_A} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{g_A}{g_B} = \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{g_A}{g_B} = 3 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم مساحت سطح محصور بین نمودار $F - t$ و محور t برابر تغییر تکانه (Δp) است. بنابراین، ابتدا تکانه جسم را در لحظه $t = ۵s$ را پیدا می‌کنیم و سپس با استفاده از مساحت سطح محصور شکل مقابل تکانه اولیه (p_0) را به دست می‌آوریم:

$$p_{۵s} = mv_{۵s} \xrightarrow{m=۲۰ \cdot g=۰/۲ \text{ kg} \atop v_{۵s}=۱۰ \cdot \frac{m}{s}}$$

$$p_{۵s} = ۰/۲ \times ۱۰ = ۲ \text{ kg} \frac{m}{s}$$

$$\Delta p_{۵s} = S_1 + S_2 = (۱۰ \times ۲) + (-۸ + ۳) = -۴ \text{ kg} \frac{m}{s}$$

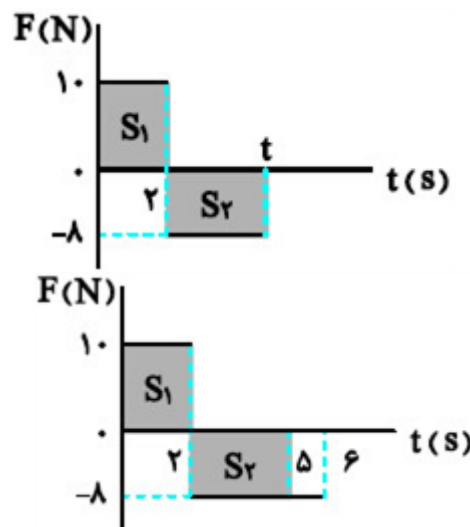
$$\Delta p = p_{۵s} - p_0 \Rightarrow -۴ = ۲ - p_0 = p_0 = ۶ \text{ kg} \frac{m}{s}$$

اکنون باید لحظه‌ای را بیابیم که تکانه جسم برابر $p = ۶ \text{ kg} \frac{m}{s}$ می‌شود. به همین منظور، مجدداً از مساحت سطح محصور شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta p = p_t - p_0 \xrightarrow{\Delta p = S_1 + S_2 \atop p_t = p_0 = ۶ \text{ kg} \frac{m}{s}}$$

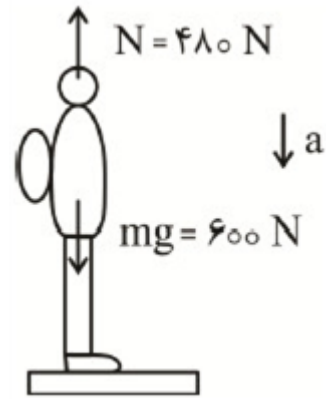
$$S_1 + S_2 = ۶ - ۶ \Rightarrow (۱۰ \times ۲) + (-۸ \times (t - ۲)) = ۰$$

$$۲۰ = ۸(t - ۲) \Rightarrow ۲/۵ = t - ۲ \Rightarrow t = ۴/۵s$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا شتاب آسانسور را حساب می‌کنیم: ۴۵

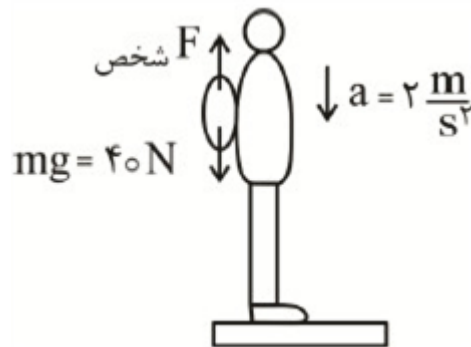
$$a = \frac{F_{\text{net}}}{m} = \frac{600 - 480}{56 + 4} = \frac{120}{60} = 2 \frac{m}{s^2} \downarrow$$



سپس نیروهای وارد بر کوله را حساب می‌کنیم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow 40 - F_{\text{شخص}} = 4 \times 2 \Rightarrow F_{\text{شخص}} = 32 N$$

حال جابه‌جایی شخص (و کوله) را حساب می‌کنیم:



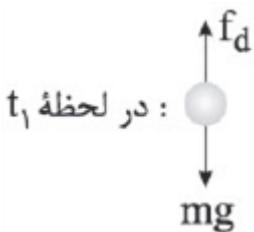
$$d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times (2)(5)^2 = 25 m$$

در آخر کاری که شخص روی کوله انجام می‌دهد را حساب می‌کنیم. دقت کنید که نیرو خلاف جهت جابه‌جایی است.

$$W = F \cdot d \cdot \cos \theta = 32 \times 25 \times (-1) = -800 J$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل رسم شده در تندی حدی نیروی مقاومت هوا برابر $0.5 N$ است. می‌دانیم در تندی حدی $f_d = mg$ است. ۴۶

$$f_d = mg \Rightarrow 5 \times 10^{-3} = m \times 10 \Rightarrow m = 5 \times 10^{-4} \text{ kg}$$



$$mg - f_d = ma \Rightarrow 5 \times 10^{-4} \times 10 - 2 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-4} a \Rightarrow 3 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-4} \Rightarrow a = 6 \frac{m}{s^2}$$

(۱) نادرست. در لحظه تغییر جهت تندی حرکت صفر می شود و چون جهت حرکت عوض شده است، پس قطعاً جسم در این لحظه شتاب داشته و به آن نیرو واحد می شود.

(۲) نادرست. به طور مثال در پرتاب یک گلوله به بالا در نقطه اوج جسم به طور لحظه ای سرعتش صفر می شود ولی در این لحظه به جسم نیروی وزن وارد می شود، پس نیروهای وارد بر جسم متوازن نیستند.

(۳) نادرست. جسم لزوماً در جهت برآیند نیروها حرکت نمی کند، بلکه شتاب می گیرد، مثلاً در حرکت کندشونده بر روی خط راست، جهت نیرو در خلاف جهت سرعت (جهت حرکت) است.

(۴) درست. وقتی سرعت جسم ثابت است، یعنی اندازه و جهت سرعت هر دو ثابت هستند، پس شتاب حرکت صفر خواهد بود و نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند.

$$f_{s_{\max}} = 0/6 \times 500 = 300 N \quad f_k = 0/4 \times 500 = 200 N$$

$$t = 3s \Rightarrow F_{t=3s} = 300 N \Rightarrow \text{جسم در آستانه حرکت}$$

$$t = 4s \Rightarrow 400 - 200 = 50a \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2} \Rightarrow d = \frac{16 - 0}{2(4)} = 2m \Rightarrow \text{بیشترین جابه جایی}$$

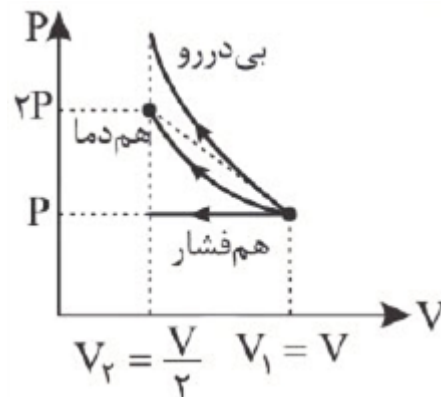
$$T = \frac{PV}{nR}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل فشار نهایی گاز در فرایند بی دررو بیشتر از $2P$ است.

الف) درست - بنابراین با نصف شدن حجم و افزایش فشار که از $2P$ بیشتر است، دمای مطلق نهایی گاز در فرایند بی دررو بیشتر از $2T_1$ خواهد شد.

ب) درست - بر طبق رابطه معادله حالت گاز آرمانی $T = \frac{PV}{nR}$ در فرایند هم فشار با نصف شدن حجم دمای مطلق گاز نصف خواهد شد.

ج) نادرست - در فرایند تراکم بی دررو دمای مطلق افزایش و در فرایند تراکم هم فشار دمای مطلق گاز کاهش می یابد و انرژی درونی گاز آرمانی متناسب با دمای مطلق گاز است. پس انرژی درونی در فرایند بی دررو افزایش و در فرایند هم فشار کاهش می یابد.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گام اول: با معلوم بودن فشار پیمانه ای، فشار مطلق گاز را حساب می کنیم.

$$P_g = P - P_v \Rightarrow 0/1 = P_1 - 1 \Rightarrow P_1 = 1/1 \text{ atm}$$

گام دوم: در حالت دوم از قانون عمومی گازها استفاده می کنیم تا فشار گاز را حساب کنیم:

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta T \Rightarrow 180 = \frac{9}{5} \Delta T \Rightarrow \Delta T = 100 K$$

فشار پیمانه ای:

$$\frac{P_v V_2}{T_2} = \frac{P_v V_1}{T_1} \Rightarrow \frac{P_v \times 24}{400} = \frac{1/1 \times 18}{300} \Rightarrow P_v = 1/1 \text{ atm} \Rightarrow P_g = 0/1 \text{ atm}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم مساحت سطح بین نمودار $v - t$ و محور t برابر جابه‌جایی جسم است.

از طرف دیگر، چون در بازه زمانی $t = ۰$ تا t' متحرک تغییر جهت نداده است، جابه‌جایی و مسافت طی شده برابر است. بنابراین، ابتدا t' را می‌یابیم:

$$\Delta x = L = S = \frac{t' \times ۶}{۲} \xrightarrow{L=۱۸m} ۱۸ = \frac{۶t'}{۲} \Rightarrow t' = ۶s$$

اکنون شتاب حرکت را برای بازه زمانی $۰s < t < ۶s$ و $t > ۶s$ می‌یابیم.

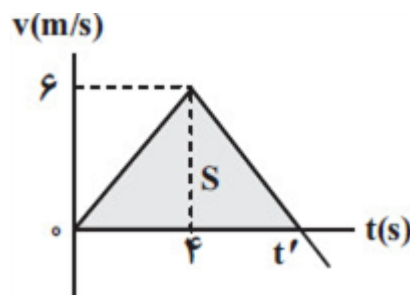
$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta v=۶-۰=۶ \frac{m}{s}, \Delta t=۶-۰=۶s} a_1 = \frac{۶}{۶} = ۱/۵ \frac{m}{s^2}$$

$$a_2 = \frac{\Delta v'}{\Delta t'} \xrightarrow{\Delta v'=۰-۶ \frac{m}{s}, \Delta t'=۶-۶=۶s} a_2 = \frac{-۶}{۶} = -۱/۵ \frac{m}{s^2}$$

در این مرحله با استفاده از قانون دوم نیوتون، نسبت $\frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}_1|}$ را پیدا می‌کنیم. دقت کنید، در مرحله‌ای که شتاب a_2 است، علاوه بر

نیروی $\vec{F}_1$ ، نیروی $\vec{F}_2$ نیز به جسم وارد می‌شود. با توجه به اینکه با افزودن نیروی $\vec{F}_2$ تندی جسم کاهش می‌یابد، نیروی $\vec{F}_2$ در خلاف جهت حرکت بر جسم وارد شده است.

$$\frac{|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|}{|\vec{F}_1|} = \frac{|\vec{F}_2| - |\vec{F}_1|}{|\vec{F}_1|} = \frac{۳}{۱/۵} = ۲ \Rightarrow |\vec{F}_2| = ۳|\vec{F}_1|$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در لحظه ورود گازها به درون استوانه، حجم آن‌ها برابر است. بنابراین:

$$PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{P} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{n_1 RT_1}{P_1} \\ V_2 = \frac{n_2 RT_2}{P_2} \end{cases} \xrightarrow{V_1=V_2} \frac{n_1 T_1}{P_1} = \frac{n_2 T_2}{P_2}$$

$$\xrightarrow{T_1=\theta_1+۲۷۳=۴۷+۲۷۳=۳۲۰K, P_1=۴atm, n_1 \times ۳۲۰ = \frac{n_2 \times ۳۵۰}{۷} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{۵}{۸}}$$

$$\xrightarrow{T_2=\theta_2+۲۷۳=۷۷+۲۷۳=۳۵۰K, P_2=۷atm} \frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} = \frac{n_1 RT_1}{n_2 RT_2} \xrightarrow{P_1=P_2} \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{۵}{۸}$$

پس از رسیدن به تعادل داریم:

از طرفی حجم استوانه برابر است با:

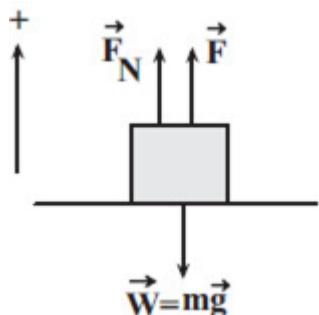
$$V_{\text{استوانه}} = V_1 + V_2 \Rightarrow (۰/۵ + ۰/۵) \times A = \frac{۵}{۸} V_2 + V_2 \Rightarrow \frac{۱۳}{۸} V_2 = A \xrightarrow{V_2=Ah_2}$$

$$\frac{۱۳}{۸} \times Ah_2 = A \Rightarrow \frac{۱۳}{۸} h_2 = ۱ \Rightarrow h_2 = \frac{۸}{۱۳} m \Rightarrow h_2 = ۶۱/۵ \text{ cm}$$

$$۶۱/۵ - ۵۰ = ۱۱/۵ \text{ cm}$$

بنابراین جابه‌جایی پیستون برابر است با:

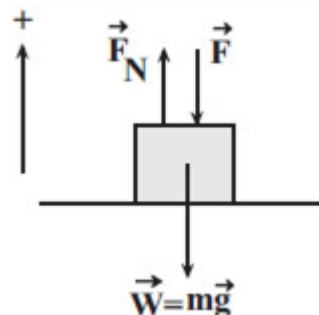
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و سپس با توجه به تعادل جسم، برابری نیروها را در دو حالت مساوی صفر قرار می‌دهیم.



$$F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow F_N + F - mg = 0 \quad m = 10 \text{ kg}$$

$$F_N + F - 10 \times 10 = 0 \Rightarrow F_N = 100 - F \quad (1)$$

چون در حالت دوم $\vec{F}$ برعکس و نیروی عمودی سطح ۲۰ درصد افزایش می‌یابد، داریم:



$$F'_{\text{net}} = 0 \Rightarrow F'_N - F - mg = 0 \Rightarrow F'_N = 100 + F$$

$$\frac{F'_N = F_N + 0.2 F_N = 1.2 F_N}{1.2 F_N = 100 + F} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} 1.2 \times (100 - F) = 100 + F \Rightarrow 120 - 1.2 F = 100 + F$$

$$\Rightarrow 20 = 2.2 F \Rightarrow F = \frac{20}{2.2} = \frac{100}{11} \text{ N}$$

$$F' = 100 + F = 100 + \frac{100}{11} = \frac{1200}{11} \text{ N}$$

نیروی سطح در حالت دوم برابر است با:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بیشینه شتاب وارد بر جسم مربوط به زمانی است که فنر حداکثر فشردگی را دارد. با انتخاب جهت مثبت حرکت به سمت چپ، داریم:

$$-k\Delta x - f_k = ma \quad \xrightarrow{f_k = \mu_k f_N = \mu_k mg} -k\Delta x - \mu_k mg = ma$$

$$\xrightarrow{a = -5 \frac{m}{s^2}, g = 10 \frac{N}{kg}} -200\Delta x - 0.2 \times 2 \times 10 = 2 \times (-5)$$

$$k = 200 \frac{N}{m}, m = 2 \text{ kg}, \mu_k = 0.2$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{6}{200} m = 3 \text{ cm} \Rightarrow l = l_0 - \Delta x = 12 - 3 = 9 \text{ cm}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مساحت سطح محصور بین نمودار و محور زمان در نمودار $F - t$ برابر با تغییرات تکانه‌ی توپ (Δp) است، بنابراین:

$$\Delta p = \frac{6 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-3}}{2} = 6 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

توپ با سرعت v به دیوار برخورد می‌کند و با سرعت $\vec{v}_1 = v$ به دیوار برخورد می‌کند و با سرعت $\vec{v}_2 = -v$ باز می‌گردد، بنابراین:

$$\Delta \vec{v} = -\vec{v} - \vec{v} = -2\vec{v} \Rightarrow \Delta v = 2v$$

$$\Delta p = m\Delta v \Rightarrow 6 = 0.8 \times \Delta v \Rightarrow \Delta v = \frac{6}{0.8} = 7.5 \frac{m}{s}$$

با استفاده از رابطه‌ی تکانه داریم:

$$\Delta v = 2v \Rightarrow 7.5 = 2v \Rightarrow v = \frac{7.5}{2} = 3.75 \frac{m}{s}$$

بنابراین:

الف) اگر نوسانگر به طرف مرکز نوسان در حرکت باشد، حرکتش تندشونده و اگر به طرف نقطه N حرکت کند، حرکتش کندشونده است.

ب) در دو نقطه بازگشت، اندازه شتاب نوسانگر بیشینه است.

د) مسافتی که نوسانگر در نصف دوره می‌پیماید، برابر طول MN است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون دمای ابتدا (T_i) و دمای انتها (T_f) برای هر سه مسیر یکسان است، بنابراین تغییر انرژی درونی

گاز در هر سه مسیر با هم برابر می‌شود، یعنی $\Delta U_a = \Delta U_b = \Delta U_c$ است. از طرف دیگر چون $P_f V_f > P_i V_i$ و

$T \propto PV$ است، باید $T_f > T_i$ باشد. بنابراین $\Delta T > 0$ می‌شود، در نتیجه چون $\Delta U \propto \Delta T$ است، باید

$\Delta U_a = \Delta U_b = \Delta U_c > 0$ باشد. یعنی گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست‌اند.

چون مساحت سطح زیر نمودار مسیر c بزرگ‌تر از مساحت سطح زیر نمودار b است، $|W_c| > |W_b|$ می‌شود. بنابراین با توجه به

این که $\Delta U_c = \Delta U_b$ می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$\Delta U_c = \Delta U_b \xrightarrow[W < 0]{\Delta U = Q + W} Q_c - |W_c| = Q_b - |W_b| \Rightarrow Q_c - Q_b = |W_c| - |W_b|$$

$$Q_c - Q_b > 0 \Rightarrow Q_c > Q_b$$

به همین طریق می‌توان نشان داد $Q_b > Q_a$ است. بنابراین $Q_c > Q_b > Q_a > 0$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = 2 \text{ cm}$$

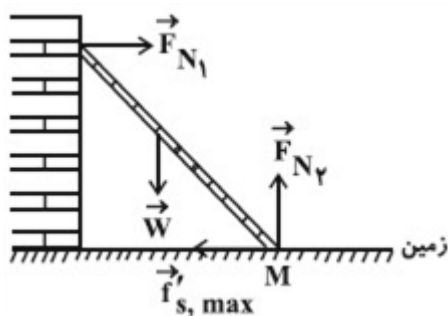
$$x = A \cos \left(\frac{2\pi}{T} t \right)$$

$$t = \frac{T}{4} \Rightarrow x = A \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad (\text{مرکز نوسان})$$

$$t = \frac{3T}{4} \Rightarrow x = A \cos \frac{3\pi}{2} = -(2) \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$l = |\Delta x| = \left| -\sqrt{2} - 0 \right| = \sqrt{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در ابتدا بدون در نظر گرفتن جعبه، نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم:



$$F_{N_2} = W \xrightarrow{W=mg} F_{N_2} = 24 \times 10 = 240 \text{ N}$$

دقت کنید که اصطکاک ناشی از جعبه نیز در مسئله تأثیرگذار است:

$$f_{s,\max}'' \leftarrow \boxed{} \quad , f_{s,\max} = f_{s,\max}' + f_{s,\max}'' (*)$$

اکنون داریم:

$$F_{N_1} = f_{s,\max} \xrightarrow{(*)} F_{N_1} = 96 + f_{s,\max}$$

$$\xrightarrow{f_{s,\max} = (\text{جرم جعبه}) \times g \times \mu_s} F_{N_1} = 96 + 4m'$$

$m' = \text{جرم جعبه}$

و در نهایت از داده سؤال ($F_{N_1} = 240 \text{ N}$) می‌توان نوشت:

$$240 = 96 + 4m' \Rightarrow 144 = 4m' \Rightarrow m' = 36 \text{ kg}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای مقایسه دوره تناوب آونگ در دو حالت می‌توان نوشت:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1} \times \frac{g_1}{g_2}} \xrightarrow{L_1=L_2} \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \quad (1)$$

می‌دانیم شتاب گرانشی در فاصله h از سطح زمین از رابطه $g = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2}$ به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{\frac{GM_e}{(R_e + h_1)^2}}{\frac{GM_e}{(R_e + h_2)^2}} = \left(\frac{R_e + h_2}{R_e + h_1} \right)^2 \xrightarrow{(1)} \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\left(\frac{R_e + h_2}{R_e + h_1} \right)^2} = \frac{R_e + h_2}{R_e + h_1}$$

$$\xrightarrow{h_1=0, h_2=2R_e} \frac{T_2}{T_1} = \frac{3R_e}{R_e} = 3$$

دوره تناوب آونگ ۳ برابر شده، یعنی زمان را ۳ برابر کندتر اندازه می‌گیرد و در مدت ۲۴ ساعت فقط گذشت ۸ ساعت را نشان می‌دهد و ۱۶ ساعت عقب می‌افتد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا تغییرات انرژی درونی گاز را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta U = U_B - U_A = 720 - 350 = 370 \text{ J}$$

چون نمودار $P - V$ است، مساحت محصور زیر نمودار برابر کار است:

$$S_{\text{دورنجه}} = \frac{(6 + 5) \times 10^5 \times (6 - 4) \times 10^{-3}}{2} = 1100 \text{ J}$$

$$\Rightarrow W = -1100 \text{ J}$$

طبق قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow 370 = Q - 1100 \Rightarrow Q = 1470 \text{ J}$$

چون $Q > 0$ است، یعنی گرما گرفته است.

$$T_1 = 300 \text{ K}, P_1 = 1 \text{ atm}, \rho_2 = 0.8 \rho_1 = \frac{4}{5} \rho_1 \Rightarrow V_2 = \frac{5}{4} V_1$$

$$P_2 = 1/2 \text{ atm}$$

$$\frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \Rightarrow \frac{1/2 \times \frac{5}{4} V_1}{T_2} = \frac{1 \times V_1}{300}$$

$$\frac{1/5}{T_2} = \frac{1}{300} \Rightarrow T_2 = 450 \text{ K}$$

$$\Delta T = 450 - 300 = 150 \text{ K} \Rightarrow \Delta \theta = 150^\circ \text{ C}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا شتاب جدید ماهواره را می‌یابیم:

$$a_2 = a_1 - \frac{19}{1000} a_1 \Rightarrow a_2 = \frac{81}{1000} a_1$$

از طرف دیگر، طبق قانون دوم نیوتون در مکان جدید، نیروی وارد بر ماهواره بر حسب نیروی وارد بر آن در مکان اول برابر است با:

$$F = ma \xrightarrow{\text{ثابت } m} \frac{F_2}{F_1} = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{81}{1000} a_1}{a_1} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{81}{1000}$$

در آخر، با توجه به قانون گرانش عمومی داریم:

$$F = \frac{GmM_e}{r^2} \xrightarrow{\text{ثابت } M_e} \frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \xrightarrow{r_1 = R_e + R_e = 2R_e, r_2 = R_e + h} \frac{81}{1000} = \left(\frac{2R_e}{R_e + h} \right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \frac{9}{10} = \frac{2R_e}{R_e + h} \Rightarrow 9R_e + 9h = 20R_e \Rightarrow 9h = 11R_e \Rightarrow h = \frac{11}{9} R_e$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به کمک رابطه معادله حالت گازهای کامل، داریم:

$$PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nR}{V} T$$

این یعنی شیب نمودارهای $P - T$ نشان داده شده برابر با $\frac{nR}{V}$ است:

$$\frac{\text{شیب } b}{\text{شیب } a} = \frac{\frac{n_b R}{V_b}}{\frac{n_a R}{V_a}} = \frac{n_b}{n_a} \times \frac{V_a}{V_b} \Rightarrow \frac{3}{2} = 2 \frac{V_a}{V_b} \Rightarrow V_b = 3/2 L$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۵

$$PV = nRT$$

$$2 \times 10^5 \times 40 \times 10^{-2} = n \times 8 \times 400 \Rightarrow n = 2/5 \Rightarrow \text{مجموع تعداد مول‌های هیدروژن و هلیوم}$$

$$\text{در واقع} \begin{cases} n = \frac{m_{H_2}}{M_{H_2}} + \frac{m_{He}}{M_{He}} = 2/5 \\ m_{H_2} + m_{He} = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m_{H_2}}{2} + \frac{m_{He}}{4} = 2/5 \\ m_{H_2} + m_{He} = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{H_2} = 2g \\ m_{He} = 6g \end{cases}$$

$$\text{بنابراین: } \frac{m_{H_2}}{m_{He}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در شروع حرکت، نیروی اصطکاک به بیشینه مقدار خود می‌رسد. در این حالت $F_e = f_{s,\max}$ است و

$$F = f_{s,\max} = kx = \mu_s F_N \quad \text{داریم:}$$

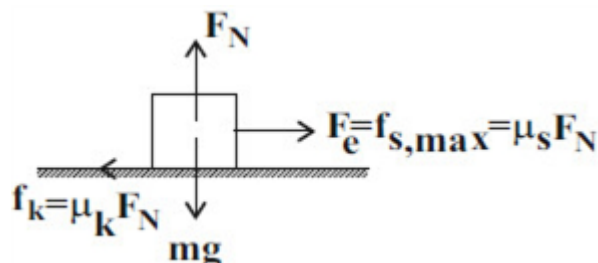
با استفاده از قانون دوم نیوتون و تعادل جسم در راستای قائم داریم:

$$F_N = mg = 0 \Rightarrow F_N = mg$$

$$200 \times x = 0/4 \times 4 \times 10 \Rightarrow x = 8 \text{ cm} = 0/08 \text{ m}$$

پس طول فنر در حالتی که جسم شروع به حرکت می‌کند برابر $L = 8 + 20 = 28 \text{ cm}$ می‌باشد.

سپس با استفاده از قانون دوم نیوتون در راستای افقی داریم:



$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F_e - f_k = ma \xrightarrow{F_e = f_{s,\max}} \\ \mu_s F_N - \mu_k F_N = ma$$

$$\mu_s mg - \mu_k mg = ma \Rightarrow a = (\mu_s - \mu_k)g \Rightarrow a = (0/4 - 0/1) \times 10 = 3 \frac{m}{s^2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. قانون دوم نیوتون را نوشته و شتاب هر دو گلوله را به دست می‌آوریم:

$$F_{\text{net}} = ma \xrightarrow{F_{\text{net}} = W - f_D} W - f_D = ma \Rightarrow ma = W - f_D \xrightarrow{W = mg} \\ a = g - \frac{f_D}{m}$$

$$\begin{cases} m_1 = 5 \text{ kg} \rightarrow a_1 = 10 - \frac{10}{5} = 8 \frac{m}{s^2} \\ m_2 = 10 \text{ kg} \rightarrow a_2 = 10 - \frac{10}{10} = 9 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

شتاب حرکت هر دو متحرک ثابت و مکان و سرعت اولیه آن‌ها یکسان است. بنابراین فاصله دو گلوله زمانی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که گلوله با شتاب بیشتر به زمین برسد:

$$a_2 > a_1 \Rightarrow \Delta y_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 \xrightarrow{\Delta y = 18 \text{ m}} 18 = \frac{1}{2} (9) t^2 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

$$t = 2 \text{ s} \Rightarrow \Delta y_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 \xrightarrow{t = 2 \text{ s}} \Delta y_1 = \frac{1}{2} (8) (2) (2) = 16 \text{ m}$$

$$\text{بیشترین فاصله دو گلوله} = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 18 \text{ m} - 16 \text{ m} = 2 \text{ m}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. جسم تحت تأثیر نیروهای $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ در حال تعادل قرار دارد، بنابراین می‌توان

$$\vec{F}_{\text{net}} = m \vec{a} \xrightarrow{a=0} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \quad \text{نوشت:}$$

با دو برابر شدن نیروی $\vec{F}_1$ داریم:

$$\vec{F}_{\text{net}} = 2\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \xrightarrow{\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -\vec{F}_1, \vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}, \vec{a} = \vec{a}_1} \vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_1 = 4m \vec{i}$$

با سه برابر شدن نیروی $\vec{F}_3$ داریم:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + 3\vec{F}_3 \xrightarrow{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3, \vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}, \vec{a} = -\vec{a}_3} \vec{F}_{\text{net}} = 2\vec{F}_3 = -8m \vec{j} \Rightarrow \vec{F}_3 = -4m \vec{j}$$

با توجه به اینکه $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ است، می‌توان نوشت:

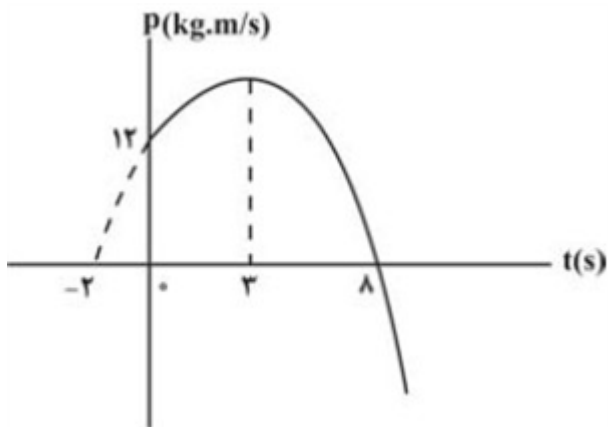
$$\vec{F}_2 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_3) \xrightarrow{\vec{F}_1 = 4m \vec{i}, \vec{F}_3 = -4m \vec{j}} \vec{F}_2 = -4m \vec{i} + 4m \vec{j}$$

با دو برابر شدن $\vec{F}_2$ داریم:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_1 + 2\vec{F}_2 + \vec{F}_3 \xrightarrow{\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = -\vec{F}_2, \vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}} \vec{F}_2 = m\vec{a} \xrightarrow{\vec{F}_2 = -4m \vec{i} + 4m \vec{j}}$$

$$\vec{a} = -4 \vec{i} + 4 \vec{j} \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معادلهٔ تکانه برحسب زمان جسم را به دست می‌آوریم:



$$p = a'(t - 8)(t + 2) \xrightarrow{p_0 = 12 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}}$$

$$a' = \frac{12}{-16} = \frac{-3}{4} \Rightarrow p = \frac{-3}{4}(t^2 - 6t - 16)$$

$$\Rightarrow F_a = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-3}{4} \frac{(t_2^2 - 6t_2 - 16) - (t_1^2 - 6t_1 - 16)}{t_2 - t_1}$$

$$\Rightarrow F_{\text{av}} = \frac{-3}{4} \frac{(t_2^2 - t_1^2 - 6(t_2 - t_1))}{t_2 - t_1} \Rightarrow F_{\text{av}} = \frac{-3}{4}(t_2 + t_1 - 6)$$

$$\Rightarrow F_{\text{av}} = \frac{-3}{4}(t_1 + t_2 - 6) \xrightarrow[t_2 = 6/8s]{t_1 = 2/4s} F_{\text{av}} = \frac{-3}{4}(9/2 - 6) = -2/4 N$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نیروی F بر شخص و جعبه به اندازه یکسان 20 N ، وارد می‌شود: ۷۰

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow a = \frac{F_{\text{net}}}{m}$$

$$a_{\text{شخص}} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} \frac{m}{s^2}$$

$$a_{\text{جعبه}} = \frac{20}{40} = 0.5 \frac{m}{s^2}$$

چون اصطکاک نداریم، شخص و جعبه به سمت هم حرکت می‌کنند.

$$\frac{mv^2}{r} = |q| \cancel{v} B \Rightarrow r = \frac{mv}{|q|B} \rightarrow \text{یکسان}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۱

$$\frac{r_\alpha}{r_\beta} = \frac{m_\alpha}{m_\beta} \times \frac{\cancel{|q|_\beta}^e}{\cancel{|q|_\alpha}^e} = \frac{m_\alpha}{2m_\beta} > 1 \Rightarrow r_\alpha > r_\beta$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طول نهایی فنر را L در نظر می‌گیریم: ۷۲

$$F_e = k\Delta L = k(L - L_0) \xrightarrow[k_0 = 400 \frac{N}{m}, L_0 = 1m]{} F_e = 400(L - 1)$$

شعاع دوران برابر طول نهایی فنر است.

$$F_e = \frac{mv^2}{R} \xrightarrow[v = 2 \frac{m}{s}, m = 1/5 \text{ kg}, R = L]{} F_e = \frac{96}{L}$$

نیروی مرکزگرا همان نیروی فنر است. بنابراین:

$$F_c = F_e \Rightarrow \frac{96}{L} = 400(L - 1) \Rightarrow L^2 - L - \frac{96}{400} = 0 \Rightarrow \begin{cases} L = 1/2 \\ L = -0.2 \end{cases}$$

طول نهایی فنر برابر $1/2 m$ است که برابر با شعاع دوران می‌باشد. برای محاسبه دوره تناوب داریم:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \xrightarrow[\pi \simeq 3, v = 2 \frac{m}{s}, R = L = 1/2 m]{} T = \frac{(2)(3)(1/2)}{2} = 0.4 s$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به معادله‌ی حالت گاز کامل داریم: ۷۳

$$PV = nRT \Rightarrow n = \frac{PV}{RT}$$

باید نسبت $\frac{n_2}{n_1}$ را به دست آوریم و سپس تغییرات را بر حسب درصد بیابیم، بنابراین:

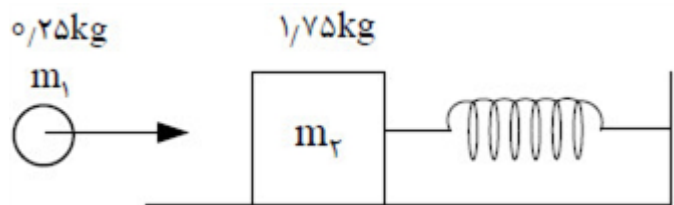
$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{P_2}{P_1} \times \frac{V_2}{V_1} \times \frac{T_1}{T_2} \xrightarrow[T_1 = 27 + 273 = 300 K, T_2 = 227 + 273 = 500 K, \text{حجم مخزن: } V_1 = V_2 = \text{ثابت}]{} \frac{n_2}{n_1} = \frac{80}{120} \times 1 \times \frac{300}{500}$$

$$\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

پس درصد تغییرت n برابر است با:

$$\frac{\Delta n}{n_1} \times 100 = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \times 100 = \frac{\frac{4}{10} n_1 - n_1}{n_1} \times 100 = \% - 60$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷۴



$$V_1 = 24 \frac{m}{s} \quad V_2 = 0$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} \times 0.25 \times 24^2 = 72 \text{ J}$$

$$u_{Ps} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \times 40 \times 0.5^2 = 5 \text{ J}$$

$$K_1 = u + w \Rightarrow W = K_1 - u = 72 - 5 = 67 \text{ J}$$

$$W = f_{\mu} x \Rightarrow f_{\mu} = \frac{67}{0.5} = 134 \text{ N}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷۵

با توجه به رابطه محاسبه انرژی مکانیکی می توان نوشت:

$$E = U + K \Rightarrow E = 0.9 + 0.16 = 0.25 \text{ J}$$

از طرفی:

$$E = \frac{1}{2} K A^2 \Rightarrow 0.25 = \frac{1}{2} \times 200 \times A^2$$

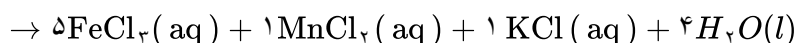
$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{200} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{200}} m = 5 \text{ cm}$$

نوسانگر در مدت زمان $\frac{T}{4}$ ، مسافتی برابر طول پاره خط نوسان را می پیماید در این صورت داریم:

$$I = 2A = 10 \text{ cm}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه ها: ۷۶

(۱) درست است. مجموع ضرایب مواد پس از موازنه برابر ۲۵ خواهد بود.



(۲) نادرست است. زیرا Fe^{2+} کاهنده و MnO_4^- اکسنده است.

(۳) نادرست است. زیرا با انجام واکنش شمار یون های محلول کاهش و رسانایی محلول کم می شود.

(۴) نادرست است. زیرا افزودن NaOH به فرآورده ها باعث ایجاد رسوب $\text{Fe}(\text{OH})_3$ می شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. یون‌های روی، نسبت به یون‌های آلومینیم، تمایل بیشتری برای جذب e^- دارند. پس در واکنش با اتم‌های آلومینیم از آن‌ها e^- می‌گیرند و کاهش پیدا می‌کنند در صورتی که یون‌های سدیم نسبت به یون‌های آلومینیم تمایل کمتری برای جذب e^- دارند و در مجاورت اتم‌های آلومینیم وارد واکنش نمی‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:



گزینه ۱: ترتیب قدرت اکسندگی (تمایل برای گرفتن e^-) برای یون‌ها:

گزینه ۲: چون میل اتم‌های آلومینیم برای از دست دادن الکترون از اتم‌های روی بیشتر است فلز روی با محلول آلومینیم سولفات واکنش نمی‌دهند.

گزینه ۳: قدرت اکسندگی یون منگنز II از قدرت اکسندگی یون سدیم نیز بیشتر خواهد بود $\leftarrow$ یک قطعه فلز منگنز با محلول سدیم کلرید واکنش نمی‌دهد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به اطلاعات سؤال قدرت کاهندگی سه فلز به صورت $X > A > B$ است.

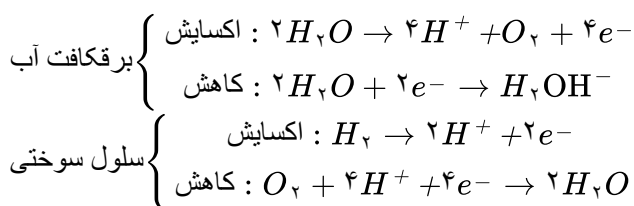
عبارت الف درست است. E° فلز A از E° فلز B کوچک‌تر است.

عبارت ب نادرست است. زیرا درباره منفی یا مثبت بودن E° این فلزها نمی‌توان به یقین نظر داد.

عبارت پ نادرست است. زیرا ترتیب اکسندگی کاتیون‌ها به صورت $X^{2+} > A^{3+} > B^{2+}$ است.

عبارت ت درست است. E° فلز B به اندازه 0.37 ولت بزرگ‌تر از A است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

(۱) درست است. باتری‌ها به هنگام مصرف، سلول‌های گالوانی محسوب شده، که در آن یک واکنش خودبه‌خودی انجام می‌شود.

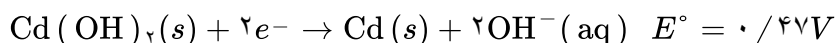
آند / کاتد	قطب	نیم‌واکنش
آند	-	$Cd(OH)_2(s) + 2e^- \rightarrow Cd(s) + 2OH^-(aq) \quad E^\circ = 0.47V$
کاتد	+	$NiO_2(s) + 2H_2O + 2e^- \rightarrow Ni(OH)_2(s) + 2OH^-(aq) \quad E^\circ = 1.68V$

$$emf = E_c - E_a \Rightarrow emf = 1.68 - 0.47 = 1.21V$$

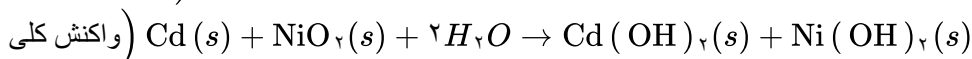
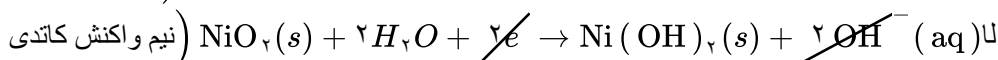
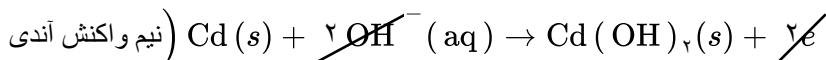
(۲) نادرست است. نیکل II هیدروکسید در قطب مثبت و کادمیم هیدروکسید در قطب منفی تشکیل می‌شود.

(۳) نادرست است. زیرا با توجه به نیم واکنش $(Cd^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Cd(s) \quad E^\circ = 0.47V)$ که دارای پتانسیل کاهشی

کوچک‌تری نسبت به نیم‌واکنش زیر دارد:



(۴) نادرست است. زیرا واکنش کلی از جمع دو نیم‌واکنش آندی و کاتدی حاصل می‌شود:

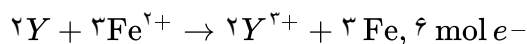


در این واکنش اکسایش - کاهش، فلز کادمیم، کاهنده و $NiO_2(s)$ اکسنده است و به ترتیب دارای ضرایب ۱ و ۱ هستند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نیم‌واکنش اکسایش فلز Al به صورت: $\text{Al} \rightarrow \text{Al}^{3+} + 3e^-$ است و مول الکترون مبادله شده به ازای مصرف ۵/۴ گرم از آن برابر است با:

$$? \text{ mol } e^- = 5/4 \text{ g Al} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{27 \text{ g Al}} \times \frac{3 \text{ mol } e^-}{1 \text{ mol Al}} = 0/6 \text{ mol } e^-$$

با توجه به E° داده شده در سلول گالوانی $Y - \text{Fe}$ ، نیم‌سلول Y نقش آند و نیم‌سلول Fe نقش کاتد داشته و معادله واکنش انجام شده در آن به صورت زیر است:



شمار مول‌های Fe^{2+} مصرفی برابر است با:

$$? \text{ mol } \text{Fe}^{2+} = 0/6 \text{ mol } e^- \times \frac{3 \text{ mol } \text{Fe}^{2+}}{6 \text{ mol } e^-} = 0/3 \text{ mol } \text{Fe}^{2+}$$

در شرایط استاندارد غلظت محلول‌های الکترولیت برابر یک مولار بوده و با توجه به اینکه حجم هر محلول برابر یک لیتر است، مول اولیه Fe^{2+} برابر یک است.

$$\text{Fe}^{2+} \text{ مول} \text{ کاهش} = \frac{\text{مول } \text{Fe}^{2+} \text{ مصرف شده}}{\text{مول } \text{Fe}^{2+} \text{ اولیه}} \times 100 = \frac{0/3}{1} \times 100 = 30\%$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای تولید قوطی‌های آلومینیمی از قوطی‌های کهنه فقط به ۷ درصد از انرژی لازم برای تهیه همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد، پس ۹۳ درصد انرژی کمتری نیاز است. بررسی سایر گزینه‌ها:
۱ و ۲) A نشان‌دهنده آند گرافیتی است که اکسایش یافته و گاز CO_2 حاصل از اکسایش در اطراف آن آزاد می‌شود.
۴) چگالی Al مذاب تولیدی از الکترولیت مصرفی (Al_2O_3 مذاب) بیشتر است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از عبارات I و II و III نتیجه می‌گیریم که ترتیب E° نیم‌واکنش‌ها به صورت زیر است:

$$E^\circ(B^{3+}/B) > E^\circ(D^{2+}/D) > E^\circ(A^{2+}/A) > E^\circ(C^{2+}/C)$$

با توجه به مطلب فوق:

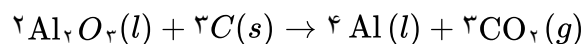
آ) نادرست

ب) نادرست - ترتیب قدرت کاهندگی به صورت $C > A > D > B$ است.

پ) نادرست - با توجه به ترتیب E° نیم‌واکنش‌ها، ولتاژ سلول گالوانی حاصل از الکترودهای A و D کمتر از ولتاژ سلول گالوانی حاصل از الکترودهای C و D است.

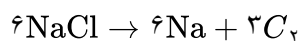
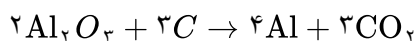
ت) نادرست - غلظت یون $C^{2+}(\text{aq})$ در آند افزایش و غلظت یون $D^{2+}(\text{aq})$ در کاتد کاهش می‌یابد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$4 \times 10^3 \text{ g C} \times \frac{30}{100} \times \frac{1 \text{ mol C}}{12 \text{ g C}} \times \frac{3 \text{ mol CO}_2}{3 \text{ mol C}} \times \frac{24 \text{ L CO}_2}{1 \text{ mol CO}_2} \times \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ L}} = 2/4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{\cancel{3 \times 23}}{\cancel{14/4}} = \frac{\cancel{3} \times 22/4}{x} \Rightarrow x = \frac{22/4}{5} = 4/48$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی همه گزینه‌ها:

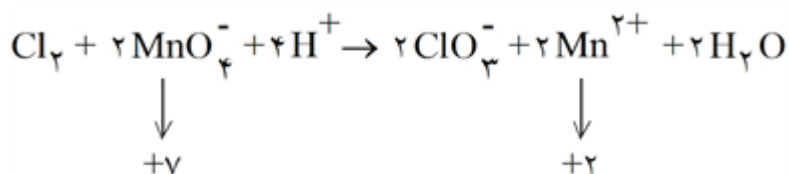
گزینه ۱: هر چه تغییر دمای محلول بیشتر باشد، قدرت کاهندگی فلز بیشتر است و همچنین با توجه به عدم واکنش طلا با Cu^{2+} فلز Cu کاهنده‌تر از فلز Au است. پس داریم:



گزینه ۲: با توجه به گرماده بودن واکنش، محتوای انرژی فراورده‌ها کمتر از واکنش‌دهنده‌ها خواهد بود و در نتیجه پایداری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها بیشتر است.

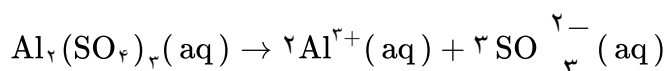
گزینه ۳: چون واکنش‌پذیری مس از آهن کمتر است.

گزینه ۴: تمایل روی به از دست دادن الکترون بیشتر از مس است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{0.4}{4} \text{ mol MnO}_4^- \times \frac{5 \text{ mol } e^-}{1 \text{ mol MnO}_4^-} = 0.5 \text{ mol } e^-$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر غلظت $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ را برابر M فرض کرده، غلظت یون‌های Al^{3+} و SO_4^{2-} به ترتیب برابر $2M$ و $3M$ می‌شود، از این رو

$$3M - 2M = M = 0.2 \text{ mol. L}^{-1}$$

داریم:

بنابراین غلظت یون Al^{3+} در محلول برابر 0.4 mol. L^{-1} بوده است.

$$\begin{aligned} \text{محلول آبی } ?L &= 50 \text{ mL} \times \frac{0.4 \text{ mol Al}^{3+}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{27g \text{ Al}^{3+}}{1 \text{ mol Al}^{3+}} \times \frac{10^6 g \text{ آبی}}{108g \text{ Al}^{3+}} \\ &\times \frac{1 \text{ mL آبی}}{1/25g \text{ آبی}} \times \frac{1 L}{1000 \text{ mL}} = 4 L \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی همه موارد:

مورد اول: نادرست - نقطه جوش AsH_3 به دلیل جرم مولی بیشتر، از PH_3 بیشتر است.

مورد دوم: درست - نقطه جوش N_2O به دلیل جرم مولی بیشتر و قطبی بودن از CH_4 بیشتر است، در نتیجه هنگام کاهش دما، آسان‌تر به مایع تبدیل می‌شود.

مورد سوم: نادرست - قدرت نیروی بین‌مولکولی در Br_2 از N_2 بیشتر است. زیرا هر دو ناقطبی بوده و Br_2 جرم مولی بیشتری دارد.

مورد چهارم: درست - CH_3Cl برخلاف SO_2 قطبی است.

مورد پنجم: درست - اتمی که به سمت قطب منفی میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند باید بار جزئی مثبت داشته باشد. در CO اتم دارای بار جزئی مثبت اتم C است ولی در HF، اتم دارای بار جزئی مثبت اتم H است.

$$\text{حجم محلول نهایی} = 150g \times \frac{1 \text{ mL}}{1g} + 60g \times \frac{1 \text{ mL}}{1/2g} = 200 \text{ mL}$$

$$\text{SO}_4^{2-} \text{ مجموع مول} = 0/2L \times \frac{0/018 \text{ mol SO}_4^{2-}}{1L} = 0/0036 \text{ mol SO}_4^{2-}$$

$$? \text{ mol SO}_4^{2-} = 150g \times \frac{2130g \text{ Na}_2\text{SO}_4}{106g \text{ محلول}} \times \frac{1 \text{ mol SO}_4^{2-}}{142g \text{ Na}_2\text{SO}_4} = 0/00225 \text{ mol SO}_4^{2-}$$

$$\text{CaSO}_4 \text{ در محلول} : 0/0036 - 0/00225 = 0/00135 \text{ mol SO}_4^{2-}$$

$$?g \text{ CaSO}_4 = 0/00135 \text{ mol SO}_4^{2-} \times \frac{1 \text{ mol CaSO}_4}{1 \text{ mol SO}_4^{2-}} \times \frac{136g \text{ CaSO}_4}{1 \text{ mol CaSO}_4} = 0/1836g \text{ CaSO}_4$$

$$\text{CaSO}_4 \text{ انحلال پذیری} = \frac{0/1836g \text{ CaSO}_4}{60g \text{ آب}} \times 100 = 0/306$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی موارد:

گزینه ۱ درست است. در حلال‌های قطبی و ناقطبی، میزان انحلال پذیری گازها با هم تفاوت دارد.

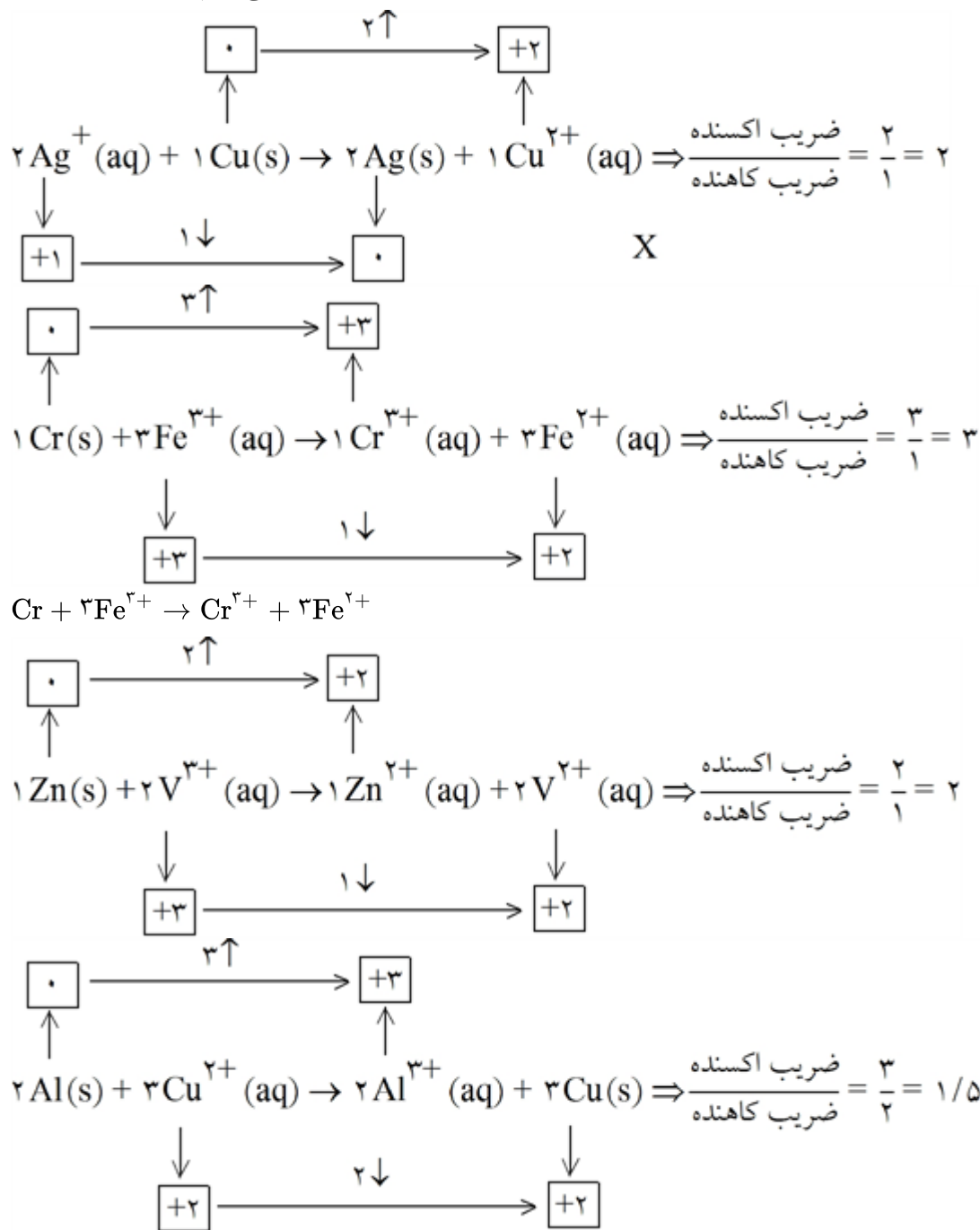
گزینه ۲ درست است. انحلال پذیری گازها و لیتیم سولفات در آب، نزولی بوده و فرآیندی گرماده هستند.

گزینه ۳ درست است. مقایسه نیروی جاذبه بین مولکولی به صورت گاز > مایع > جامد درست است و در دمای اتاق ید به حالت جامد یافت می‌شود.

گزینه ۴ نادرست است. زیرا نقره کلرید یک جامد یونی بوده که در صورت انحلال ناچیز در آب، به صورت یونی حل می‌شود.

- گونه اکسندگی گونه‌ای است که با گرفتن الکترون، کاهش یافته است.

- گونه کاهش‌دهنده گونه‌ای است که با از دست دادن الکترون، اکسایش یافته است. ← واکنش‌ها را موازنه می‌کنیم:



(آ) درست

(ب) درست - نمودار انحلال این دو نمک همدیگر را در دمای 30°C قطع کرده‌اند.

(پ) درست - شیب نمودار انحلال آن بسیار کم است.

(ت) درست - این نقطه در دمای 50°C بالای نمودار انحلال - دمای هر سه نمک است.

آ) این فرآیند نشان‌دهنده اسمز معکوس است. با حذف فشار خارجی جهت حرکت مولکول‌های آب برعکس شده و فرایند اسمز انجام می‌شود.

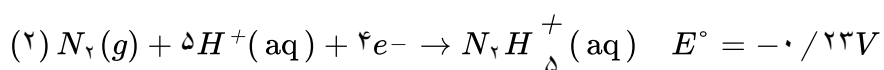
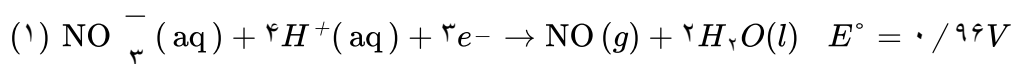
پ) آب تصفیه شده از این روش نسبت به روش تقطیر آلاینده کمتری دارد.

ت) اسمز معکوس برای تصفیه آب دریا استفاده می‌شود و نمی‌توان از آن برای تهیه خیار شور استفاده کرد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی همه گزینه‌ها:

گزینه ۱: هر چه E° نیم‌واکنش کاهش بیشتر، گونه اکسندۀ موجود در این نیم‌واکنش، قوی‌تر است. E° نیم‌واکنش ۱ بیشتر بوده و در نتیجه یون نیترات قدرت اکسندگی بیشتری نسبت به گاز نیتروژن دارد.

گزینه ۲: شکل موازنه شده هر یک از دو نیم‌واکنش به صورت زیر بوده و مجموع ضرایب استوکیومتری مواد و الکترون‌ها در هر دو نیم‌واکنش برابر ۱۱ است.



گزینه ۳: در این واکنش اکسایش - کاهش، Mn^{2+} گونه کاهنده در سمت واکنش‌دهنده‌ها و N_2H_5^+ گونه کاهنده سمت

فرآورده‌ها است. قدرت کاهندگی N_2H_5^+ بیشتر از Mn^{2+} می‌باشد. از آنجایی که گونه کاهنده قوی‌تر در سمت راست قرار دارد، واکنش غیر خود به خودی است.

گزینه ۴: برای محاسبه emf سلول گالوانی، بعد از تشخیص آند و کاتد از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\text{emf} = E^\circ (\text{کاتد}) - E^\circ (\text{آند})$$

کاتد، نیم‌سلولی است که E° کاهش آن بیشتر است. در بین نیم واکنش‌های ۱ و ۳، E° نیم‌واکنش ۳ بیشتر بوده و این نیم‌سلول

$$\text{emf} = 0.96 - 0.23 = 0.73\text{V}$$

تشکیل‌دهنده کاتد است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. جمله‌های اول، دوم و چهارم صحیح هستند و جمله سوم نادرست است. در پالایش الکتروشیمیایی

مس، مس ناخالص را به آند که قطب مثبت سلول است متصل می‌کنند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. رابطه انحلال پذیری با درصد جرمی محلول به صورت زیر است.

$$\%w/w = \frac{S}{S+100} \times 100$$

$$\%w/w_1 = \frac{S_1}{S_1+100} \times 100 \Rightarrow 37/5 = \frac{S_1}{S_1+100} \times 100 \Rightarrow S_1 = 60$$

$$\%w/w_2 = \frac{S_2}{S_2+100} \Rightarrow 40 = \frac{S_2}{S_2+100} \times 100 \Rightarrow S_2 = \frac{200}{3}$$

با توجه به خطی بودن ارتباط انحلال پذیری نمک X با دما، می توان معادله انحلال پذیری آن را به صورت زیر حساب کرد:

$$\frac{S - S_1}{S_2 - S_1} = \frac{\theta - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \Rightarrow \frac{S - 60}{\frac{200}{3} - 60} = \frac{\theta - 0}{\frac{10}{3} - 0} \Rightarrow 5S - 300 = \theta \Rightarrow S = 0.2\theta + 60$$

$$S(80) = 0.2(80) + 60 = 76$$

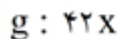
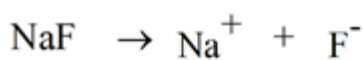
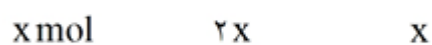
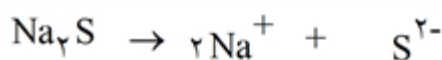
حال در دماهای $80^\circ C$ و $60^\circ C$ داریم:

$$S(60) = 0.2(60) + 60 = 72$$

بنابراین اگر محلولی ۱۷۶ گرمی سیر شده از X را از دمای $80^\circ C$ به $60^\circ C$ برسانیم، ۴ گرم رسوب ته ظرف تجمع می یابد.

$$\text{رسوب } 1g = \frac{\text{رسوب } 4g}{\text{محلول } 176g} \times \text{محلول } 176g = 44g \text{ رسوب}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$78x + 42x = 6 \Rightarrow x = 0.05$$

$$\text{ppm } S^{2-} = \frac{g S^{2-}}{g \text{ محلول}} \times 10^6 = \frac{0.05 \times 32}{500} \times 10^6 = 3200$$

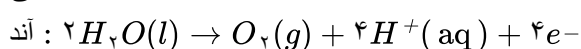
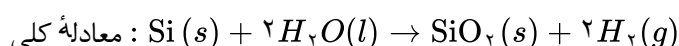
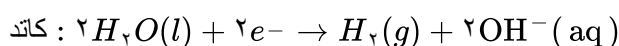
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت های ب، پ و ث درست اند. بررسی عبارت های نادرست:

(آ) در واکنش فلز روی با هیدروکلریک اسید، اتم های روی الکترون از دست داده و اکسایش می یابند.

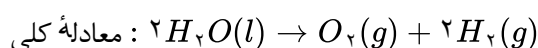
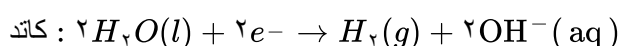
(ت) نیم واکنش کاهش در فرایندی که در گذشته به عنوان منبع نور برای عکاسی استفاده می شد به صورت



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. سلول نور الکتروشیمیایی:



برقکافت آب:



جمله اول نادرست است.

جمله های دوم، سوم و چهارم درست اند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها:

(آ) CaSO_4 ترکیبی کم‌محلول در آب است.

(ب) کود شیمیایی مورد نظر آمونیوم سولفات $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ است که در هر واحد فرمولی از آن ۱۵ اتم وجود دارد.

(پ) حلال جزئی از محلول است که حل‌شونده را در خود حل کرده و شمار مول‌های آن بیشتر است.

(ت) تهیه گاز H_2 نیز یکی از کاربردهای NaCl است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. انحلال‌پذیری گازها در آب با دما و فشار به ترتیب رابطه معکوس و مستقیم دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

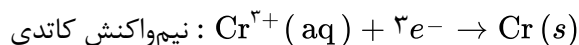
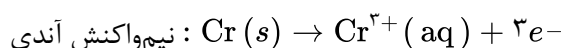
(۱) تینر $(\text{C}_6\text{H}_{14})$ یک حلال ناقطبی است.

(۳) نیاز روزانه بدن هر فرد به یون K^+ با آرایش الکترونی $[\text{Ar}] 4s^1$ ، دو برابر Na^+ است.

(۴) در هر سه روش، آب تصفیه شده دارای میکروب بوده و نیاز به کلرزنی دارد و روش تقطیر برخلاف دو روش دیگر قادر به حذف ترکیب‌های آلی فرار نیز نمی‌باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرایند آبکاری در سلول الکترولیتی انجام می‌شود. در فرایند موردنظر قطعه آهنی به کاتد (قطب منفی

باتری) و تیغه کروم به آند (قطب مثبت باتری) متصل می‌شود و محلول الکترولیت حاوی یون Cr^{3+} است.



بررسی گزینه‌ها:

(۱) اصلاً در محیط واکنش یون Fe^{2+} وجود ندارد. پس این یون‌ها نمی‌توانند کاهیده شوند.

(۲) واکنش‌ها در سلول الکترولیتی به کمک باتری انجام می‌شوند و قدرت اکسندگی و کاهندگی فلزات نسبت به همدیگر تأثیری ندارد.

(۳) با توجه به مصرف شدن Cr^{3+} در کاتد و تولید آن در آند، غلظت آن ثابت می‌ماند.

(۴) روی تیغه آهنی به وسیله کروم پوشانده می‌شود پس جرم آن افزایش می‌یابد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بررسی موارد نادرست:

(الف) از جمله ویژگی‌های گوناگون و شگفت‌انگیز آب، توانایی حل کردن اغلب مواد، افزایش حجم هنگام انجماد و داشتن نقطه جوش بالا و غیرعادی است.

(ب) مولکول‌های CO_2 و CH_4 ناقطبی ولی مولکول O_3 قطبی می‌باشند. مولکول‌های ناقطبی برخلاف مولکول‌های قطبی در میدان الکتریکی، جهت‌گیری نمی‌کنند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم x گرم نمک در ابتدا حل شده است. پس $6/5$ گرم آن رسوب می‌کند پس در دمای

25°C مقدار $25 - 6/5$ گرم حل شده است.

$$100g_{\text{آب}} \times \frac{x - 6/5}{xg_{\text{آب}}} = 35g \Rightarrow x = 10g$$

$$?gK^+ = 10g\text{KNO}_3 \times \frac{1\text{ mol KNO}_3}{101g\text{KNO}_3} \times \frac{1\text{ mol K}^+}{1\text{ mol KNO}_3} \times \frac{39K^+}{1\text{ mol K}^+} \simeq 3/9gK^+$$

