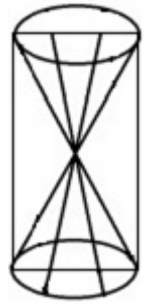


گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر شکل زیر دو خط می‌شود که در رأس سطح مخروطی متقاطع هستند.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در صورتی که صفحه شامل مولد سطح مخروطی باشد آنگاه صفحه مماس بر سطح مخروطی خواهد بود و مولد فصل مشترک صفحه با سطح مخروطی است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه 'MFF' ضلع مقابل به زاویه $\widehat{F}$ برابر وتر است. لذا $\widehat{F} = 30^\circ$ و از آنجا $\widehat{M} = 60^\circ$ لذا $\alpha + \beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ و چون بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی $\alpha = \beta$ پس $\alpha = \beta = 60^\circ$ بنابراین:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به تمرین ۱ صفحه ۱۶ کتاب داریم:

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{2} \Rightarrow 50^\circ = \frac{4x + 5 - (3x - 3)}{2} \Rightarrow 100 = 4x + 5 - 3x + 3 \Rightarrow x = 100 - 8 = 92$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بلندترین وتر گذرنده از هر نقطه در دایره، قطر دایره و کوتاه‌ترین وتر گذرنده از هر نقطه، وتری است که در آن نقطه بر قطر دایره عمود است.

از طرفی می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، بنابراین با فرض $MH = NH = x$ و طبق روابط طولی وترهای متقاطع در دایره داریم:

$$MH \times NH = AH \times BH \Rightarrow x \times x = \frac{R}{2} \times \frac{3R}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} R}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$2 + 1 + 3 = 6 \Rightarrow x = 6$$

$$\text{فراوانی آن دسته} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

فراوانی نسبی دسته آخر

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کل داده‌های جدید ۴۸ داده می‌باشد.

۷

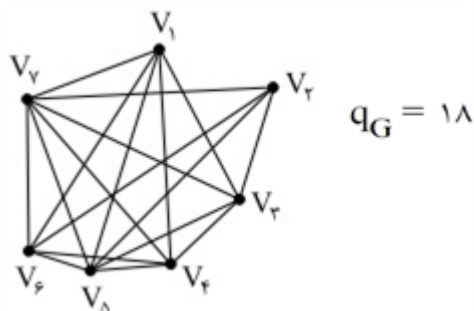
$$\text{فراوانی اولیه دسته دوم} = ۰/۱ \times ۴۰ = ۴$$

$$\text{فراوانی نسبی دسته دوم جدید} = \frac{۶}{۴۸} = \frac{۱}{۸} = ۰/۱۲۵$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۸

گراف G به صورت زیر است:

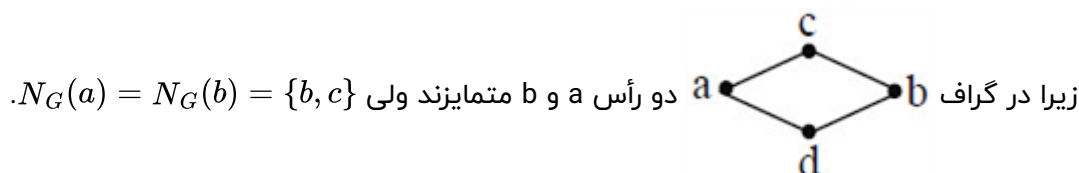


تعداد یال‌های داده شده برابر ۱۱ است، پس $۱۸ - ۱۱ = ۷$ یال به صورت فوق باید به گراف داده شده اضافه شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزاره‌ها:

۹

الف) نادرست است؛



زیرا در گراف دو رأس a و b متمایزند ولی $N_G(a) = N_G(b) = \{b, c\}$.

ب) درست است؛ زیرا اگر سه رأس از گراف ساده G از مرتبه ۴، باشد باید رأس چهارم نیز تنها باشد (گراف تهی در



روبه‌رو) و در گراف‌های ساده، هیچ رأسی طوقه ندارد.

پ) درست است؛ زیرا درجه همه رأس‌ها به صورت $\delta(G) = \Delta(G) = r$ درمی‌آید.

ت) نادرست است؛ زیرا گراف فرد - منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد.

ث) درست است؛ زیرا گراف کامل K_8 دارای $\frac{8 \times 7}{2} = ۲۸$ یال است.

در نتیجه تنها گزاره‌های ب و پ درست هستند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۰

$$y = \frac{۳x - ۱}{x + ۱} \Rightarrow \begin{cases} \text{نقطه تلاقی} \\ \text{مجانِب قائم} \\ \text{مجانِب افقی} \end{cases} \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۳ \end{cases} \longrightarrow (-۱, ۳)$$

با جای‌گذاری مختصات نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها در تک تک گزینه‌ها، مشخص می‌شود که $(-۱, ۳)$ تنها در خط

$$y = ۹x + ۱۲ \text{ صدق می‌کند.}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۱

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^۲ + |x| - x^۲}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = -۱$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-x}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{\sin \pi x} = \frac{-1}{\sin(-\pi)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\text{قطر} = AB = 2R \Rightarrow \sqrt{(-4-2)^2 + (4-(-4))^2} = 2R$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳

$$10 = 2R \Rightarrow R = 5$$

$$\text{محیط دایره} = 2\pi R \Rightarrow \text{محیط دایره} = 2\pi \times 5 = 10\pi$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است. ۱۴

$$m_{OA} = \frac{3 - (-1)}{4 - 1} = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{شیب مماس} = -\frac{3}{4}$$

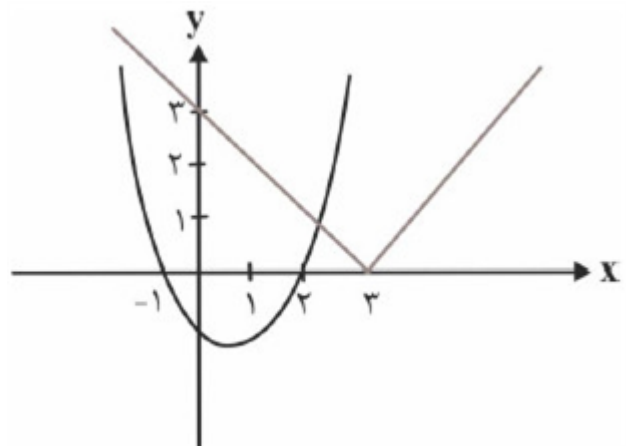
$$y - 3 = -\frac{3}{4}(x - 4) \xrightarrow{x=0} y = 6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار دو تابع $y = |3 - x|$ و $y = x^2 - x - 2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. ۱۵

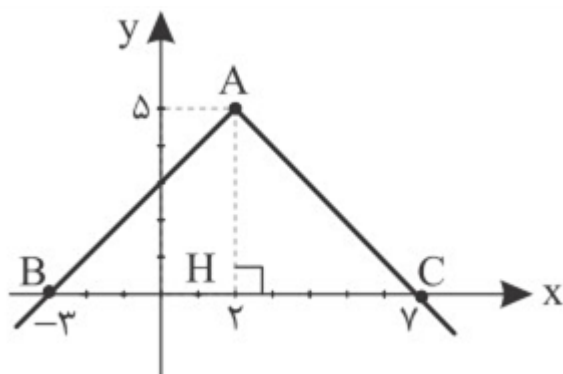
با توجه به شکل، نقاط تلاقی از حل معادله‌ی $x^2 - x - 2 = 3 - x$ به دست می‌آید. یعنی:

$$x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}, -\sqrt{5}$$

هر دو جواب قابل قبول‌اند.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار این تابع به صورت زیر است: (AH = 5, BC = 10) ۱۶



$$S_{\triangle ABC} = \frac{5 \times 10}{2} = 25$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا محل تلاقی دو خط داده شده را می‌یابیم:

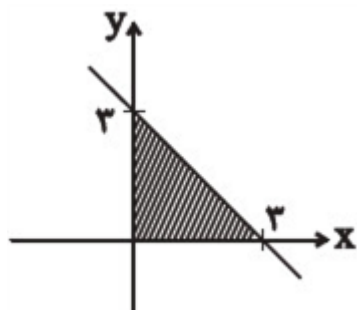
$$\begin{cases} y - 2x = 9 \\ 2y + 3x = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} x = -2, y = 5 \Rightarrow A \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

با توجه به این که شیب خط نیمساز ناحیه دوم و چهارم یعنی $y = -x$ برابر -1 است، شیب این خط نیز باید -1 باشد. پس

$$A \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix}, m = -1 \Rightarrow y = -x + 3$$

داریم:

خط فوق با محورهای مختصات مثلثی به این شکل ایجاد می‌کند:



$$\Rightarrow S = \frac{3 \times 3}{2} = 4.5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

- ۱) $\begin{cases} (A - B)' = (A \cap B')' = A' \cup B = B \cup A' \\ B - A = B \cap A' \end{cases}$
- ۲) $A \cap A' = \emptyset \Rightarrow A - A' = A$ ✓
- ۳) $A - (A \cap B) = A - B = A \cap B'$ ✓
- ۴) $(A')' = U - (U - A) = A$ ✓

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$d = \frac{11 - 3}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9(2) = 21$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. جملات دنباله هندسی را $t_1, t_1 r, t_1 r^2, \dots$ در نظر می‌گیریم. پس جملات دنباله حسابی

خواهند بود. حال با توجه به ویژگی جملات متوالی دنباله حسابی داریم:

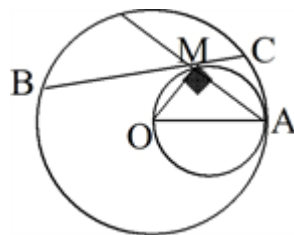
$$\frac{t_1}{2} + \frac{t_1 r^2}{2} = 2 \left(\frac{t_1 r}{2} \right) = t_1 r \Rightarrow 1 + r^2 = 2r \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1$$

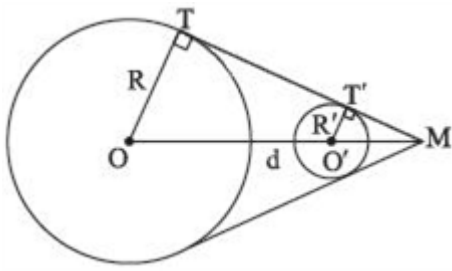
یعنی هر دو دنباله ثابت هستند، پس $d = 0$ و در نتیجه $r + d = 1$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر از نقطه‌ی M به نقاط O و A وصل کنیم در این صورت زاویه‌ی M قائمه خواهد بود زیرا

محاطی روبه‌رو به قطر می‌باشد چون OM عمود بر وتر AD است پس $MA = MD$ داریم:

$$MB \times MC = MA \times MD \xrightarrow{MA=MD} MB \times MC = MA^2$$





$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

$$\Rightarrow 5 = \sqrt{d^2 - 12^2} \Rightarrow d = 13$$

طبق قضیه تالس داریم:

$$OT \parallel O'T' \Rightarrow \frac{MO'}{MO' + d} = \frac{R'}{R} \Rightarrow \frac{MO'}{MO' + 13} = \frac{3}{9} \Rightarrow MO' = \frac{13}{2} = 6.5$$

$$MO = MO' + d = 6.5 + 13 = 19.5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۳

$$\frac{a}{260 + 220 + a + 90 + 50} = \frac{9}{40} \Rightarrow 40a = 9(620 + a)$$

$$\Rightarrow 31a = 9 \times 620 \Rightarrow a = 180$$

$$\theta_f = \frac{f_f}{n} \times 360^\circ = \frac{90}{180} \times 360^\circ = 40/5^\circ$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مجموع فراوانی‌های نسبی همواره برابر یک است، پس داریم: ۲۴

$$0/12 + 0/24 + 0/32 + 0/16 + 0/8 + x = 1 \Rightarrow x = 0/8$$

اگر تعداد کل داده‌ها برابر n و فراوانی و فراوانی نسبی دسته iام به ترتیب برابر f_i و F_i باشد، آن‌گاه داریم:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k}{n} = \frac{f_1}{n} x_1 + \frac{f_2}{n} x_2 + \dots + \frac{f_k}{n} x_k$$

$$= F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_k x_k$$

بنابراین میانگین تعداد گل‌های زده این تیم برابر است با:

$$\bar{x} = 0/12 \times 0 + 0/24 \times 1 + 0/32 \times 2 + 0/16 \times 3 + 0/8 \times 4 + 0/8 \times 5 = 2/8$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تعداد کل دانش‌آموزان کلاس ۷۲ نفر است، پس $x + y$ برابر با ۲۰ است. با توجه به اینکه ۲۵

زاویه مربوط به دسته سوم از زاویه مربوط به دسته پنجم، 40° کمتر است، داریم:

$$\frac{x}{72} \times 360^\circ + 40^\circ = \frac{y}{72} \times 360^\circ \Rightarrow 5x + 40^\circ = 5y \Rightarrow x + 8 = y \Rightarrow y - x = 8$$

از حل دستگاه $\begin{cases} x + y = 20 \\ y - x = 8 \end{cases}$ و $x = 6$ و $y = 14$ می‌شود.

$$\frac{x}{72} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}$$

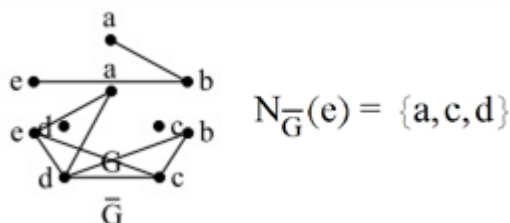
بنابراین فراوانی نسبی دسته سوم برابر است با:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این که $N_G(b) = \{a, e\}$ و $N_{\bar{G}}(b) = \{c, d\}$ می‌توان نتیجه گرفت که مرتبه‌ی گراف G برابر ۵ است.

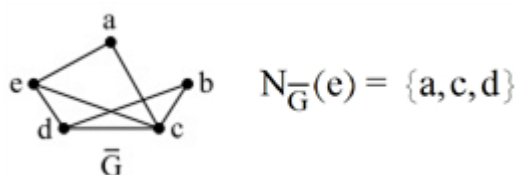
اندازه‌ی گراف G برابر ۳ است و این گراف فقط یک رازس تنها دارد، از طرفی رأس b نمی‌تواند به رئوس غیر از a و e وصل شود، پس یکی از چهار یال ac ، ad ، ec و ed در گراف G وجود دارد.

حال به بررسی هر چهار حالت ممکن می‌پردازیم:

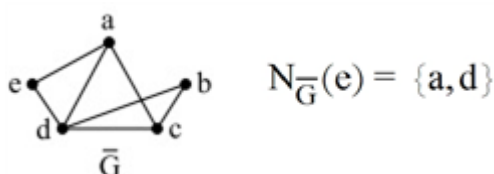
(۱) یال ac در گراف G موجود باشد:



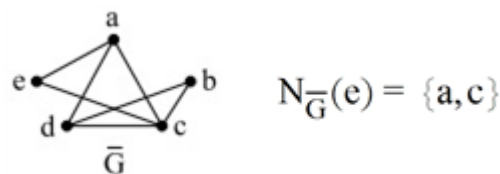
(۲) یال ad در گراف G موجود باشد:



(۳) یال ec در گراف G موجود باشد:



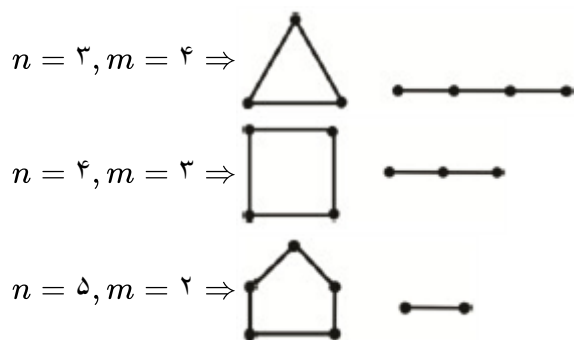
(۴) یال ed در گراف G موجود باشد:



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هر گراف C_n ، n رأس درجه ۲ دارد و هر گراف P_m دارای $(m - ۲)$ رأس درجه ۲ و دو رأس درجه ۱ است. بنابراین حاصل ضرب درجات رأس‌های گراف G به صورت زیر است:

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_n \times \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2 \times 1 \times 1}_{(m-2)} = 2^2 \Rightarrow 2^{n+m-2} = 2^5 \Rightarrow n+m-2 = 5 \Rightarrow n+m = 7$$

با توجه به این $n \geq 3$ و $m \geq 2$ است، حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع تنها یک مجانب قائم به صورت $x = k > 0$ دارد. این تابع فقط در $x = k$ تعریف نشده است، پس مخرج تنها یک ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد، پس $\Delta = 0$.

$$\Delta = b^2 - 16 = 0 \Rightarrow b^2 = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4 : x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ b = -4 : x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

پس $b = -4$ ، در این صورت $f(x) = \frac{x^2 + ax - 2}{(x - 2)^2}$ با توجه به شکل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f(x) = \pm \infty$$

در صورتی که در ضابطه‌ی تابع، $x = 2$ ریشه‌ی مضاعف تابع است و انتظار داریم حد تابع در $x = 2$ یا $+\infty$ باشد یا $-\infty$ ، بنابراین $x = 2$ ریشه‌ی صورت هم هست:

$$4 + 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\text{پس: } b - a = -3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1 + h) - (-1 - h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1 + h)^2 - (-1 - h)^2}{h[(-1 + h) + (-1 - h)]} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h^2 - 2h - 1 - h^2 - 2h}{-2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h}{-2h} = 2 \end{aligned}$$

$$m = 2 \Rightarrow (\text{شیب خط قائم}) m' = -\frac{1}{2}, (-1, -2) \in f$$

$$y - (-2) = -\frac{1}{2}(x - (-1)) \Rightarrow y + 2 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow 2y + x + 5 = 0$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا برای یافتن مجانب‌های افقی f حد این تابع را وقتی $x \rightarrow +\infty$ و $x \rightarrow -\infty$ را

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 2}{x|x| + x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

محاسبه می‌کنیم.

حال برای اینکه رفتار تابع را در اطراف خط $y = 1$ مشخص کنیم، حاصل $f(x) - 1$ را وقتی $x \rightarrow +\infty$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 + x + 2}{x|x| + x + 3} - 1 = \frac{-1}{x^2 + x + 3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1 < 0 \Rightarrow f(x) < 1$$

با توجه به این مطلب وقتی $x \rightarrow +\infty$ مقادیر تابع از ۱ کمتر است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 2}{x|x| + x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

حال برای اینکه رفتار تابع را در اطراف خط $y = -1$ مشخص کنیم، حاصل $f(x) + 1$ را وقتی $x \rightarrow -\infty$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) + 1 = \frac{x^2 + x + 2}{x|x| + x + 3} + 1 = \frac{2x + 5}{-x^2 + x + 3} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} f(x) + 1 > 0 \Rightarrow f(x) > -1$$

با توجه به این مطلب وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر تابع از -۱ بیشتر است. در نتیجه نمودار گزینه ۲ درست است.

$$f'(-3) = -\frac{3}{4} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{9 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{9 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{27}{7}$$

$$\Rightarrow f'(7) = \frac{27}{7} = \frac{f(7)}{7} \Rightarrow f(7) = 27$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شیب خط ها به ترتیب $m_f = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{4}$ و $m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{4}$ است، پس داریم:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{3}{4}x + 3}{-\frac{1}{4}x + 1}$$

و حد در $-\infty$ برابر نسبت جملات پرتوان یعنی نسبت شیب دو خط است که می شود $-\frac{3}{1} = -3$.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۳

$$\alpha + \beta = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\beta}{3-\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \\ \frac{\alpha}{3-\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

$$S = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{9 - 2(-1)}{-1} = -11$$

$$P = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 1$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 11x + 1 = 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۴

طرفین معادله به توان ۲ $\Rightarrow x - \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = 2 \Rightarrow x - 2 = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$

$$x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 5x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

غ ق ق زیرا حاصل رادیکال منفی می شود $\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2x} \xrightarrow{x=2} \text{حاصل} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۵

$$\frac{x-3}{x-1} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x-3}{x-1} - \frac{2}{x-1} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x-3-2}{x-1} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x-5}{x-1} = -\frac{1}{6}$$

طرفین وسطین می کنیم $\Rightarrow 6(x-5) = -(x-1) \Rightarrow 6x - 30 = -x + 1$

$$6x + x = 30 + 1 \Rightarrow 7x = 31 \Rightarrow x = \frac{31}{7}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۳۶

$$\left. \begin{aligned} x \leq \frac{1}{3} &\Rightarrow x - 2x + 1 < 3 \Rightarrow -2 < x \xrightarrow{\cap} -2 < x \leq \frac{1}{3} \xrightarrow{\in \mathbb{Z}} -1, 0 \\ x > \frac{1}{3} &\Rightarrow x + 2x - 1 < 3 \Rightarrow x < \frac{4}{3} \xrightarrow{\cap} \frac{1}{3} < x < \frac{4}{3} \xrightarrow{\in \mathbb{Z}} 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون جمله‌ی سوم دنباله‌ی حسابی صفر است، پس:

۳۷

$$a_1 + 2d = 0 \Rightarrow a_1 = -2d$$

از طرفی قدرنسبت دنباله‌ی هندسی برابر $r = \frac{a_6}{a_4}$ است، بنابراین داریم:

$$r = \frac{a_1 + 5d}{a_1 + 3d} \xrightarrow{a_1 = -2d} r = \frac{-2d}{d} = -2$$

$$r = \frac{n-6}{6-4} \Rightarrow -2 = \frac{n-6}{2} \Rightarrow n-6 = -4 \Rightarrow n = 2$$

حال داریم:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۳۸

$$a_n = 2a_{n-1} - 2 \Rightarrow a_1 = 3, a_2 = 2 \times 3 - 2 = 4$$

$$a_3 = 2 \times 4 - 2 = 6 \Rightarrow a_4 = 2 \times 6 - 2 = 10$$

$$\Rightarrow a_5 = 2 \times 10 - 2 = 18 \Rightarrow a_6 = 2 \times 18 - 2 = 34$$

$$\Rightarrow a_7 = 2 \times 34 - 2 = 66 \Rightarrow a_8 = 2 \times 66 - 2 = 130$$

$$a_8 - a_7 = 130 - 66 = 64$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به گزینه‌ها قدرنسبت دنباله را $q > 1$ در نظر می‌گیریم.

۳۹

سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی: $\frac{b}{q}, b, bq$

$$\frac{b}{q} \times b \times bq = \frac{27}{8} \Rightarrow b^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow b = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} + bq = \frac{15}{4} \Rightarrow bq = \frac{9}{4} \Rightarrow q = \frac{bq}{b} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۴۰

$$a_n = \frac{3}{2}n - 5$$

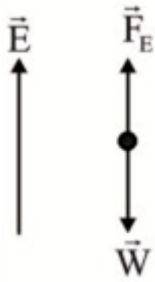
$$\xrightarrow{n=1} a_1 = \frac{3}{2}(1) - 5 = \frac{3}{2} - 5 = -\frac{7}{2}$$

$$\xrightarrow{n=20} a_{20} = \frac{3}{2}(20) - 5 = 30 - 5 = 25$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2} \left(-\frac{7}{2} + 25 \right) = 10 \left(\frac{43}{2} \right) = 215$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۱

برای آن که بار q در حال تعادل باشد، باید W و $\vec{F}_E$ در خلاف جهت هم و هم اندازه باشند:



$$F_E = W \rightarrow |q| E = mg \rightarrow |q| \frac{|\Delta V|}{d} = mg$$

$$\left| q \frac{600}{3 \times 10^{-2}} \right| = 12 \times 10^{-3} \times 10^{-3} \times 10 \rightarrow |q| = 6 \text{ nC}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق اطلاعات سؤال داریم: ۴۲

$$U_2 - U_1 = 0.64 U_1 = 0.36 U_1$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی انرژی ذخیره‌شده در خازن داریم:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{Q_2^2}{2C}}{\frac{Q_1^2}{2C}} = \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^2 = \frac{36}{100} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{6}{10}$$

بنابراین درصد تغییرات بار ذخیره‌شده در خازن برابر است با:

$$\frac{\Delta Q}{Q_1} \times 100 = \frac{0.6 Q_1 - Q_1}{Q_1} \times 100 = -40\%$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مادامی که خازن به باتری وصل است، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن با اختلاف پتانسیل الکتریکی باتری، برابر است، بنابراین اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سرش ثابت می‌ماند و از طرفی هم وقتی صفحات خازن را از باتری جدا می‌کنیم، راهی برای جابه‌جا شدن بارها وجود ندارد، پس بار ذخیره‌شده روی صفحات خازن، ثابت می‌ماند. ۴۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴۴

تنها در صورتی ممکن است اندازه شدت میدان تغییر نکند که حداقل اندازه میدان برآیند قرینه شده باشد.



$$\Rightarrow \text{فرض} \Rightarrow E_1 - E_2 = E_2 \Rightarrow E_1 = 2E_2$$

برای تحقق شکل و روابط فوق باید $q_1 = +2q_2$ باشند.

$$F = k \frac{q_1 q_2}{d^2} = k \frac{q^2}{d^2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۵

$$q' = \frac{q}{2} \quad q' = q + \frac{q}{2} = \frac{3q}{2}$$

$$F' = \frac{k \frac{q}{2} \times \frac{3q}{2}}{d^2} = k \frac{3q^2}{4d^2} \Rightarrow F' = \frac{3}{4} F$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا تعادل نیروهای الکتریکی را روی بار مجهول q_2 می‌نویسیم تا رابطه بین فاصله‌ها به

$$F_{12} = F_{22} \Rightarrow \frac{k|q_1||q_2|}{x^2} = \frac{k|q_2||q_2|}{y^2} \Rightarrow \frac{5}{x^2} = \frac{20}{y^2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{y} \Rightarrow y = 2x \quad (1)$$

دست آید:

توجه کنید برای آن‌که بار q_1 و q_2 در تعادل باشند، باید بار q_2 منفی باشد. سپس تعادل را روی بار q_1 می‌نویسیم تا بار q_2 را به دست آوریم:

$$F_{21} = F_{31} \Rightarrow \frac{k|q_2||q_1|}{x^2} = \frac{k|q_2||q_1|}{(x+y)^2} \xrightarrow{(1)} \frac{|q_2|}{x^2} = \frac{20}{9x^2} \Rightarrow |q_2| = \frac{20}{9} \Rightarrow q_2 = -\frac{20}{9} \mu C$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ظرفیت ثابت است و چون q نصف شده انرژی $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود.

$$W = \frac{q^2}{2C}$$

$$q' = \frac{1}{2}q$$

$$W' = \frac{\frac{1}{4}q^2}{2C} = \frac{1}{4} \left(\frac{q^2}{2C} \right)$$

$$\frac{W'}{W} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با تغییر اختلاف پتانسیل، ظرفیت خازن تغییر نمی‌کند:

$$V_2 = V_1 + \frac{20}{100}V_1 = 1/2 V_1$$

با افزایش ولتاژ، نیز افزایش می‌یابد.

$$\begin{cases} q_1 = CV_1 \\ q_2 = CV_2 = C(1/2 V_1) \end{cases} \Rightarrow q_2 = q_1 + 12 \mu C \Rightarrow 1/2 C \times 20 = C \times 20 + 12$$

$$\Rightarrow 4C = 12 \Rightarrow C = 3 \mu F$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مورد بارهای الکتریکی دو اصل وجود دارد که نخستین آن‌ها اصل پایستگی بار و دومین

هم، کوانتیده بودن بار است. توجه داشته باشید که تریبو الکتریکی همان جدول موسوم به سری الکتریسیته مالشی می‌باشد و جزو اصل بارهای الکتریکی به حساب نمی‌آید.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{0/4 \text{ kg}}{36 \cdot \frac{N}{m}}} = 2 \frac{\pi}{30} (s) \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{30}{2\pi} \text{ Hz}$$

$$\xrightarrow{\pi=3} f = 5 \text{ Hz}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow \log \frac{I}{I_0} = 8 \Rightarrow 10^8 = \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = 10^8 \times 10^{-12} = 10^{-4} \frac{W}{m^2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا بردار مکان اولیه متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) \xrightarrow{t=0} x = 2m$$

$$x = -2m \Rightarrow \text{بردار مکان، قرینه‌ی بردار مکان اولیه باشد.}$$

در ادامه مکان متحرک را در هر یک از گزینه‌ها به دست می‌آوریم تا ببینیم در کدام گزینه، مکان متحرک، قرینه‌ی مکان اولیه نیست.

بررسی گزینه‌ها:

$$1) \text{ پایان ثانیه‌ی دوم : } t = 2s \Rightarrow x = -2m \quad \times$$

$$2) \text{ پایان ثانیه‌ی چهارم : } t = 4s \Rightarrow x = 2m \quad \checkmark$$

$$3) \text{ پایان سه ثانیه‌ی دوم : } t = 6s \Rightarrow x = -2m \quad \times$$

$$4) \text{ پایان دو ثانیه‌ی پنجم : } t = 10s \Rightarrow x = -2m \quad \times$$

$$4\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 0.5$$

$$\frac{t_1}{T} = \frac{1}{12} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{6}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا دوره تناوب را به دست می‌آوریم:

تندشونده زمانی است که علامت سرعت و شتاب یکسان باشد.

$$\frac{t_2}{T} = \frac{5}{6} = \frac{5T}{3}$$

$$T = \frac{13}{24}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$F' = 0.64F$$

$$\frac{V'}{V} = \sqrt{\frac{F'}{F}} = \sqrt{0.64} = 0.8$$

$$f_1 = \frac{V}{2L} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{V'}{V} = 0.8$$

بنابراین بسامد هماهنگ اصلی ۲۰ درصد کم می‌شود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$P_{\max} = mv_{\max} \Rightarrow 2 \times 10^{-2} \pi = 10^{-1} v_m \Rightarrow v_m = 2 \times 10^{-2} \pi \frac{m}{s}$$

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \left(\frac{1}{2}\right) (10^{-1}) (2 \times 10^{-2} \pi)^2 = 2 \times 10^{-5} \pi^2 = 20 \pi^2 \mu J$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه بسامد نوسان‌های هماهنگ یک تار مرتعش، داریم:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \xrightarrow{v=\sqrt{\frac{FL}{m}}} f_n = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{F}{mL}}$$

$$f_4 = \frac{4}{2} \sqrt{\frac{400}{20 \times 10^{-2} \times 2}} \Rightarrow f_4 = 200 \text{ Hz}$$

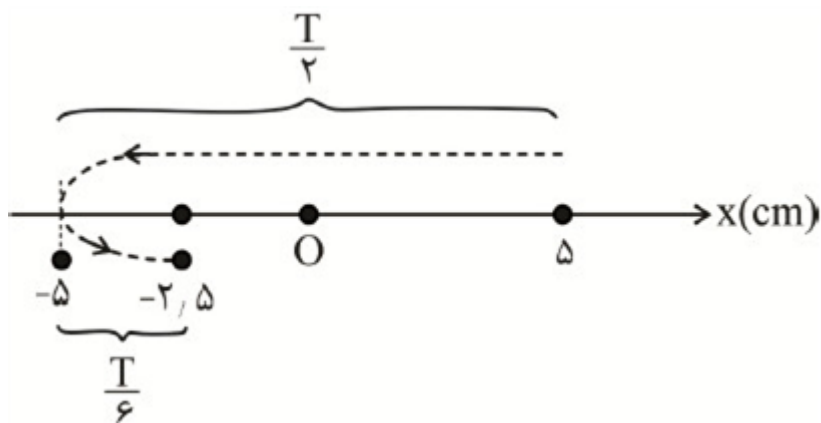
$$f_3 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{400}{20 \times 10^{-2} \times 2}} \Rightarrow f_3 = 150 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow f_4 - f_3 = 200 - 150 = 50 \text{ Hz}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گام اول: با استفاده از دوره جرم و فنر یعنی $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ داریم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.1}{40}} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} \simeq \frac{3}{10} \text{ s}$$

گام دوم: با توجه به الگوهای زمانی خاص و مطابق شکل زیر مدت زمان موردنظر را حساب می‌کنیم:



$$\Delta t = \frac{T}{3} + \frac{T}{6} = \frac{4T}{6} = \frac{2}{3}T$$

$$\Delta t = \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} = 0.2 \text{ s}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گام اول: ابتدا طول موج را به دست می‌آوریم:

$$\lambda + \frac{\lambda}{2} = 30 \Rightarrow \frac{3\lambda}{2} = 30 \Rightarrow \lambda = 20 \text{ cm}$$

گام دوم: حال تندی انتشار موج و بسامد زاویه‌ای را به دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{45}{1/8}} = 5 \frac{m}{s}$$

$$\lambda = vT \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{20 \times 10^{-2}}{5} = 0.4 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \frac{\text{rad}}{s}$$

گام سوم: با توجه به صورت مسئله داریم:

$$\frac{v}{\text{تندی انتشار موج}} = 0.5 \Rightarrow \frac{v}{A\omega} = 0.5 \Rightarrow \frac{5}{A \times 5\pi} = 0.5 \Rightarrow A = \frac{1}{5\pi} (m)$$

$$a_{\max} = A\omega^2 \Rightarrow a_{\max} = \frac{1}{5\pi} \times (5\pi)^2 = 5\pi \frac{m}{s^2}$$

گام چهارم: بیشینه شتاب ذرات را داریم:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. گام اول: با توجه به نقش دو موج، نسبت طول موج و دامنه دو موج را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{3\lambda_A}{2} = \lambda_B \Rightarrow \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{A_A}{A_B} = \frac{A}{\frac{1}{3}A} = 3 \Rightarrow A_B = \frac{1}{3}A_A$$

گام دوم: سرعت انتشار دو موج یکسان و برابر است. (هر دو موج در یک طناب منتشر می‌شوند).

$$v_A = v_B \xrightarrow{f=\frac{v}{\lambda}} \frac{f_B}{f_A} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{2}{3}$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

گام سوم: مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی (توان متوسط) با مربع دامنه (A^2) و مربع بسامد (f^2) موج متناسب است. بنابراین:

$$\frac{\bar{P}_B}{\bar{P}_A} = \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2 \times \left(\frac{f_B}{f_A}\right)^2 \Rightarrow \frac{\bar{P}_B}{\bar{P}_A} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{81}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه تندی موج عرضی در طناب داریم:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \mu = \frac{m}{L} = \frac{\rho V}{L} = \frac{\rho A L}{L} \Rightarrow \mu = \rho A = \rho \pi \frac{D^2}{4} \quad v = \frac{2}{D} \sqrt{\frac{F}{\rho \pi}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{D_1}{D_2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{D_1}{\frac{1}{10}D_1} = \frac{10}{1} \Rightarrow v_2 = \frac{10}{1}v_1$$

$$\frac{\Delta v}{v_1} \times 100 = \frac{\frac{10}{1}v_1 - v_1}{v_1} \times 100 = \frac{9}{1} \times 100 = 900\%$$

در نتیجه:

پس تندی موج در آن ۲۵ درصد افزایش می‌یابد.

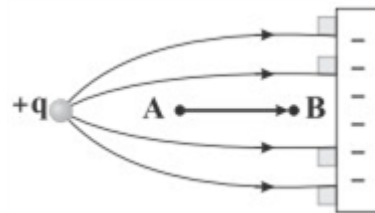
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا خطوط میدان الکتریکی را رسم می‌کنیم:

حال با حرکت از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B تراکم خطوط میدان الکتریکی کم‌تر شده، پس اندازه‌ی میدان الکتریکی کاهش یافته و طبق رابطه‌ی $F = E|q|$ ، اندازه‌ی نیروی وارد بر بار از طرف میدان نیز کم می‌شود، بنابراین:

$$F_B < F_A$$

انرژی پتانسیل الکتریکی بار مثبت با حرکت در جهت خطوط میدان الکتریکی، کاهش می‌یابد، بنابراین:

$$U_B < U_A$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید نیرویی که از طرف بارهای q_1 و q_2 بر بار q_4 وارد می‌شود، توسط نیرویی که از طرف بار q_3 بر بار q_4 اعمال می‌شود، خنثی شود.

$$F_{14} = \frac{k|q_1||q_4|}{d_{14}^2} \Rightarrow F_{14} = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-6}}{(20 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow F_{14} = \frac{9 \times 2 \times 4 \times 10^{-3}}{40 \times 10^{-2}} = 1/8 N$$

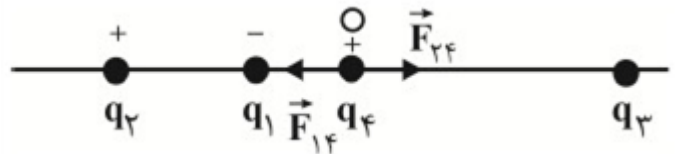
$$\Rightarrow \vec{F}_{14} = -1/8 \vec{i}$$

$$F_{24} = \frac{k|q_2||q_4|}{d_{24}^2} \Rightarrow F_{24} = \frac{9 \times 10^9 \times 16 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-6}}{(40 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow F_{24} = \frac{9 \times 16 \times 4 \times 10^{-3}}{160 \times 10^{-2}} = 3/6 N$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{24} = 3/6 \vec{i}$$

$$\vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{34} - 1/8 \vec{i} = 0 \Rightarrow F_{34} = 1/8 N \Rightarrow \frac{k|q_3||q_4|}{d_{34}^2} = 1/8$$

$$\frac{9 \times 10^9 \times |q_3| \times 4 \times 10^{-6}}{(60 \times 10^{-2})^2} = \frac{9 \times 4 \times 10^{-3} |q_3|}{36 \times 10^{-2}} = 1/8 \Rightarrow |q_3| = 18 \times 10^{-6} C = 18 \mu C$$



با توجه به این که $F_{24} > F_{14}$ می‌توان گفت برای برقراری تعادل $\vec{F}_{34}$ هم‌جهت $\vec{F}_{14}$ خواهد شد و بار q_4 را دفع می‌کند پس بار q_3 مثبت است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا تعیین می‌کنیم بارهای q_1 و q_2 چند نیوتون نیرو بر بار Q وارد می‌کنند.

$$F_1 = \frac{k|q_1||Q|}{d_{1Q}^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 12 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{(30 \times 10^{-2})^2} = 1/2 N \Rightarrow \vec{F}_1 = 1/2 \vec{i}$$

$$F_2 = \frac{k|q_2||Q|}{d_{2Q}^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{(20 \times 10^{-2})^2} = 0/9 N \Rightarrow \vec{F}_2 = 0/9 \vec{i}$$

از طرفی داریم:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 3 \vec{i} \Rightarrow 1/2 \vec{i} + 0/9 \vec{i} + \vec{F}_3 = 3 \vec{i} \Rightarrow \vec{F}_3 = 0/9 \vec{i}$$

با توجه به نتیجه به دست آمده، بار q_3 الزاماً منفی است.

$$F_3 = \frac{k|q_3||Q|}{d_{3Q}^2} \Rightarrow 0/9 = \frac{9 \times 10^9 |q_3| \times 10^{-6}}{(20 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow |q_3| = 4 \mu C \Rightarrow q_3 = -4 \mu C$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حالت اول (قبل از اعمال تغییرات):

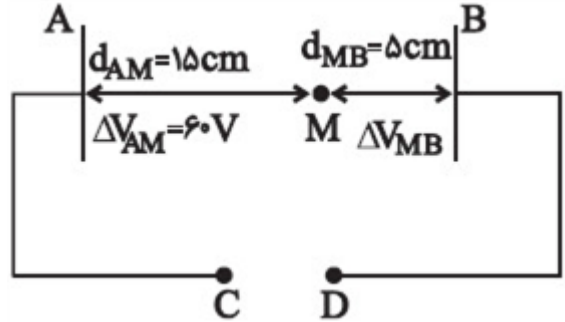
با توجه به این که دو صفحهٔ رسانا با سیم به دو نقطهٔ C و D متصل اند، پس با آنها هم‌پتانسیل اند؛ یعنی:

$$V_A = V_C = -100V$$

$$\Delta V_{AM} = V_M - V_A = (-40) - (-100) = 60V$$

پس:

و با توجه به اینکه در میدان الکتریکی یکنواخت ΔV با d رابطهٔ مستقیم دارد:



$$\frac{\Delta V_{MB}}{\Delta V_{AM}} = \frac{d_{MB}}{d_{AM}} \Rightarrow \frac{\Delta V_{MB}}{60} = \frac{5}{15} \Rightarrow \Delta V_{MB} = 20V$$

بنابراین اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ A و B برابر است با:

$$\Delta V_{AB} = \Delta V_{AM} + \Delta V_{MB} = 20 + 60 = 80V$$

پس اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ C و D برابر $80V$ است.

با توجه به اینکه با حرکت از صفحهٔ A ($V_A = -100V$) به نقطهٔ M ($V_M = 40V$)، پتانسیل الکتریکی مثبت‌تر می‌شود، پس پتانسیل صفحهٔ B نسبت به صفحهٔ A و نیز نقطهٔ D نسبت به نقطهٔ C مثبت‌تر است.

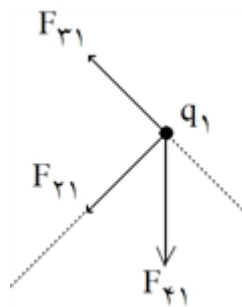
$$V_D = V_C = +80V$$

بعد از اتصال کلید، نقطهٔ C را به زمین متصل می‌کنیم ($V_C = 0$)، پس:

$$V_D - 0 = 80V \Rightarrow V_D = +80V$$

توجه کنید که تغییر فاصلهٔ بین صفحات روی پتانسیل الکتریکی نقاط بین دو صفحه تأثیر می‌گذارد نه اختلاف پتانسیل دو نقطهٔ C و D که در نقش باتری یا مولد است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مکان بار q_1 داریم:



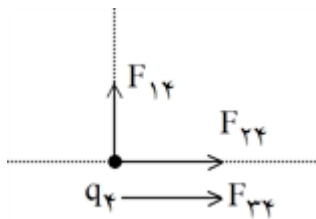
در مکان بار q_4 داریم:

$$F_{24} = F_{34} = 90 \times \frac{q}{18} = 45N$$

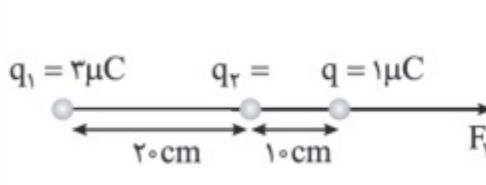
$$F_{14} = 90 \times \frac{q}{18} = 45N$$

$$F'_{41} = 45\sqrt{4+1} = 45\sqrt{5}N$$

$$\Rightarrow \frac{F_{41}}{F'_{41}} = \frac{22/5\sqrt{6}}{45\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا نیرویی که q_1 بر بار $1\mu C$ وارد می‌کند را به دست می‌آوریم.



$$F = k \frac{|q_1||q|}{r^2} \Rightarrow F_1 = 9 \times 10^9 \times \frac{3 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-6}}{(30 \times 10^{-2})^2}$$

$$F_1 = 0.3 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_1 = 0.3 \vec{i}$$

نیروی خالص $\vec{F}_{\text{net}} = -0.3 \vec{i}$ است. از این رو:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow -0.3 \vec{i} = 0.3 \vec{i} + \vec{F}_2 \Rightarrow F_2 = -0.6 \vec{i}$$

$$F_2 = k \frac{|q_2||q|}{r^2} \Rightarrow 0.6 = 9 \times 10^9 \times \frac{|q_2| \times 10^{-6}}{10^{-2}} \Rightarrow |q_2| = \frac{2}{3} \times 10^{-6} \text{ C}$$

جهت F_2 به سمت چپ، در جهت منفی محور x هاست، بنابراین بار q_2 منفی است.

$$q_2 = -\frac{2}{3} \mu C$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دوره تناوب آونگ‌های ساده از $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ به دست می‌آید:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \xrightarrow{g=G \frac{M_e}{r^2}} \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = \frac{r_1}{r_2} \xrightarrow{r=R_e+h}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{R_e}{R_e + 3R_e} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر با توجه به رابطه $N = \frac{t}{T}$ داریم:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{T_2}{T_1} \xrightarrow{(1)} \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{4} \rightarrow N_2 = 4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

درستی گزینه‌ی «الف»: امواج اولیه‌ی P و ثانویه‌ی S به ترتیب طولی و عرضی هستند و سرعت P بیشتر است.

نادرستی گزینه‌ی «ب»: در طیف امواج الکترومغناطیس کم‌ترین بسامد مربوط به بسامدهای فوق پایین (ELF) و بیشترین بسامد مربوط به اشعه گاما است.

درستی گزینه‌ی «پ»: طبق پیش‌بینی ماکسول امواج الکترومغناطیس از نوسان هم‌زمان میدان‌های $\vec{E}$ و $\vec{B}$ به‌وجود

می‌آید و با سرعت $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ در خلأ منتشر می‌شوند.

درستی گزینه‌ی «ت»: سرعت موج عرضی در سیم کشیده شده $\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است و $\mu = \frac{m}{L}$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نادرستی گزینه‌ی «۱» سرعت دریافت موج با حرکت چشمه تغییری نمی‌کند.

درستی گزینه‌ی «۲» با کاهش فاصله از چشمه صوت، شدت صوت بیش‌تر می‌شود.

درستی گزینه‌ی «۳» اگر سرعت ثابت باشد، بسامد دریافتی بیش‌تر از بسامد واقعی است ولی وقتی شتاب داشته باشد بسامد دریافتی تغییر می‌کند.

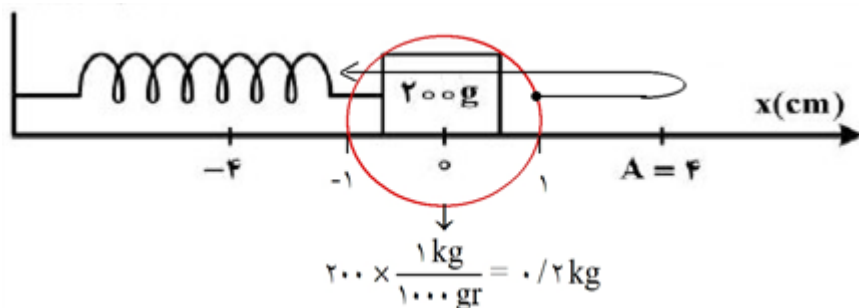
درستی گزینه‌ی «۴» با نزدیک شدن چشمه به شنونده، طول موج دریافتی نسبت به طول موج اصلی کم‌تر می‌شود.

دوره تناوب یک نوسانگر هماهنگ ساده از $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ به دست می‌آید و تعداد نوسان‌ها در مدت زمان t برابر با

$$N = \frac{t}{T} \text{ است.}$$

$$\frac{N_x}{N_e} = \frac{T_e}{T_x} = \sqrt{\frac{g_x}{g_e}} \rightarrow \frac{N_x}{N_e} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad (I)$$

$$N_e - N_x = 60 \rightarrow \frac{2}{3} N_x - N_x = 60 \rightarrow \frac{1}{3} N_x = 60 \rightarrow N_x = 180$$



$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

$$\frac{2}{3} = \frac{T}{T} \Rightarrow T = 4s \quad \text{یعنی } A \text{ را طی کرده یعنی } \frac{T}{2} \text{ طول کشیده پس داریم:}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{10}{4}$$

$$E = \frac{1}{2} \times 0.2 \times \frac{10}{4} \times 16 \times 10^{-4} = 0.4 \text{ mg}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای t یکسان، نسبت $\frac{\omega_B}{\omega_A}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{n_B}{n_A} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{2}{3}$$

با توجه به رابطه‌ی $E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$ می‌توان نوشت:

$$\frac{E_B}{E_A} = \frac{m_B}{m_A} \times \left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^2 \times \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2 \xrightarrow{A_A=2m, A_B=1m, \frac{\omega_B}{\omega_A}=\frac{2}{3}, m_A=\frac{1}{2}m_B}$$

$$\frac{E_B}{E_A} = \frac{m_B}{\frac{1}{2}m_B} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{1}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_B}{E_A} = 2 \times \frac{4}{9} \times \frac{4}{1} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{E_B}{E_A} = \frac{8}{9}$$

$$A = 6 \text{ cm}, T = 0.4 \text{ s}$$

$$t_1 = 0.1 = \frac{T}{4} \Rightarrow V_1 = V_{\max} = A\omega = \frac{6}{10} \times \frac{2\pi}{0.4} = 0.3\pi$$

$$t_2 = 0.8 = 2T \Rightarrow v_2 = 0$$

$$|\bar{a}| = \left| \frac{V(0.8) - V(0.1)}{0.8 - 0.1} \right| = \left| \frac{0 - 0.3\pi}{0.7} \right| = \frac{3}{7}\pi$$

هنگامی که شتاب حرکت صفر است نوسانگر از مرکز نوسان می‌گذرد و در بازه‌ی $\frac{T}{4}$ دو بار متوالی از مرکز نوسان می‌گذرد و در مرکز نوسان سرعت نوسانگر $\pm A\omega$ است.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0.5}} = \sqrt{400} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v_{\max} = A\omega = 0.3 \times 20 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{اگر } v_1 = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = +6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta v = v_2 - v_1 = 6 - (-6) = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} \text{ s} \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{\pi}{20} = \frac{3}{20} = 0.15 \text{ s}$$

$$|a_{\text{av}}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12}{0.5} = \frac{1200}{15} = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(۱) سیلیس یک جامد کووالانسی است و نقطه ذوب آن از کربن دی‌اکسید که یک ترکیب مولکولی است، بیشتر است.

(۲) مواد تشکیل‌دهنده خاک رس عبارتند از: SiO_2 , Al_2O_3 , H_2O , Na_2O , Fe_2O_3 , MgO , طلا و دیگر مواد؛ که در

میان آن‌ها اتم‌های هیدروژن در آب و آهن در آهن (III) اکسید به آرایش هشت‌تایی گاز نجیب نمی‌رسند.

(۳) در ساختار یخ، هر اتم اکسیژن به دو اتم هیدروژن با پیوند اشتراکی و به دو اتم هیدروژن از مولکول‌های دیگر، با پیوند هیدروژنی متصل است.

(۴) ترکیب‌های مولکولی، در هر حالتی (جامد، مایع، گاز) دارای مولکول‌های مجزا هستند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نوع جامد و نقطه ذوب بالا از ویژگی‌های مشترک این سه ماده است.

- الماس و گرافیت ۱ نوع اتم و سیلیس (SiO_2) دو نوع اتم دارد.

- هر سه، جامد کووالانسی هستند.

- الماس و سیلیس سخت و گرافیت نرم است.

- در الماس هر اتم کربن به ۴ اتم کربن دیگر متصل است، در گرافیت هر اتم کربن به ۳ کربن دیگر متصل است. در

سیلیس هر اکسیژن به ۲ اتم سیلیس و هر سیلیس به ۴ اکسیژن متصل است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

فرض می‌کنیم جرم خاک رس بعد از حرارت دادن (دیگر $42g$ + $8gH_2O$ + $50gSiO_2$) می‌باشد و مقدار آب خارج

شده از خاک رس در نمونه اولیه را x در نظر می‌گیریم.

گرم آب

$$\text{درصد جرمی آب در نمونه اولیه} = \frac{\text{گرم خاک رس اولیه}}{\text{گرم آب}} \times 100$$

$$\Rightarrow 20 = \frac{(8+x)gH_2O}{(50+42+8+x)g \text{ خاک رس اولیه}} \times 100 \Rightarrow \frac{8+x}{100+x} = \frac{2}{10}$$

$$\Rightarrow 80 + 10x = 200 + 2x \Rightarrow x = 15g$$

درصد جرمی SiO_2 در نمونه اولیه:

$$\% \text{SiO}_2 = \frac{50g \text{SiO}_2}{(100+15)g \text{ خاک}} \times 100\% = \frac{50}{115} \times 100\% \approx 43\% / 5\%$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به جدول زیر گزینه ۳ پاسخ تست است.

عنوان فناوری شیمیایی	دستاورد
فناوری تصفیه آب	مانع گسترش بیماری
فناوری تولید پلاستیک	توسعه و تحول پوشاک و دارو
فناوری شیمیایی و تولید کود	تأمین غذای جمعیت
مبدل کاتالستی	کاهش آلودگی

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عبارت‌های آ و پ نادرست هستند. بررسی عبارت‌های نادرست:

(آ) کاتیون‌های Na^+ ، Al^{3+} و Mg^{2+} موجود در اجزای سازنده خاک رس به آرایش گاز نجیب رسیده‌اند، اما Fe^{3+} (موجود

در Fe_2O_3) چنین شرایطی ندارد.

پ) پیوند کووالانسی اتم‌های کربن در هر لایه (نه بین لایه‌ها) از گرافیت، موجب افزایش نقطه ذوب و جوش آن شده است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عنصر موردنظر می‌تواند یکی از فلزهای دسته‌ی d باشد که $(\text{Fe})_{26}X$ چنین است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا، در هر دوره از جدول دوره‌ای، از چپ به راست، از خاصیت فلزی کاسته و به خاصیت

نافلزی افزوده می‌شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زیرا، این عنصر در گروه دوم و دوره‌ی چهارم قرار دارد و نسبت به سایر عنصرهای داده شده،

تمایل بیش‌تری به از دست دادن الکترون دارد.

- گزینه ۱: توزیع ناهمگون عناصر در جهان، دلیلی بر پیدایش تجارت جهانی است.
- گزینه ۲: گسترش صنعت الکترونیک بر اجرایی مبتنی است از موادی به نام نیمه‌رساناها ساخته می‌شود.
- گزینه ۳: جرم کل مواد در زمین تقریباً ثابت است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا، در گروه فلزها با افزایش عدد اتمی، خاصیت فلزی افزایش می‌یابد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

واکنش سریع‌تر فلز پتاسیم نسبت به فلز سدیم با آب سرد به نوع واکنش‌دهنده مربوط است. زیرا که فلز پتاسیم به دلیل دارا بودن شعاع اتمی بزرگ‌تر نسبت به سدیم واکنش‌پذیری بیشتری دارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی سایر گزینه‌ها:

- گزینه ۱: عنصر دوم گروه ۱۳، Al، فلز و چکش‌خوار است. در حالی‌که عنصر سوم گروه ۱۴، Ge، شبه‌فلز و شکننده است.
- گزینه ۲: در گروه ۱۴ دو شبه‌فلز با رسانایی اندک وجود دارد، در حالی‌که عناصر گروه ۱۰ همه فلز هستند.
- گزینه ۳: عناصر گروه ۱۷ نافلز بوده و توانایی به اشتراک گذاشتن الکترون دارند، در حالی‌که در دسته p ، عناصر فلزی نیز وجود دارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در بین ترکیبات داده شده، SiC، سیلیسیم کاربید (کربوراندوم) یک جامد کووالانسی مشبک و $COCl_2$ ، PCl_5 و S_8 جامدات مولکولی هستند و بین مولکول‌هایشان نیروهای ضعیف واندروالسی برقرار است. در جامدات کووالانسی مانند SiC، اتم‌ها مکان‌هایی را در ساختار بلور اشغال می‌کنند و توسط شبکه‌ی پیوندهای قوی بین اتمی کووالانسی به یکدیگر می‌پیوندند. این‌گونه مواد سخت هستند و نقطه‌ی ذوب بالایی دارند زیرا تعداد زیادی از پیوندهای کووالانسی باید شکسته شوند تا ساختار بلور متلاشی شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. الماس، SiC، گرافن و کوارتز جامد کووالانسی و N_2 ، Br_2 ، C_6H_{14} و C_6H_5OH ترکیبات

مولکولی هستند.

$$\frac{4}{4} = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فقط مورد ب نادرست است.

(ب) الماس رسانای جریان برق نیست.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

زیرا، ضخامت آن به اندازه‌ی یک اتم کربن است و مقاومت کششی آن ۱۰۰ برابر فولاد است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. موارد الف و ج درست است. بررسی گزینه‌های نادرست:

- (ب) در گرافیت مولکول‌های صفحه‌ای غول‌آسا با نیروی جاذبه‌ی بین‌مولکولی ضعیف به یکدیگر اتصال دارند.
- (د) از گرافیت به عنوان مغز مداد و نیز تهیه‌ی الکترود استفاده می‌شود و از الماس در تهیه‌ی جواهر یا ابزار تراشکاری استفاده می‌شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اکسیدهای نافلزی گروه چهاردهم (CO_2) مولکولی گازی و اکسید شبه‌فلزی گروه چهاردهم، جامد کووالانسی (SiO_2) است. این دو ماده از نظر ساختار با هم تفاوت زیادی دارند. اولی ماده مولکولی و دومی جامد کووالانسی است.

۱) نادرست است؛ زیرا فرمول شیمیایی هر ترکیب یونی ساده‌ترین نسبت کاتیون و آنیون‌های سازنده آن را نشان می‌دهد.

۲) درست است. وانادیم اعداد اکسایش ۲ تا ۵ دارد و مس عدد اکسایش ۱ و ۲ دارد.

۳) نادرست است؛ زیرا نیتینول آلیاژی از تیتانیم و نیکل است.

۴) نادرست است؛ زیرا برخی رفتارهای فیزیکی فلزات را می‌توان با مدل دریای الکترون توجیه کرد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا مجموع درصد جرمی جامدهای یونی ($MgO, Na_2O, Al_2O_3, Fe_2O_3$) از مجموع درصد جرمی مواد دیگر (Au, H_2O, SiO_2) کمتر است.

$$\frac{50}{100} \times 13/32 = 6/66g \quad \text{بررسی درستی گزینه ۱:}$$

$$100 - 6/66 = 93/34g \quad \text{جرم نمونه جدید}$$

$$\%SiO_2 = \frac{46/2}{93/34} \times 100 \approx 49/49/496$$

$$49/496 - 46/2 = 3/296 \approx 3/3\%$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$14/1g Cu(NO_3)_2 \times \frac{1 \text{ mol } Cu(NO_3)_2}{188g Cu(NO_3)_2} \times \frac{8 \text{ mol } HNO_3}{3 \text{ mol } Cu(NO_3)_2}$$

$$\times \frac{100}{80} \times \frac{1 \text{ L محلول}}{2 \text{ mol } HNO_3} \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 \text{ L محلول}} = 125 \text{ mL}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. موارد پ و ت نادرست‌اند. بررسی عبارت‌های نادرست:

پ) طلا با گازهای موجود در هوا واکنش نمی‌دهد.

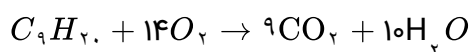
ت) از بازگردانی ۷ قوطی فولادی به قدری انرژی ذخیره می‌شود که می‌توان یک لامپ ۶۰ واتی را حدود ۲۵ ساعت روشن نگه داشت.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ابتدا شمار اتم‌های کربن را در آلکان (C_nH_{2n+2}) تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\text{شمار اتم های کربن}}{\text{شمار اتم های هیدروژن}} = 0/45 \Rightarrow \frac{n}{2n+2} = 0/45 \Rightarrow n = 9$$

واکنش سوختن کامل C_9H_{20} به صورت زیر است:



$$76/8g C_9H_{20} \times \frac{1 \text{ mol } C_9H_{20}}{128g C_9H_{20}} \times \frac{75}{100} \times \frac{9 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } C_9H_{20}} \times \frac{22/4 L CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} = 90/72 L CO_2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا داریم:

$$?gCu = 500gFe \times \frac{1 \text{ mol } Fe}{56gFe} \times \frac{1 \text{ mol } Cu}{1 \text{ mol } Fe} \times \frac{64gCu}{1 \text{ mol } Cu} \times \frac{75}{100} \approx 428/5gCu$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. رنگ سبز زرد و رنگ زیبای فیروزه نشانی از وجود برخی ترکیب‌های فلزهای واسطه در آنهاست. بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) درست. زیرا آهن واکنش‌پذیری کمتری نسبت به فلزهایی مانند سدیم، پتاسیم، منیزیم و ... دارد.

(۲) درست. از ۱۸ عنصر موجود در دوره‌ی چهارم جدول دوره‌ای هشت عنصر (${}_{29}\text{Cu}$ الی ${}_{36}\text{Kr}$) دارای سه لایه‌ی الکترونی پر شده‌اند.

(۳) درست. ${}_{24}\text{Cr}$ دو نوع کاتیون Cr^{2+} و Cr^{3+} تشکیل می‌دهد. ${}_{24}\text{Cr}^{2+} : [\text{Ar}] 3d^4$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. C به ۴ کربن و CH_3 به یک کربن و CH_2 به دو کربن دیگر متصل است.

