

۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم هر ماتریس اسکالر از جمله ماتریس همانی (I) با هر ماتریس هم‌مرتبه خود، تعویض پذیر است. حال ماتریس‌های A^T و A^R ، B^T و B^R را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \\ A^R &= \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -14 \\ -14 & 13 \end{bmatrix} \\ B^T &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ B^R &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

بنابراین ماتریس B^T با هر ماتریس هم‌مرتبه خود از جمله A تعویض پذیر است، یعنی رابطه $AB^T = B^T A$ برقرار است. نادرستی بقیه روابط را خودتان بررسی کنید.

۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس A^T را پیدا می‌کنیم.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین:

$$A^{14 \times 2} = (A^T)^{2 \times 1} = I^{2 \times 1} = I$$

$$A^{14 \times 1} = (A^T)^{1 \times \infty} \times A = I^{1 \times \infty} \times A = I \times A = A$$

$$A^{14 \times 2} - A^{14 \times 1} = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس خواسته شده برابر ۳ است.

۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ \frac{1}{k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -k \\ \frac{1}{k} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -k \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^R = A \times A^T = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ \frac{1}{k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -k \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{99} = (A^R)^{99} = (-I)^{99} = -I^{99} = -I$$

$$A^{100} = A^{99} \times A^T = (-I) \times A^T = -A^T$$

$$\begin{aligned} A^{99} + A^{100} &= -I - A^T = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -k \\ \frac{1}{k} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k \\ -\frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & k \\ -\frac{1}{k} & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & -k \\ \frac{1}{k} & 1 \end{bmatrix} = -A \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از رابطه $A^2 = A$ نتیجه می‌شود $A^n = A$ ، بنابراین داریم:

$$B + A^2 = B + A = I \Rightarrow B = I - A \Rightarrow B^2 = (I - A)^2 = I - 2A + A = I - A = B$$

پس برای ماتریس B نیز رابطه $B^n = B$ برقرار است:

$$A^{200} + B^{100} = A + B = A + (I - A) = I$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 5 & -2 \\ -b & a+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+10+2b & b-4-2a-2 \\ -a+15-4b & -b-6+4a+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+2b+10 & b-2a-6 \\ -a-4b+15 & 4a-b-2 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس AB، ماتریسی قطری است، پس درایه‌های خارج قطر اصلی آن برابر صفر هستند. داریم:

$$\begin{cases} b-2a-6=0 \\ -a-4b+15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a+b=6 \\ a+4b=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \end{cases}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 18 \\ 7 & 4 & -18 \\ -4 & -8 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow BA \text{ مجموع درایه های } = 12$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^n = A, & n \text{ فرد} \\ A^n = I, & n \text{ زوج} \end{cases} \Rightarrow A^{1401} = A, A^{1400} = I$$

$$\Rightarrow A^{1401} + A^{1400} = A + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -x & -1 \\ -1 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -1 \\ x \end{bmatrix} = 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow [x-3 \quad 2x+3 \quad x+3] \begin{bmatrix} x \\ -1 \\ x \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x(x-3) - (2x+3) + x(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 2x - 3 + x^2 + 3x = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(2)(-3) = 28 > 0 \Rightarrow \text{معادله دو جواب حقیقی متمایز دارد.}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(AC)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = AC \Rightarrow (AC)^T = AC$$

$$\Rightarrow (AC)^T = (AC)^T (AC)^T = (AC)(AC) = (AC)^T = AC$$

$$(AC)^{\Delta} = (AC)(AC)^T = (AC)(AC) = (AC)^T = (AC)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 \times 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^T = B \times B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4(-2) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (AC)^{\Delta} \times B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال دو ماتریس A و B مساوی اند. پس:

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} x - y & 9 \\ 2 & z - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x + y \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \\ z - 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \\ z = 6 \end{cases}$$

بنابراین ماتریس $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ برابر $\begin{bmatrix} x - 1 & 0 & z - x \\ 3 - y & y + 2 & z - 2y \\ 2y - x & 0 & z - 1 \end{bmatrix}$ است و این یک ماتریس اسکالر است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰

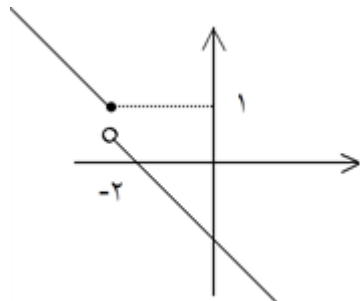
$$A^T = \begin{bmatrix} -8\sqrt{3} & 8 \\ -8 & -8\sqrt{3} \end{bmatrix} = -8 \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = 64 \begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = -2^T \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = -2^{10} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{12} = 2^{20} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس A^{12} ماتریس اسکالر است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۱



$$m \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} (5m - mx) = 5m + 2m \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{1}{7}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$(3x-2)^3 + \sqrt[3]{3x} = x^3 + \sqrt[3]{x+2}$$

$$f(3x-2) = f(x) \quad \text{با فرض } f(x) = x^3 + \sqrt[3]{x+2} \text{ معادله به صورت مقابل است:}$$

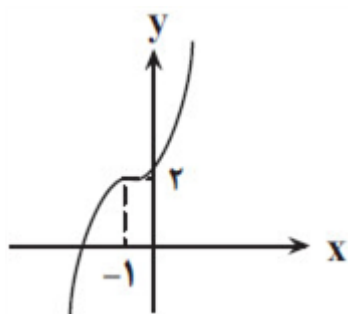
چون توابع $y = x^3$ و $y = \sqrt[3]{x+2}$ اکیداً صعودی اند، تابع f هم که مجموع آن هاست، اکیداً صعودی است، بنابراین تابع f یک به

$$\xrightarrow{f(3x-2)=f(x)} 3x-2 = x \Rightarrow x = 1$$

یک است. در نتیجه داریم:

بنابراین معادله فقط یک جواب دارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با انتقال نمودار $y = x^3$ ، نمودار $g(x) = (x+1)^3 + 2$ را رسم می کنیم:



$$y = x^3 \xrightarrow[\text{دو واحد به بالا}]{\text{یک واحد به چپ}} g(x) = (x+1)^3 + 2$$

با توجه به شکل، نمودار g از ناحیه چهارم نمی گذرد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y = x^3$ وارون خود را در $\{ -1, 0, 1 \}$ قطع می کند. اما با توجه به ضابطه تابع

f ، $x = 1$ مدنظر است؛ زیرا $x = -1$ در دامنه تابع قرار ندارد و همچنین تابع در $x = 0$ مشتق ندارد.

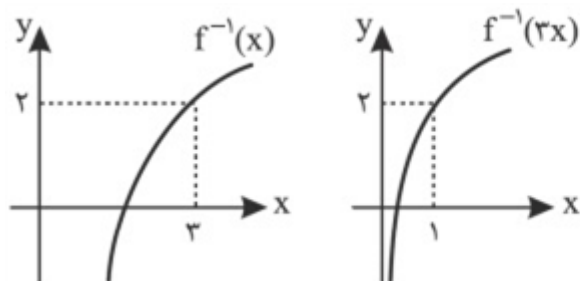
$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) = f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + \sqrt{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \Rightarrow f'(1) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

یعنی خط مماس، خطی است که با شیب $\frac{5}{2}$ از نقطه $(1, 1)$ می گذرد:

$$\Rightarrow \text{خط مماس: } y = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$$

عرض از مبدأ این خط برابر $-\frac{3}{2}$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. f اکیداً صعودی است پس f^{-1} نیز اکیداً صعودی و نمودار فرضی آن به صورت زیر است.



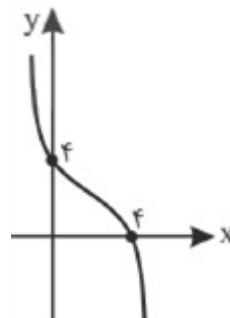
	1	5
$x-5$	-	-
$2-f^{-1}(3x)$	+	-
ضرب	-	+

بازه $[1, 5]$ برابر دامنه‌ی تابع است که شامل پنج عدد صحیح است.

$$y = a(bx + 2)^3 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 4 \Rightarrow a \times 8 = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ f(-4) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(-4b + 2)^3 = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{x}{4} \right)^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{8-x}{4} \right)^3 = \frac{-1}{16} (x-4)^3$$

یعنی تابع g نزولی اکید است و نمودار آن به صورت مقابل است.
نمودار g یک تابع نزولی اکید است و از ناحیه‌ی سوم عبور نمی‌کند.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دامنه‌ی $f(x-1)$ اگر بازه‌ی $(3, 5)$ باشد، دامنه‌ی $f(x)$ بازه‌ی $(2, 4)$ خواهد بود. پس دامنه‌ی $f\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ با حل $4 < 1 - \frac{x}{2} < 2$ به صورت $(-6, -2)$ خواهد شد.

اگر برد $3 - f(x-1) < 2$ بازه‌ی $(-1, 3]$ باشد برد f چنین محاسبه می‌شود:

$$-1 < 2f - 3 \leq 3 \Rightarrow 2 < 2f \leq 6 \Rightarrow 1 < f \leq 3$$

پس برد تابع $3 - f\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ به صورت زیر است:

$$1 < f \leq 3 \xrightarrow{\times(-2)} -9 \leq -2f < -6 \Rightarrow -12 \leq -2f - 3 < -6$$

اگر دقت کنید دامنه و برد تابع حاصل هیچ عضو مشترک ندارند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به ازای $x = 2$ داریم:

$$0 \times p(2) = 8 - 16 + a \Rightarrow a = 8$$

$$p(x) = \frac{x^3 - 8x + 8}{x - 2} = x^2 + 2x - 4$$

حال $p(x)$ را به دست می‌آوریم:

بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر $x - 2$ که برابر $p(2)$ می‌باشد برابر است با:

$$p(2) = 4 + 4 - 4 = 4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$a \leq -3x \leq b \Rightarrow -\frac{a}{3} \geq x \geq -\frac{b}{3}$$

$$D : \left[-\frac{b}{3}, -\frac{a}{3} \right]$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$

شرط این که نمودار تابع درجه ۲، f بالای محور x ها باشد، این است که $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت باشد.

$$a-1 > 0 \Rightarrow a > 1$$

$$\Delta' = (\sqrt{2})^2 - a(a-1) = 2 - a^2 + a \xrightarrow{\Delta' < 0} 2 - a^2 + a < 0$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 > 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) > 0 \Rightarrow a < -1 \text{ یا } a > 2$$

با توجه به شرط $a > 1$ پس $a > 2$ صحیح است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به ازای $n = 3, 4, 7$ عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج می شود پس $A = \{3, 4, 7\}$

$$n = 3 \Rightarrow 2^3 - 3 = 5 \in p \text{ مثال نقض نیست}$$

$$n = 4 \Rightarrow 2^4 - 3 = 13 \in p \text{ مثال نقض نیست}$$

$$n = 7 \Rightarrow 2^7 - 3 = 125 \notin p \text{ مثال نقض است}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow b^2 - a^2 = ab \Rightarrow a^2 + ab - b^2 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{برحسب } a]{\text{درجه دوم}} a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} \Rightarrow a = \frac{-b \pm b\sqrt{5}}{2} \notin N$$

چنین a و b ای وجود ندارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\overline{4a^3b} \equiv 2 + a + 3 + b \equiv 4 \Rightarrow a + b + 5 \equiv 4 \Rightarrow a + b \equiv -1 \equiv 8 \Rightarrow a + b = 8 \text{ یا } 17$$

$$4a^3b1 \equiv 1 - b + 3 - a + 4 \equiv 8 - (a+b)$$

$$\text{حالت اول: } a + b = 8 \Rightarrow \overline{4a^3b1} \equiv 8 - 8 \equiv 0$$

$$\text{حالت دوم: } a + b = 17 \Rightarrow \overline{4a^3b1} \equiv 8 - 17 \equiv -9 \equiv 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طبق قضیه تقسیم و با توجه به فرض مسئله داریم:

$$r + q = 15 \Rightarrow q = 15 - r$$

$$a = 11q + r = 11(15 - r) + r, 0 \leq r < 11 \text{ (۱۱ مقدار برای } r \text{)}$$

$$\Rightarrow a = 165 - 10r \Rightarrow a - 5 = 160 - 10r \equiv 0 \Rightarrow 10r \equiv 160 \xrightarrow[\div 10]{(10, 40)=10} r \equiv 16$$

$$r \equiv 16 \Rightarrow r \equiv 0 \Rightarrow r \in \{0, 4, 8\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{11}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عکس قضیه ی شرطی $a^2 > 1 \Rightarrow a > 1$ برقرار نیست. به عنوان مثال اگر $a = -2$ باشد، آن گاه

$a^2 > 1$ و $a < 1$ است.

$$\xrightarrow{abc>0} b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 \geq 2a^2bc + 2b^2ac + 2c^2ab$$

$$(b^2c^2 + a^2c^2 - 2c^2ab) + (b^2c^2 + a^2b^2 - 2b^2ac) + (a^2c^2 + a^2b^2 - 2a^2bc) \geq 0$$

$$(bc - ac)^2 + (bc - ab)^2 + (ac - ab)^2 \geq 0 \text{ همیشه درست}$$

$$n = 7 \Rightarrow 3^7 - 1 = 2186 \neq 4k$$

$$n = 3 \Rightarrow 3^3 - 1 = 26 \neq 4k$$

$$n = 6 \Rightarrow 3^6 - 1 = 728 = 4 \times 182$$

$$n = 5 \Rightarrow 3^5 - 1 = 242 \neq 4k$$

می‌دانیم $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$ گنگ است زیرا اگر گویا باشد با توجه به تساوی‌های $\sqrt{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{2}$ و

$$\sqrt{\beta} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{2}$$

می‌دانیم ضرب عدد گویای مخالف صفر در عدد گنگ، گنگ است، پس $\alpha - \beta$ گنگ است چون:

$$\underbrace{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}_{\text{گنگ}} \underbrace{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}_{\text{گویا} \neq 0} = \alpha - \beta$$

می‌دانیم جمع گویا و گنگ، گنگ است، پس $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ هم است چون:

$$\underbrace{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}_{\text{گویا}} + \underbrace{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}_{\text{گنگ}} = 2\sqrt{\alpha}$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) = 2\sqrt{\beta}$$

و در آخر اگر $\alpha = 17 - 12\sqrt{2}$ و $\beta = 17 + 12\sqrt{2}$ داریم: $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 6$ ، اما $\alpha + \beta = 34$ است که نشان می‌دهد گزینه (۳) ممکن است درست نباشد.

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \text{ است و اگر بخواهد زوج باشد باید } \frac{n(n+1)}{2} \text{ زوج باشد.}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2k \Rightarrow n(n+1) = 4k \quad k \in \mathbb{Z}$$

چون n و $n+1$ عامل مشترک ندارند پس باید $n = 4k'$ یا $n+1 = 4k''$ باشد، پس کافی است $n = 4k' - 1$ یا $n = 4k'' - 1$ باشد.

$$1 \leq 4k' \leq 99 \Rightarrow k' = 1, 2, \dots, 24 \text{ یا } 1 \leq 4k'' - 1 \leq 99 \Rightarrow k'' = 1, 2, \dots, 25$$

پس برای n ، ۴۹ مقدار به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{5}{14} \\ a_6 + a_{12} = \frac{3}{7}, \frac{a_6 + a_{12}}{2} = a_{\frac{6+12}{2}} = a_9 = \frac{\frac{3}{7}}{2} = \frac{3}{14} \end{cases}$$

$$d = \frac{1}{14}, a_{11} = a_1 + 10 \times \frac{1}{14} = \frac{5}{14} \Rightarrow a_1 = -\frac{5}{14}$$

قدرنسبت جمله اول

تعداد جملات منفی دنباله را می‌یابیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow -\frac{5}{14} + \frac{1}{14}(n-1) < 0 \Rightarrow \frac{n-1}{14} < \frac{5}{14} \Rightarrow n-1 < 5$$

$\Rightarrow n < 6$ دنباله پنج جمله منفی دارد

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم برای درجه n واسطه بین دو جمله دنباله هندسی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

پس داریم:

$$(\sqrt[n]{x})^{n+1} = \frac{x^{18}}{x^{12}} \Rightarrow (\sqrt[n]{x})^{n+1} = x^6 \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان ۳}} x^{n+1} = x^{18}$$

$\Rightarrow n+1 = 18 \Rightarrow n = 17$

$$\frac{\text{جمع ردیف زوج}}{\text{جمع ردیف فرد}} = \frac{a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}}{a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9} = r = \sqrt{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

پس قدرنسبت دنباله $\sqrt{2}$ است و داریم:

$$a_9 = a_1 r^8 = a_1 \sqrt{2}^8 = 16 \Rightarrow a_1 = 1$$

پس جملات اول تا نهم، $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, 8\sqrt{2}, 16$ هستند. جمع اعداد گنگ بین آنها $(1+2+4+8)\sqrt{2}$ یعنی $15\sqrt{2}$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۴

$$a_3 - 2d + a_3 - d + a_3 + a_3 + d + a_3 + 2d = 10000 \Rightarrow a_3 = 2000$$

$$3a_3 + 3d = 3(2a_3 - 3d) \Rightarrow d = 500$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{آرای نفر اول: } 30000 \\ \text{آرای نفر آخر: } 10000 \end{array} \right\} \rightarrow a_5 - a_1 = 20000$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۵

$$a_5 - a_1 = 36 \Rightarrow (a_1 + 4d) - a_1 = 36 \Rightarrow 4d = 36 \Rightarrow d = 9$$

$$a_9 = 74 \Rightarrow a_1 + 8d = 74 \Rightarrow a_1 + 8 \times 9 = 74 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 2 + 6 \times 9 = 2 + 54 = 56$$

$$a_3 + a_7 + a_{14} = 75$$

$$a_1 + 2d + a_1 + 6d + a_1 + 13d = 75$$

$$3a_1 + 21d = 75$$

$$3(a_1 + 7d) = 75$$

$$a_1 + 7d = 25 \Rightarrow a_8 = 25$$

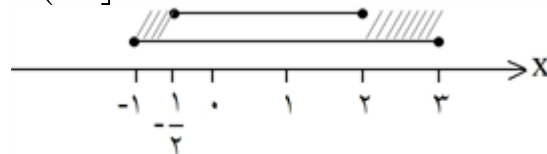
$$a_3 = 9 \Rightarrow a_1 r^2 = 9$$

$$a_6 = \frac{243}{8} \Rightarrow a_1 r^5 = \frac{243}{8} \Rightarrow \frac{a_6}{a_3} = \frac{a_1 r^5}{a_1 r^2} = \frac{\frac{243}{8}}{9} \Rightarrow r^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \left[\frac{1-1}{2}, 1 \right] = [0, 1] \\ A_2 &= \left[\frac{1-2}{2}, 2 \right] = \left[-\frac{1}{2}, 2 \right] \\ A_3 &= \left[\frac{1-3}{2}, 3 \right] = [-1, 3] \\ A_4 &= \left[\frac{1-4}{2}, 4 \right] = \left[-\frac{3}{2}, 4 \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_1 \cup A_3 = [-1, 3]$$

$$\Rightarrow A_2 \cap A_4 = \left[-\frac{1}{2}, 2 \right]$$

$$(A_1 \cup A_3) - (A_2 \cap A_4) = [-1, 3] - \left[-\frac{1}{2}, 2 \right] = \left[-1, -\frac{1}{2} \right) \cup (2, 3]$$



شامل اعداد صحیح ۱ و ۳ است.

$$\begin{cases} a + b + c = 28 \\ b^2 = ac \\ 2a = c + b - 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 28 \\ 2a - b - c = -16 \end{cases} \Rightarrow 3a = 12 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b + c = 24$$

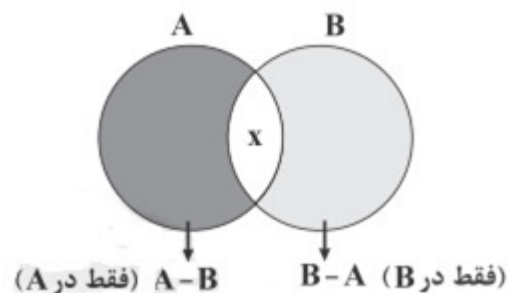
$$\begin{cases} b + c = 24 \\ b^2 = 4c \end{cases} \Rightarrow b^2 - 4b - 96 = 0 \Rightarrow (b - 8)(b + 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 8 \Rightarrow c = 16 \\ b = -12 \Rightarrow c = 36 \end{cases}$$

نه صعودی نه نزولی $q = -3 \Rightarrow 4, -12, 36$ دنباله هندسی

دنباله حسابی $36, 4, -28 \Rightarrow d = -32$

$$|-32 - (-3)| = 29$$

$$\begin{cases} n(A) = 3 \\ n(B) = 6 \\ n(A - B) + n(B - A) = 5 \end{cases}$$



اگر $n(A \cap B) = x$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} n(A - B) + x = 3 \\ n(B - A) + x = 6 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \underbrace{n(A - B) + n(B - A) + 2x}_{= 5} = 9$$

$$\Rightarrow 2x = 9 - 5 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۴۱ $3\text{MW} = 3 \times 10^6 \text{W}$, میکرون $1\mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم حجم فلز برابر حجم الکلی سرریز شده است. چون 16g الکلی از ظرف سرریز شده است، ابتدا با محاسبه حجم الکلی سرریز شده، حجم فلز را پیدا می‌کنیم:

$$V_{\text{فلز}} = V_{\text{الکل سرریز شده}} = \frac{m_{\text{الکل}}}{\rho_{\text{الکل}}} = \frac{16\text{g}}{0.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 20\text{cm}^3$$

اکنون با داشتن جرم و چگالی طلا، حجم آن را می‌یابیم:

$$\rho_{\text{طلا}} = \frac{m_{\text{طلا}}}{V_{\text{طلا}}} \xrightarrow{\rho_{\text{طلا}} = 19000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 19 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} 19 = \frac{16}{V_{\text{طلا}}} \Rightarrow V_{\text{طلا}} = 4\text{cm}^3$$

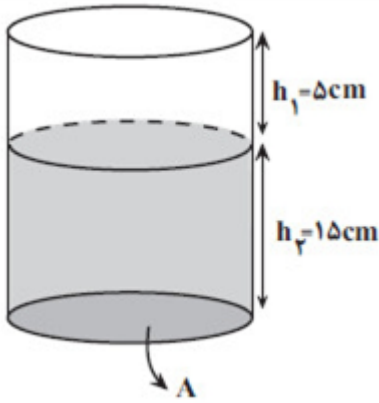
در این قسمت با داشتن حجم طلا و حجم فلز، حجم ناخالصی را پیدا می‌کنیم:

$$V_{\text{ناخالصی}} = V_{\text{فلز}} - V_{\text{طلا}} = 20 - 4 = 16\text{cm}^3$$

$$\text{درصد حجم ناخالصی} = \frac{V_{\text{ناخالصی}}}{V_{\text{فلز}}} \times 100 = \frac{16}{20} \times 100 = 80\%$$

در آخر داریم:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا مساحت قاعده ظرف و حجم فضای خالی آن را می‌یابیم و سپس از مجموع حجم مایع سرریز شده با حجم فضای خالی ظرف، حجم کل آلیاژ را حساب می‌کنیم:



$$r = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm} \quad A = \pi r^2 \xrightarrow{\pi=3} A = 3 \times 10^2 = 300 \text{ cm}^2$$

$$\text{حجم فضای خالی ظرف} = V_1 = Ah_1 = 300 \times 5 = 1500 \text{ cm}^3$$

$$\text{حجم مایع سرریز شده} = V_2 = \frac{m}{\rho} \xrightarrow{\substack{m=450 \text{ g} \\ \rho=1.5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} V_2 = \frac{450}{1.5} = 300 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = \frac{450}{1.5} = 300 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{آلیاژ}} = V_1 + V_2 \Rightarrow V_{\text{آلیاژ}} = 1500 + 300 = 1800 \text{ cm}^3$$

اکنون با توجه به اینکه جرم آلیاژ برابر مجموع جرم دو فلز است، داریم:

$$m_A + m_B = m_{\text{آلیاژ}} \xrightarrow{m=\rho V} \rho_A V_A + \rho_B V_B = m_{\text{آلیاژ}} \quad \begin{matrix} m_{\text{آلیاژ}} = 25/2 \text{ kg} = 25200 \text{ g} \\ \rho_A = 20 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \rho_B = 12 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \end{matrix}$$

$$20V_A + 12V_B = 25200 \quad \xrightarrow{V_A + V_B = 1800 \Rightarrow V_A = 1800 - V_B}$$

$$20 \times (1800 - V_B) + 12V_B = 25200 \Rightarrow 36000 - 20V_B + 12V_B = 25200 \Rightarrow 10800 = 8V_B \Rightarrow V_B = 1350 \text{ cm}^3$$

در آخر، درصد حجم فلز B برابر است با:

$$\text{درصد حجم فلز B} = \frac{V_B}{V_{\text{آلیاژ}}} \times 100 = \frac{1350}{1800} \times 100 = 75\%$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا حجم ۹۰۰ گرم روغن را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{\text{روغن}} = \frac{m_{\text{روغن}}}{\rho_{\text{روغن}}} \xrightarrow{\substack{m_{\text{روغن}}=900 \text{ g} \\ \rho_{\text{روغن}}=0.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} V_{\text{روغن}} = \frac{900}{0.8} = 1125 \text{ cm}^3$$

حال حجم فضای خالی ظرف را محاسبه کرده و می‌دانیم حجم ظاهری قطعه فلز، برابر با حجم روغن جابه‌جا شده است (حجم خالی ظرف + حجم روغن سرریز شده):

$$V_{\text{خالی}} = \pi r^2 h \xrightarrow{\substack{r=10 \text{ cm} \\ h=5 \text{ cm}}} V_{\text{خالی}} = 3 \times 10^2 \times 5 = 1500 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{فلز}} = V_{\text{خالی}} + V_{\text{روغن}} = 1500 + 1125 = 2625 \text{ cm}^3$$

حال حجم واقعی قطعه فلز را محاسبه کرده و سپس حجم حفره درون آن را به دست می‌آوریم:

$$V_{\text{واقعی فلز}} = \frac{m_{\text{فلز}}}{\rho_{\text{فلز}}} \xrightarrow{\substack{m_{\text{فلز}}=1620 \text{ g} \\ \rho_{\text{فلز}}=2.7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} V_{\text{واقعی فلز}} = \frac{1620}{2.7} = 600 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow V_{\text{حفره}} = V_{\text{ظاهری فلز}} - V_{\text{واقعی فلز}} = 2625 - 600 = 2025 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} \text{آهنگ جریان شارۀ ورودی} &= 3 \frac{\text{lit}}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{1000 \text{ cm}^3}{1 \text{ lit}} = 50 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \\ \text{آهنگ جریان شارۀ خروجی} &= Av = 20 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \\ \text{آهنگ پر شدن ظرف} &= 50 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} - 20 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} = 30 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} = 1/8 \frac{\text{lit}}{\text{min}} \\ 1/8 \frac{\text{lit}}{\text{min}} &= \frac{18 \text{ lit}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 10 \text{ min} \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا چگالی دو ماده A و B را محاسبه می‌کنیم: ۴۶

$$\begin{aligned} \rho_A &= \frac{m_A}{V_A} = \frac{128}{32} = 4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\ \rho_B &= \frac{m_B}{V_B} = \frac{128}{64} = 2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\ V_A \text{ (حجم ۱۰۰ گرم از ماده A)} &= \frac{m_A}{\rho_A} = \frac{100}{4} = 25 \text{ cm}^3 \\ V_B \text{ (حجم ۳۰ گرم از ماده B)} &= \frac{m_B}{\rho_B} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}^3 \\ V_A - V_B &= (25 - 15) \text{ cm}^3 = 10 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای هر گزینه یکاها را یکسان نموده و با هم مقایسه می‌کنیم. گزینه ۱ درست است: ۴۷

$$1/1 \times 10^{-3} \text{ m} > 120 \mu\text{m} \xrightarrow{1 \text{ m} = 10^6 \mu\text{m}} 1/1 \times 10^{-3} \times 10^6 \mu\text{m} > 120 \mu\text{m} \\ \Rightarrow 1100 \mu\text{m} > 120 \mu\text{m}$$

$$1/005 \text{ cm} < 0/15 \times 10^{-4} \text{ km} \xrightarrow{1 \text{ km} = 10^5 \text{ m} = 10^3 \text{ cm}} \text{گزینه ۲ درست است:} \\ 1/005 \text{ cm} < 0/15 \times 10^{-4} \times 10^3 \text{ cm} \Rightarrow 1/005 \text{ cm} < 1/5 \text{ cm}$$

گزینه ۳ درست است:

$$280 \text{ s} < 5 \text{ min} \xrightarrow{1 \text{ min} = 60 \text{ s}} 280 \text{ s} < 5 \times 60 \text{ s} \Rightarrow 280 \text{ s} < 300 \text{ s}$$

$$36 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 36 \times \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} > 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{گزینه ۴ نادرست است:}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا آهنگ افزایش مساحت را محاسبه می‌کنیم: ۴۸

$$\text{آهنگ افزایش مساحت} = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{10^4 (\text{یارد})^2}{10 \text{ s}} = 10^3 \frac{(\text{یارد})^2}{\text{s}}$$

حال به کمک تبدیل زنجیره‌ای عدد به دست آمده را بر حسب یکای موردنظر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 10^3 \frac{(\text{یارد})^2}{\text{s}} &= ? \frac{(\text{کیلواینچ})^2}{\text{h}} \Rightarrow 10^3 \frac{(\text{یارد})^2}{\text{s}} \times \left(\frac{3 \text{ فوت}}{1 \text{ یارد}} \right)^2 \times \left(\frac{12 \text{ اینچ}}{1 \text{ فوت}} \right) \times \left(\frac{1 \text{ کیلواینچ}}{10^3 \text{ اینچ}} \right) \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \\ &= 4665/6 \frac{(\text{کیلواینچ})^2}{\text{h}} \end{aligned}$$

توجه: برای محاسبه تبدیل یکاهای توان‌دار مثل km^2 به m^2 ، می‌توان ابتدا ضریب تبدیل بین یکاهای بدون توان را نوشت و بعد کل عبارت را به توان موردنظر رساند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو کمیت فیزیکی را زمانی می‌توان با یکدیگر جمع کرد که از یک جنس باشند. در این حالت حاصل جمع دو کمیت نیز از همان جنس خواهد شد. پس می‌توان نوشت:

$$[A] = W = \frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{s} = \frac{\text{kg} \frac{m}{s^2} m}{s} = \frac{\text{kg} \cdot m^2}{s^3} \quad (۱)$$

$$[A] = \frac{[B][C]^2}{[D]^2} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{۱, ۲} [B] = \text{kg}, [C] = m, [D] = s$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اول حجم فلز به کار رفته:

$$V_{\text{یک گلوله}} = \frac{m}{\rho} = \frac{5g}{2/5 \frac{g}{\text{cm}^3}} = 2 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{کل}} = 250 \times 2 = 500 \text{ cm}^3$$

$$V = A \times h$$

از طرفی حجم استوانه:

طول یا ارتفاع سطح مقطع

$$h = \frac{V}{A} = \frac{500 \text{ cm}^3}{20 \text{ cm}^2} = 25 \text{ cm}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا چگالی کوتوله‌ی سفید را برحسب واحد SI می‌یابیم:

$$\rho = 100 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} = 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \times \frac{1 \text{ cm}^3}{10^{-6} \text{ m}^3} = 10^8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

حال با توجه به رابطه‌ی چگالی داریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} \xrightarrow{\rho = 10^8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} V = \frac{6 \times 10^{24} \text{ kg}}{10^8} = 6 \times 10^{16} \text{ m}^3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تنها مورد پ صحیح است. بررسی موارد نادرست:

الف) می‌توان از تغییر وزن توپ به خاطر کم بودن تغییر ارتفاع چشم‌پوشی کرد.

ب) جهت حرکت توپ تعیین‌کننده‌ی شتاب حرکت و جهت نیروهای وارد بر آن است.

ت) برای حرکت توپ، عامل وزن اثر مهم و تعیین‌کننده است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در حال اول داریم:

$$m_{\text{محلول}} = m_A + m_B \xrightarrow{m=\rho V} m_{\text{محلول}} = \rho_A V_A + \rho_B V_B$$

$$= \rho_A \times \left(\frac{6}{10} V \right) + \rho_B \times \left(\frac{4}{10} V \right) \quad (۱)$$

در حالت دوم داریم:

$$m' = \rho_A V'_A + \rho_B V'_B = \rho_A \times \left(\frac{4}{10} V \right) + \rho_B \times \left(\frac{6}{10} V \right) \quad (۲)$$

با توجه به این که جرم کل محلول ۲۰ درصد کاهش یافته داریم:

$$m' = \frac{80}{100} m \xrightarrow{۱, ۲} (0/4 \rho_A + 0/6 \rho_B) V = \frac{80}{100} (0/6 \rho_A + 0/4 \rho_B) V$$

$$\Rightarrow 0/4 \rho_A + 0/6 \rho_B = 0/48 \rho_A + 0/32 \rho_B \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{0/28}{0/08} = \frac{7}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از رابطه‌ی چگالی مخلوط استفاده می‌کنیم $m_A = \frac{m}{3}$ و $m_B = \frac{2}{3} m$

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_A + m_B}{r_A + r_B} = \frac{m}{\frac{m_A}{\rho_A} + \frac{m_B}{\rho_B}} = \frac{m}{\frac{m}{3 \times 4} + \frac{2m}{3 \times 12}} = \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{18}} = \frac{36}{5} = 7.2 \frac{g}{cm^3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در اثر ذوب یخ، تغییر نمی‌کند اما حجم کاهش می‌یابد:

$$\Delta V = V_{\text{یخ}} - V_{\text{آب}} \Rightarrow \Delta V = m \left(\frac{1}{\rho_{\text{یخ}}} - \frac{1}{\rho_{\text{آب}}} \right) \Rightarrow 60 = m \left(\frac{1}{0.9} - \frac{1}{1} \right) \Rightarrow m = \frac{60}{\frac{1}{9}} = 540 g$$

$$V_{\text{یخ}} = \frac{m}{\rho} \Rightarrow V_{\text{یخ}} = \frac{540}{0.9} = 600 \text{ cm}^3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x_A = v_A t + x_{A_0}$$

$$v_A = v_{\text{av}(A)} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{0 - 10}{2/5} = -4 \frac{m}{s}$$

$$x_A = -4t + 10$$

$$x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{B_0} t + x_{B_0}$$

در بازه‌ی صفر تا $1/5 s$ که سرعت ذره B صفر است داریم:

$$\Delta x = \left(\frac{v_{B_0} + 0}{2} \right) \times 1/5 \Rightarrow 4/5 = \frac{v_{B_0}}{2} \times 1/5 \Rightarrow v_{B_0} = 8 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_{B_0} \Rightarrow 0 = 1/5 a + 8 \Rightarrow a = -40 \frac{m}{s^2}$$

$$x_B = -20t^2 + 8t + 2$$

$$x_A = x_B \Rightarrow -4t + 10 = -20t^2 + 8t + 2 \Rightarrow 20t^2 - 12t + 8 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \\ t_2 = 4s \end{cases}$$

$$\Delta x_A = v_A(\Delta t) \Rightarrow \Delta x_A = -4 \times 3 = -12m \Rightarrow \Delta x_B = \Delta x_A \Rightarrow \Delta x_B = -12m$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. گام اول: با توجه به اینکه دو متحرک در مدت 10 s از فاصله 50 متری به هم رسیده‌اند، می‌توان نوشت:

$$\Delta x = v_{\text{نسبی}} \Delta t = 50 \Rightarrow v_{\text{نسبی}} \times 10$$

$$\Rightarrow v_{\text{نسبی}} = 5 \frac{m}{s}$$

چون متحرک‌ها به هم نزدیک شده‌اند:

$$\Rightarrow v_A + v_B = 5 \frac{m}{s}$$

گام دوم: با توجه به اینکه $v_A = 1/5 |v_B|$ است، تندی هر یک از متحرک‌ها را حساب می‌کنیم:

$$v_A = \frac{1}{5} |v_B| \Rightarrow \frac{1}{5} v_B + v_B = 5 \Rightarrow v_B = 5 \frac{m}{s} \Rightarrow v_A = \frac{1}{5} \times 5 = 1 \frac{m}{s}$$

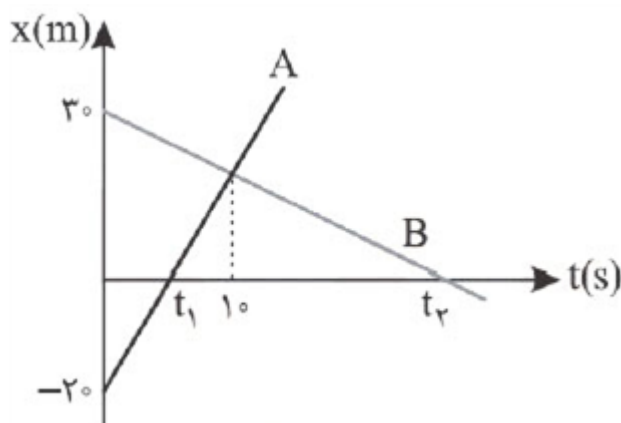
گام سوم: اکنون معادله حرکت آنها را می‌نویسیم و لحظه‌های t_1 و t_2 را حساب می‌کنیم:

$$x_A = t - 20 \Rightarrow t_1 - 20 = 0 \Rightarrow t_1 = 20\text{ s}$$

$$x_B = -t + 30 \Rightarrow -t_2 + 30 = 0 \Rightarrow t_2 = 30\text{ s}$$

$$\Delta t = 30 - 20 = 10\text{ s}$$

گام چهارم: فاصله زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ را حساب می‌کنیم:



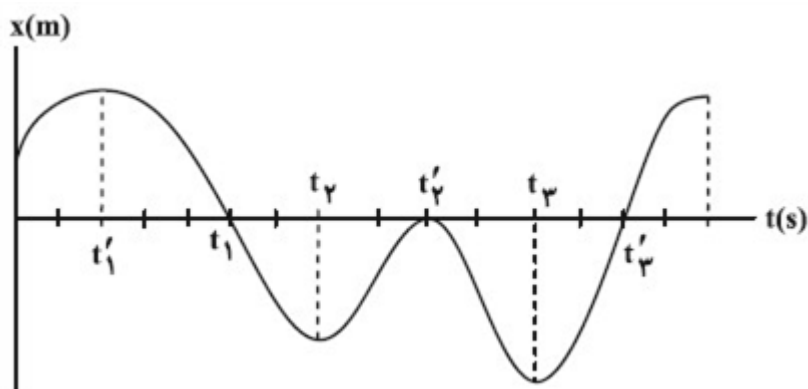
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. جهت بردار مکان زمانی تغییر می‌کند که نمودار محور زمان را قطع کند و ادامه نمودار در سمت دیگر محور

زمان ادامه پیدا کند. پس در دو نقطه t_1 و t_2 جهت بردار مکان تغییر پیدا کرده است. برای قسمت دوم باید توجه کنیم زمانی

متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند که نمودار به صورت نزولی باشد در این صورت سرعت منفی بوده و متحرک در خلاف

جهت محور X حرکت خواهد کرد. همان‌طور که در شکل پیداست از t_1 تا t_2 و t_2 تا t_3 نمودار نزولی بوده و متحرک در

خلاف جهت محور X حرکت می‌کند.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها:

$$l = 10 + 20 + 20 = 50 \text{ m}$$

الف) نادرست، مسافت را حساب می‌کنیم:

$$S_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{20 + 20 + 6 + 6}{22 - 2} = \frac{52}{20} = 2.6 \frac{m}{s} \quad \text{ب) درست}$$

ج) نادرست، جهت بردار مکان سه بار و در لحظه‌های ۲s، ۱۶s و ۲۲s تغییر می‌کند.

د) درست، متحرک در بازه‌های زمانی ۰ تا ۱۰s و ۱۹s تا ۲۵s در جهت محور حرکت کرده است.

ه) درست، در بازه‌های ۰ تا ۲s و ۱۹s تا ۲۲s یعنی در مجموع ۵s متحرک در مکان‌های منفی و در جهت مثبت حرکت کرده است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ به صورت زیر v_{av} را می‌یابیم:

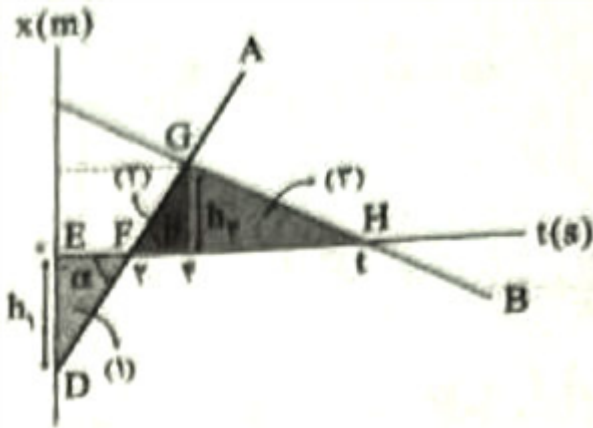
$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = \Delta x \xrightarrow[\Delta x_2 = \frac{1}{6}\Delta x]{\Delta x_1 = \frac{1}{3}\Delta x} \frac{1}{3}\Delta x + \frac{1}{6}\Delta x + \Delta x_3 = \Delta x \Rightarrow \Delta x_3 = \frac{1}{2}\Delta x$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} \xrightarrow[\Delta t = \frac{\Delta x}{v}]{\Delta t = \frac{\Delta x}{v}} v_{av} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x_1}{v_1} + \frac{\Delta x_2}{v_2} + \frac{\Delta x_3}{v_3}}$$

$$\xrightarrow{v_1 = 5 \frac{m}{s}, v_2 = 10 \frac{m}{s}, v_3 = 30 \frac{m}{s}} v_{av} = \frac{\Delta x}{\frac{\frac{1}{3}\Delta x}{5} + \frac{\frac{1}{6}\Delta x}{10} + \frac{\frac{1}{2}\Delta x}{30}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{15} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60}} = \frac{1}{\frac{4+1+1}{60}} \Rightarrow v_{av} = \frac{60}{6} = 10 \frac{m}{s}$$

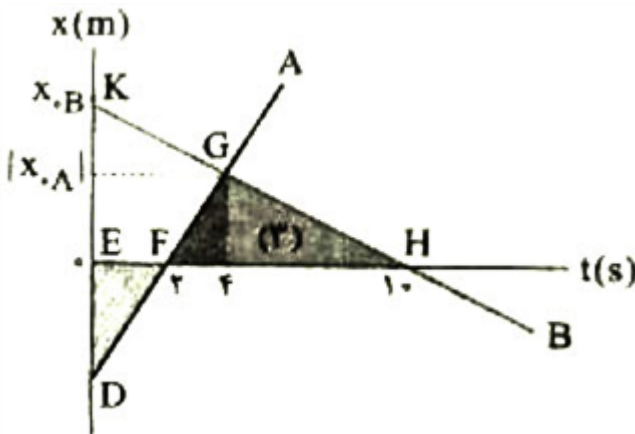
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث‌های ۱ و ۲ همنهشت می‌باشند، در نتیجه برای آنکه مساحت مثلث FGH، ۴ برابر مساحت مثلث DEF باشد، باید مساحت مثلث ۳، ۳ برابر مساحت مثلث ۱ باشد. در نتیجه داریم:



$$\frac{S_2}{S_1} = 3 \Rightarrow \frac{\frac{(t-4) \times h_2}{2}}{\frac{(4-0) \times h_1}{2}} = 3 \xrightarrow{h_1=h_2}$$

$$\frac{t-4}{4} = 3 \Rightarrow t = 16s$$

از طرفی $h_1 = |x_A|$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت:



$$h_2 = h_1 = |x_A|$$

از طرفی با توجه به این که مثلث KEH با مثلث ۳ متشابه است، داریم:

$$\frac{x_B}{|x_A|} = \frac{10}{10-4} \Rightarrow \frac{x_B}{|x_A|} = \frac{10}{6} \Rightarrow x_B = \frac{10}{6}|x_A|$$

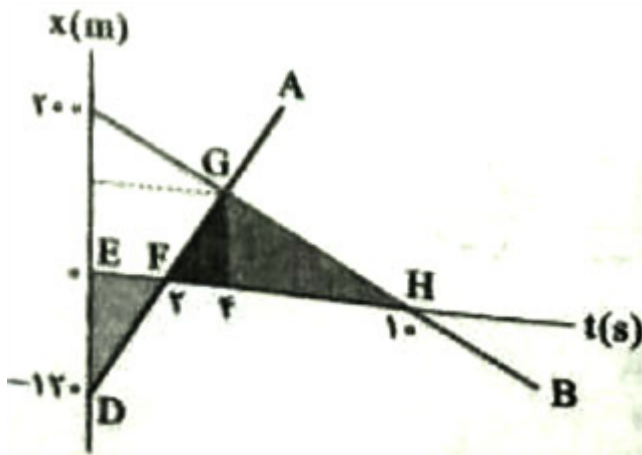
از طرفی فاصله اولیه دو متحرک برابر است با:

$$x_B + |x_A| = \frac{10}{6}|x_A| + |x_A| = \frac{16}{6}|x_A| = 320 \Rightarrow |x_A| = 120m \Rightarrow x_A = -120m$$

$$x_B = \frac{10}{6} \times 120 = 200m$$

مکان اولیه متحرک B نیز برابر است با:

پس معادله مکان - زمان هریک از متحرک‌ها را نوشته و مسافت هریک را به دست آورده و با یکدیگر جمع می‌کنیم:



$$v_A = \frac{0 - (-120)}{2-0} = 60 \frac{m}{s} \Rightarrow x_A = 60t - 120$$

$$v_B = \frac{0 - 200}{10-0} = -20 \frac{m}{s} \Rightarrow x_B = -20t + 200$$

از آن جایی که هر دو متحرک، حرکت یکنواخت دارند، در نتیجه مسافت طی شده برابر اندازه جابه‌جایی می‌باشد، پس می‌توان

$$\Delta x_A = v_A \Delta t \Rightarrow \Delta x_A = 60 \times 15 = 900m \Rightarrow l_A = 900m$$

نوشت:

$$\Delta x_B = v_B \Delta t \Rightarrow \Delta x_B = -20 \times 15 = -300m \Rightarrow l_B = 300m$$

$$l_K = l_A + l_B = 900 + 300 = 1200m$$

بنابراین: $1200m$ و برای به دست آوردن فاصله زمانی عبور دو متحرک از مکان $x = 60m$ داریم:

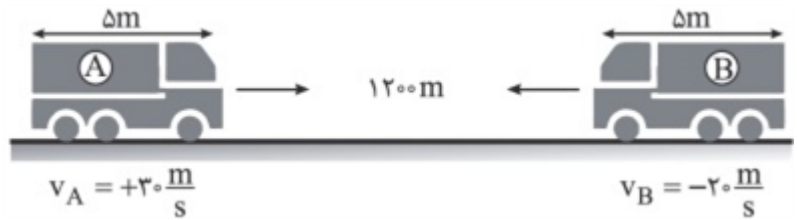
$$\begin{cases} x_A = 60t - 120 \Rightarrow 60 = 60t - 120 \Rightarrow t = 3s \Rightarrow \Delta t = 7 - 3 = 4s \\ x_B = -20t + 200 \Rightarrow 60 = -20t + 200 \Rightarrow t = 7s \end{cases}$$

۶۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. وقتی فاصله دو متحرک برای دومین بار ۲۰۰ متر می شود که مجموع مسافت های طی شده توسط دو اتومبیل مجموع فاصله اولیه و طول دو اتومبیل ۲۰۰ متر شود.

$$d = 1200 + 200 + 10 = 1410m$$

$$1410 = v_1 t + v_2 t \Rightarrow t = \frac{1410}{v_1 + v_2} = \frac{1410}{50} = \frac{141}{5} = 28\frac{2}{5}s$$

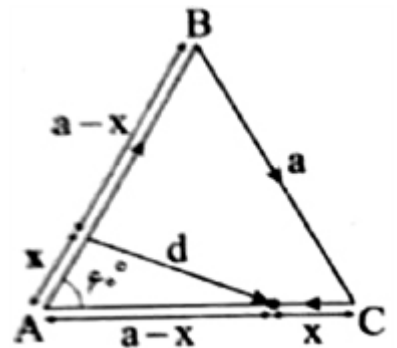


۶۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مسأله را در حالت کلی و با فرض این که متحرک در فاصله x از رأس A و در جهت ساعتگرد شروع به چرخیدن کرده، بررسی می کنیم.

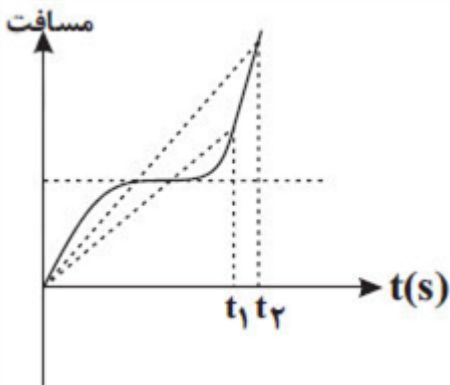
$$(0 \leq x \leq a)$$

با توجه به شکل فوق، اگر $x = 0$ باشد، اندازه جابه جایی برابر طول ضلع مثلث است و اگر $0 < x < a$ باشد، اندازه جابه جایی مقداری کمتر از ضلع مثلث خواهد شد، بنابراین بیشینه اندازه جابه جایی برابر طول ضلع مثلث، یعنی a است.



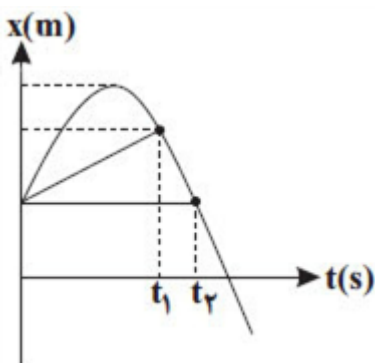
۶۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر نمودار مسافت بر حسب زمان را رسم کنیم، شیب خطی که از مبدأ به لحظه t روی نمودار رسم می شود برابر با تندی متوسط است. از روی نمودار داریم:



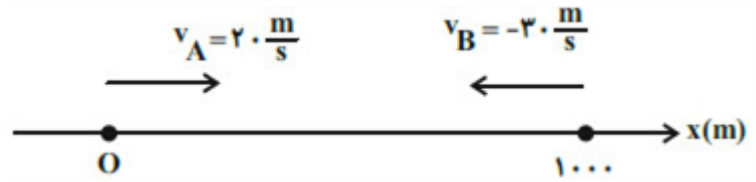
$$s'_{av} > s_{av}$$

از طرفی سرعت متوسط از لحظه ۰ تا t برابر با شیب خط از مبدأ زمان تا لحظه t روی نمودار $x - t$ است که مطابق شکل داریم:



$$v_{av} > v'_{av}$$

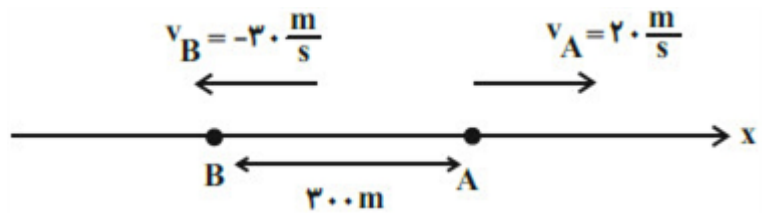
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل زیر فرض می‌کنیم که خودروی A در لحظه $t = 0$ در مبدأ محور (نقطه O) و به طرف راست در حرکت باشد. یعنی سرعت آن مثبت است. بنابراین خودروی B به طرف چپ در حرکت بوده و سرعت آن منفی است. با توجه به این که، معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت به صورت $x = vt + x_0$ است، معادله مکان - زمان هریک از دو خودرو را می‌نویسیم:



$$x_A = v_A t + x_{A0} \quad \begin{matrix} v_A = 20 \frac{m}{s} \\ x_{A0} = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_A = 20t + 0 = 20t$$

$$x_B = v_B t + x_{B0} \quad \begin{matrix} x_{B0} = 1000 m \\ v_B = -30 \frac{m}{s} \end{matrix} \Rightarrow x_B = -30t + 1000$$

برای اولین بار خودروی B به خودروی A نرسیده است، اما، برای دومین بار خودروی B از خودروی A عبور می‌کند. بنابراین، داریم:



$$x_A - x_B = 300 \Rightarrow 20t - (-30t + 1000) = 300 \Rightarrow 50t = 1300 \Rightarrow t = 26 s$$

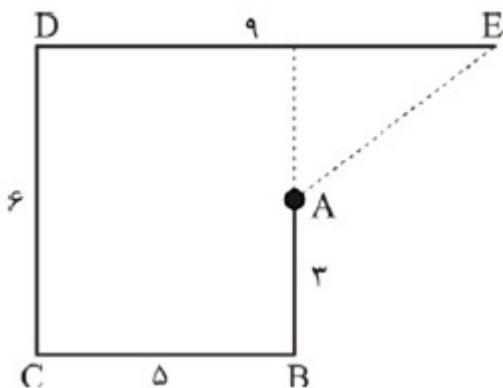
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای به دست آوردن مسافت و یا تندی باید حواسمان به نقاط تغییر جهت باشد (یعنی لحظه‌ای که مکان متحرک $x = -2m$ است).

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - (-1)}{4} = \frac{x_f + 1}{4}$$

$$s_{av} = \frac{l}{t} = \frac{1 + 2 + x_f}{4} = \frac{3 + x_f}{4}$$

$$\Rightarrow s_{av} - v_{av} = \frac{(3 + x_f) - (x_f + 1)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \frac{m}{s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$AE^2 = (4^2 + 3^2) = 5^2$$

$$AE = 5m$$

$$\text{مسافت } ABCDE = 3 + 5 + 6 + 9 = 23m$$

$$\frac{23}{5} = 4 \frac{3}{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض سؤال که دو متحرک در دو لحظه از کنار یکدیگر می‌گذرند، بدیهی است که در $t = 0$ متحرک B (با سرعت اولیه بیشتر و شتاب کمتر) عقب‌تر از A است، یعنی:

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{a_B} & & \xrightarrow{a_A} \\ \rightarrow v_{\cdot B} = 10 \frac{m}{s} & & \rightarrow v_{\cdot A} = 5 \frac{m}{s} \\ B & & A \\ \hline x_{\cdot B} = 0 & & x_{\cdot A} = 3/6 m \end{array} \rightarrow a_A > a_B$$

با نوشتن معادله حرکت هریک داریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_{\cdot}t + x_{\cdot} \Rightarrow \begin{cases} x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + 10t \\ x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 + 5t + 3/6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_A = x_B = \frac{1}{2}(a_A - a_B)t^2 - 5t + 3/6 = 0 \quad (1)$$

از طرفی در $t = 4s$ ، سرعت دو متحرک برابر است، بنابراین:

$$v_A = v_B \Rightarrow a_A t + v_{\cdot A} = a_B t + v_{\cdot B} \xrightarrow{t=4s} 4(a_A - a_B) = 5 \Rightarrow a_A - a_B = \frac{5}{4} \frac{m}{s^2} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{1,2} \frac{5}{8}t^2 - 5t + 3/6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0/8s \\ t_2 = 7/2s \end{cases} \Rightarrow \Delta t = 6/4s$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۹

روش اول: مکان اولیه متحرک A را به عنوان مبدأ مکان در نظر گرفته و معادله حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_A = v_A t + x_{\cdot A} \Rightarrow x_A = 100t$$

$$x_B = v_B t + x_{\cdot B} \Rightarrow x_B = -120t + x_{\cdot B}$$

طبق صورت سؤال، فاصله‌ی دو متحرک دو بار برابر با ۳۰km می‌شود، یک بار قبل از رسیدن به دو متحرک به یکدیگر و بار دیگر بعد از عبور دو متحرک از یکدیگر، بنابراین در مرتبه‌ی دوم داریم:

$$x_A - x_B = 30 \Rightarrow 100t - (-120t + x_{\cdot B}) = 30$$

$$\Rightarrow 220t = 30 + x_{\cdot B} \mid t = 0/5h \mid x_{\cdot B} = 80km$$

حال لحظه‌ای را که متحرک B به مکان اولیه متحرک A می‌رسد، محاسبه می‌کنیم:

$$x_B = -120t + 80 \mid x_B = 0 \mid t = \frac{2}{3}h$$

روش دوم: از آن‌جا که دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، بنابراین سرعت نسبی‌شان برابر با $120 + 100 = 220 \frac{km}{h}$

است. از طرفی بعد از نیم ساعت برای دومین بار فاصله‌ی دو متحرک به ۳۰km رسیده است، پس دو متحرک در مدت نیم‌ساعت ۳۰ کیلومتر بیشتر از فاصله‌ی اولیه‌شان (d) پیموده‌اند:

$$\Delta x_{کل} = 30 + d = v_{نسبی} \times \Delta t \Rightarrow 30 + d = 220 \times 0/5 \Rightarrow d = 80km$$

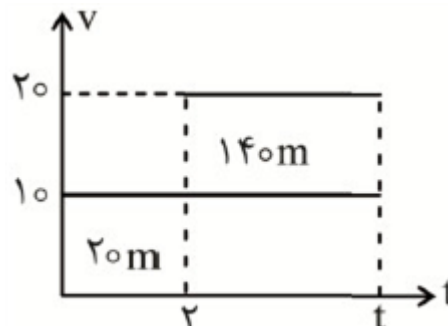
حال فقط لازم است مدت زمانی را پیدا کنیم که متحرک B این ۸۰ کیلومتر را طی کرده:

$$\Delta t = \frac{d}{v_B} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}h$$

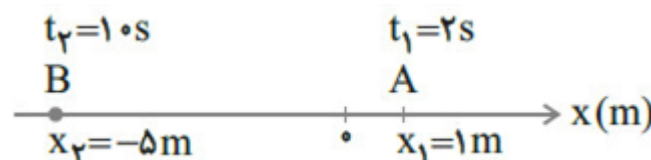
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. سطح زیر نمودار $v - t$ بیانگر جابه‌جایی متحرک بوده و می‌توان نشان داد سطح بین نمودار $v - t$ دو متحرک بیانگر تغییر فاصله آن‌ها از یکدیگر است.

در ۲ ثانیه اول نمودار متحرک A بالاتر از B بوده و فاصله دو متحرک به اندازه 20 m افزایش یافته و به 60 m نیز می‌رسد. از این لحظه به بعد نمودار B بالاتر از A بوده و می‌بایست سطح بین نمودار $v - t$ دو متحرک 140 m شود تا ضمن جبران 60 m عقب‌ماندگی، 80 m جلوتر نیز برود:

$$10(t - 2) = 140 \Rightarrow t - 2 = 14 \Rightarrow t = 16\text{ s}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



در این جا موقعیت متحرک در دو لحظه t_1 و t_2 مشخص است. اما این که در این بین، متحرک تغییر جهت داده است یا خیر، نامعلوم است. بنابراین نمی‌توان به طور قطعی تندی متوسط را محاسبه کرد. اما الزاماً بزرگ‌تر یا مساوی سرعت متوسط متحرک خواهد بود.

بنابراین خواهیم داشت: $s_{av} \geq v_{av}$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-5 - 1}{10 - 2} = \frac{-6}{8} \Rightarrow |v_{av}| = 0.75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$s_{av} \geq 0.75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

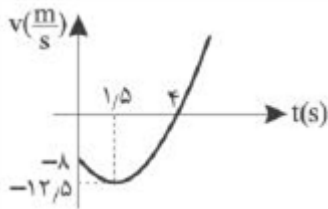
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون تندی متوسط اتومبیل A در این مسیر بیش‌تر از تندی متوسط اتومبیل B است، بنابراین اتومبیل A این مسیر را سریع‌تر طی کرده است. با استفاده از تعریف تندی متوسط داریم:

$$(s_{av})_A = \frac{L}{\Delta t_A} \Rightarrow \frac{86/4}{3/6} = \frac{3600}{\Delta t_A} \Rightarrow \Delta t_A = 150\text{ s}$$

$$(s_{av})_B = \frac{L}{\Delta t_B} \Rightarrow \frac{64/8}{3/6} = \frac{3600}{\Delta t_B} \Rightarrow \Delta t_B = 200\text{ s}$$

$$\Delta t_A - \Delta t_B = 150 - 200 = -50\text{ s} = \frac{-5}{6}\text{ min}$$

بنابراین متحرک A به اندازه $\frac{5}{6}$ دقیقه زودتر از متحرک B این مسیر را طی کرده است.



$$v = 2t^2 - 6t - 8 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -1s \\ t_2 = 4s \end{cases}$$

راس سهمی: $t = \frac{b}{2a} = \frac{6}{4} = 1/5 \Rightarrow t = 1/5s$

$$v = 2 \times 2/25 - 6 \times 1/5 - 8 \Rightarrow v = 4/5 - 9 - 8 = -4/5 - 8 = -12/5 \frac{m}{s}$$

با توجه به نمودار در بازه زمانی $1/5 < t < 4$ حرکت کندشونده است.

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 12/5}{2/5} = -5 \frac{m}{s^2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شتاب متوسط از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آید: ۷۴

$$a_{av} = \frac{v(3) - v(0)}{3 - 0} = \frac{(3(3)^2 - 6 \times 3 - 9) - (-9)}{3} = 3 \frac{m}{s^2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۵

در گزینه‌ی «۱»: طبق رابطه‌ی $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ به دلیل برداری بودن $\vec{d}$ ، سرعت متوسط برداری است.

در گزینه‌ی «۲»: در مدار حرکت ماه به دور زمین مسافت بزرگتر از جابه‌جایی است.

در گزینه‌ی «۳»: طبق تعریف برداری جابه‌جایی چنین است.

در گزینه‌ی «۴»: سرعت متحرک هم‌جهت با سوی حرکت است و به مکان جسم بستگی ندارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. موارد ب و ت درست است. بررسی عبارت‌ها: ۷۶

الف) نادرست - مخلوط پایدار شده آب و روغن با استفاده از صابون، نوعی کلوئید است.

ب) درست - ذرات پخش شده در مخلوط کلویید و محلول برخلاف سوسپانسیون در آب ته‌نشین نمی‌شوند و پایدار هستند.

پ) نادرست - ذره‌های تشکیل‌دهنده سوسپانسیون پس از مدتی ته‌نشین می‌شوند در نتیجه سوسپانسیون پایدار نیست.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مخلوط‌های ۱ و ۲ به ترتیب نشان‌دهنده کلوئید و محلول هستند. دسته‌بندی مخلوط‌های ارائه شده به ۷۷

صورت زیر است:

• محلول: مخلوط آب و نمک

• کلوئید: شیر - ژله - رنگ پوششی

• سوسپانسیون: شربت خاکشیر - شربت معده - آب گل‌آلود

کلوئیدها مخلوط‌هایی «پایدار و ناهمگن» و محلول‌ها، مخلوط‌هایی «پایدار و همگن» هستند. بنابراین کلوئیدها و محلول‌ها در ویژگی «پایدار بودن» شباهت دارند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عبارت‌های آ و ت صحیح هستند.

مورد آ) بخش آب‌گریز هر دو زنجیره سیر شده بلند است که در چربی حل می‌شود.
مورد ت) چون بخش آنیون هر دو هم بخش آب‌دوست و هم آب‌گریز دارد، می‌تواند چربی را در آب پایدار کند.
بررسی موارد نادرست:

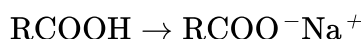
ب) ساختار آنیونی صابون COO^- و غیرصابونی‌ها SO_3^- است.

پ) صابون در واکنش با این یون‌ها رسوب کرده ولی غیرصابونی‌ها رسوب نمی‌کنند.

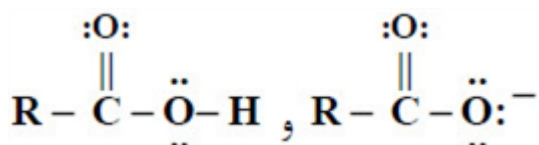
ث) تعداد اتم اکسیژن در صابون ۲ و در پاک‌کننده‌های غیرصابونی ۳ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تنها مورد آ صورت نمی‌گیرد.

در تبدیل یک اسید چرب به صابون جامد به جای هیدروژن گروه هیدروکسیل، سدیم قرار می‌گیرد.



آ) شمار زوج الکترون‌های ناپیوندی در مولکول اسید چرب و بخش آنیونی صابون به ترتیب برابر ۴ و ۵ است.



ب) صابون‌ها با مولکول‌های آب جاذبه یون - دوقطبی برقرار می‌کنند که از پیوند هیدروژنی موجود میان مولکول‌های اسید چرب و آب قوی‌تر است، در نتیجه انحلال‌پذیری صابون بیشتر است.

پ) نوع نیروی بین ذره‌ای اسیدهای چرب و صابون به ترتیب واندروالسی و جاذبه یونی است. به ترکیب صابون می‌توان مولکول گفت اما نیروی بین ذره‌ای آن یونی است.

ت) سدیم نسبت به اتم هیدروژن از جرم مولی بیشتری برخوردار است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. پاک‌کننده صابونی دارای فرمول کلی $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{COONa}$ می‌باشد بنابراین تفاوت هیدروژن‌ها با

$$H - C = (2n + 1) - (n + 1) = 17 \Rightarrow \text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COONa} \quad \text{کربن‌ها:}$$

$$\text{جرم مولی صابون} = \text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COONa} = 306 \text{ g. mol}^{-1}$$

پاک‌کننده غیرصابونی فرمول $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{C}_6\text{H}_4\text{SO}_3\text{Na}$ دارد و اختلاف

$$H - C = (2n + 5) - (n + 6) = 11 \Rightarrow n = 12 \Rightarrow \text{C}_{12}\text{H}_{25}\text{C}_6\text{H}_4\text{SO}_3\text{Na}$$

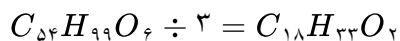
$$\text{جرم غیرصابونی} = \text{C}_{12}\text{H}_{25}\text{C}_6\text{H}_4\text{SO}_3\text{Na} = 348$$

$$\text{اختلاف جرم آن در پاک‌کننده} = 348 - 306 = 42 \text{ g}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای این منظور پیه گوسفند را با سود سوزآور در این دیگ‌ها می‌جوشانند.

در شرایط یکسان قدرت پاک‌کنندگی پاک‌کننده غیرصابونی $\text{RC}_6\text{H}_4\text{SO}_3^- \text{Na}^+$ از صابون بیشتر است. زیرا با یون‌های موجود در آب سخت رسوب نمی‌دهند و خاصیت پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کنند.

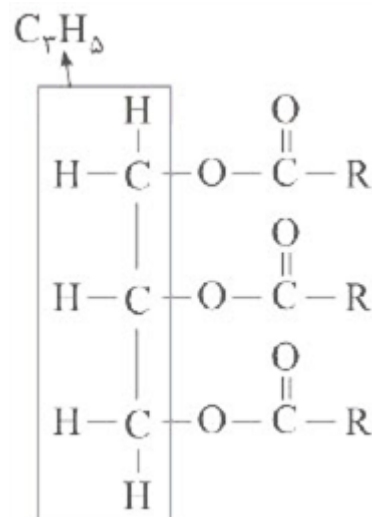
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به ساختار کلی استر اسیدهای چرب می‌توان نوشت:



بنابراین فرمول شیمیایی RCOO در این استر سه عاملی به صورت $C_{18}H_{33}O_2$ و فرمول کلی اسید چرب سازنده آن به صورت $C_{17}H_{33}COOH$ یا $C_{18}H_{34}O_2$ خواهد بود.

فرمول مولکولی آلکان ۸ کربنی به صورت C_8H_{18} می‌باشد:

$$\begin{cases} C_{18}H_{34}O_2 = 282 : g. mol^{-1} \\ C_8H_{18} = 114 : g. mol^{-1} \end{cases} \Rightarrow 282 - 114 = 168g$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت‌های دوم و چهارم نادرست هستند. بررسی عبارت‌های نادرست:

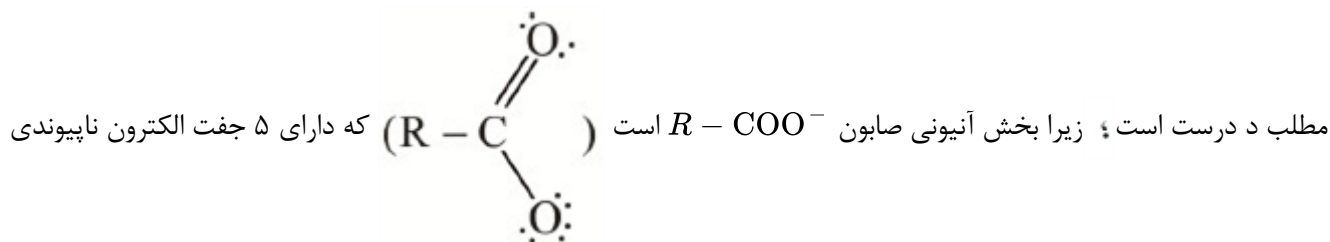
- اسیدهای چرب، کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلندکربنی هستند.
- نیروی بین‌مولکولی غالب در چربی‌ها از نوع وان‌دروالسی است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

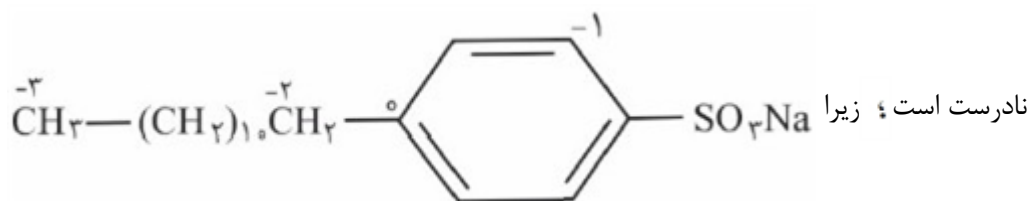
مطلب الف درست است؛ زیرا آنیون صابون، $R - COO^-$ و قسمت باردار آن $-COO^-$ است که سبب پخش شدن ذرات چربی در آب می‌شود.

مطلب ب نادرست است؛ زیرا اسیدهای چرب دارای زنجیر هیدروکربنی بلندی هستند (حداقل ۱۴ اتم کربن)، پس $CH_3 - (CH_2)_7 - COOH$ اسید چرب نیست و نمک سدیم آن هم خاصیت پاک‌کنندگی ندارد. زیرا بخش ناقطبی آن در چربی خوب حل نمی‌شود.

مطلب ج نادرست است؛ زیرا اگر صابونی در آب خوب کف نکرد، غلظت یون Ca^{2+} یا Mg^{2+} در آب زیاد است و این موضوع هیچ ربطی به غلظت یون Na^+ ندارد و نمی‌توان در آب سخت غلظت این دو یون را مقایسه کرد.



است.



نادرست است؛ زیرا جزء شوینده‌های غیرصابونی است.

درست است. غیرصابونی‌ها در آب‌های سخت خوب کف می‌کنند.

درست است. تشکیل مخلوط کلوئیدی را می‌دهد که پایدار هستند.

درست است. زیرا هگزان ناقطبی است و در هم حل می‌شوند.

نادرست است؛ زیرا غیرصابونی‌ها از مواد پتروشیمی به دست می‌آیند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا، در آب حاوی حضور یون‌های کلسیم و منیزیم رسوب تشکیل نمی‌دهد. از بنزن و دیگر مواد اولیه در صنایع پتروشیمی، تولید می‌شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زیرا به ازای هر پیوند دوگانه، دو اتم هیدروژن کمتر می‌شود.



$$\frac{C}{H} = \frac{16}{24} = 0.67$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

(۳) برهم کنش نیروهای بین‌مولکولی

(۲) ترکیبات کلردار

(۱) ترکیب سیرنشده

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا، در این واکنش گاز هیدروژن تولید می‌شود که با اکسیژن در شرایط مناسب واکنش بسیار سریع و انفجاری می‌دهد.

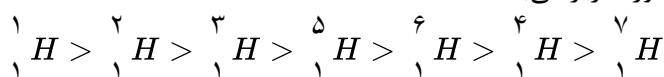
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گزینه ۱: علوم تجربی تلاش‌های گسترده‌ای را برای یافتن پاسخ این پرسش انجام داده است از جمله: (۱) خواص و رفتار ماده (۲) بررسی برهمکنش نور با ماده.

گزینه ۲: دانشمندان دو فضایی وویجر ۱ و ۲ را برای شناخت بیشتر سامانه خورشیدی به فضا فرستادند.

گزینه ۳: وویجر ۱ و ۲ مأموریت داشتند که از کنار برخی سیاره‌ها (زحل، مشتری، اورانوس و نپتون) بگذرند و شناسنامه فیزیکی و شیمیایی آن‌ها را تهیه کرده و به زمین بفرستند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ترتیب پایداری ایزوتوپ‌های هیدروژن به صورت زیر می‌باشد.



همانطور که در گزینه ۴ مشخص شده است، ایزوتوپ 4_1H پایداری کمتری از ایزوتوپ‌های 5_1H و 6_1H دارد. در حالیکه در گزینه ۲،

ایزوتوپ 6_1H را پایین‌تر از 4_1H نشان داده است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه ۱: ${}^{99}_{43}\text{Tc}$ یک رادیوایزوتوپ است و ناپایدار بوده و به مرور زمان متلاشی می‌شود.

گزینه ۲: کلاً ۲۶ عنصر جدول به طور مصنوعی ساخته می‌شوند.

گزینه ۳: مقدار ${}^{235}\text{U}$ در نمونه طبیعی کمتر از ۷٪ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

${}^{19}\text{K} \leftarrow$ گروه ۱

${}^{20}\text{Ca}, {}^{35}\text{Br} \leftarrow$ گروه ۲

${}^{13}\text{Al} \leftarrow$ گروه ۱۳

${}^9\text{F} \leftarrow$ گروه ۱۷

${}^{14}\text{C}, {}^{14}\text{Si} \leftarrow$ گروه ۱۴

${}^{16}\text{S} \leftarrow$ گروه ۱۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تنها مورد ت نادرست است. بررسی عبارت‌ها:

آ) دوره‌های ۴ و ۵، ۱۸ عنصر دارند و دوره اول ۲ عنصر دارد.

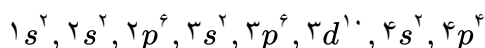
ب) هر دو دوره دوم و سوم شامل ۸ عنصر می‌باشند.

پ) گروه‌های ۲ و ۱۸ مجموعاً ۱۳ عنصر دارند که نصف تعداد عنصرهای ساختگی (۲۶ عنصر) است.

ت) در عناصری که نماد دو حرفی دارند حرف اول باید به صورت بزرگ نوشته شود. (Cl)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی داده‌های عبارت:

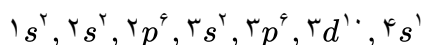
آ: آرایش الکترونی عنصری که در دوره ۴ و گروه ۱۶ قرار دارد:



مجموع شمار الکترون‌ها با $l = 0$ و $l = 1$ در اتم آن ۲۴ و شمار الکترون‌های با $l = 2$ در اتم ۱۰ می‌باشد.

$$\left(\frac{24}{10} = 2/4\right)$$

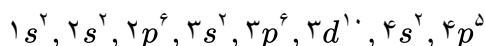
ب: آرایش الکترونی عنصری که در دوره ۴ و گروه ۱۱ قرار دارد:



مجموع شمار الکترون‌های با $l = 0$ و $l = 1$ در اتم آن ۱۹ و شمار الکترون‌های با $l = 2$ در اتم آن ۱۰ می‌باشد.

$$\left(\frac{19}{10} = 1/9\right)$$

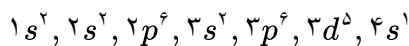
پ: آرایش الکترونی عنصری که در دوره ۴ و گروه ۱۷ قرار دارد:



مجموع شمار الکترون‌های با $l = 0$ و $l = 1$ در اتم آن ۲۵ و شمار الکترون‌های با $l = 2$ در اتم آن ۱۰ می‌باشد.

$$\left(\frac{25}{10} = 2/5\right)$$

ت: آرایش الکترونی عنصری که در دوره ۴ و گروه ۶ قرار دارد:



مجموع شمار الکترون‌های با $l = 0$ و $l = 1$ در اتم آن ۱۹ و شمار الکترون‌های با $l = 2$ در اتم آن ۵ می‌باشد.

$$\left(\frac{19}{5} = 3/8\right)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: پاسخ به سؤالات بنیادی و بزرگ در حوزه علم تجربی نمی‌گنجد.

گزینه ۲: آخرین تصویر وویجر ۱ مربوط به پیش از خروج از سامانه خورشیدی (نه کهکشان راه شیری) است.

گزینه ۳: انسان‌های اولیه به دنبال فهم نظام و قانونمندی در آسمان بوده‌اند.

گزینه ۴: این دو فضاپیما قرار بود شناسنامه فیزیکی و شیمیایی از سیارات گازی تهیه کنند. قطر سیارات گازی از زمین بزرگ‌تر است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$n + p + e = 101 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} n - e = 14 \\ e = p - 3 \end{array} \right| \quad (2) \Rightarrow n - p = 11 \Rightarrow n = p + 11 \quad (3)$$

در رابطه‌ی (۱)، روابط (۲) و (۳) را جایگذاری می‌کنیم:

$$P + 11 + p + p - 3 = 101 \Rightarrow p = 31 \Rightarrow n = 31 + 11 = 42$$

$$\Rightarrow A = n + p = 42 + 31 = 73$$

بنابراین نماد عنصر M به صورت ${}_{31}^{73}M$ می‌باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

بررسی عبارت اول: درست است.

بررسی عبارت دوم: نادرست است. به علت خاصیت پرتوزایی به شدت خطرناک‌اند.

بررسی عبارت سوم: نادرست است. هم گلوکز نشان‌دار و هم گلوکز معمولی تجمع می‌کنند.

بررسی عبارت چهارم: درست است.

بررسی عبارت پنجم: نادرست است. Ge مربوط به گروه چهاردهم است و Ga با آلومینیوم هم‌گروه است و خصوصیات شیمیایی آن‌ها مشابه است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زیرا اغلب فلزات به صورت اکسید در خاک یافت می‌شوند. فضاپیماهای وویجر ۱ و ۲ از مدار خارج شده‌اند.

O و S در میان ۸ عنصر اصلی مشترک کره زمین و مشتری قرار دارند. درصد فراوانی هلیوم در مشتری بیشتر از نئون است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$${}^5_1H \Rightarrow \begin{cases} p + n + e \\ 1 + 4 + 1 = 6 \end{cases}$$

$${}^2_1H \Rightarrow \begin{cases} p + n + e \\ 1 + 1 + 1 = 3 \end{cases} \text{ و } {}^3_1H \Rightarrow \begin{cases} p + n + e \\ 1 + 1 + 1 = 3 \end{cases}$$

$$\frac{\frac{6}{3}}{8} = \frac{2}{24} = 0.083$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با توجه به آرایش الکترونی عنصر $X: 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^1$ به بررسی عبارت‌ها بپردازیم:

(الف) نادرست: آرایش لایه‌ی ظرفیت به صورت: $3s^2 3p^1$ است.

(ب) درست: اکسیژن با ظرفیت ۲ و عنصر مورد نظر با ظرفیت ۳ شرکت می‌کند.

(پ) درست: منظور زیرلایه‌ی s است که دارای ۶ الکترون است.

(ت) نادرست: $l = 0$ دارای ۶ الکترون و $l = 1$ دارای ۷ الکترون است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌های نادرست:

(پ) در کل سیاره ی زمین (نه فقط در پوسته ی زمین!!)، عنصر آهن فراوان ترین عنصر است.
 (ت) با بررسی نوع و مقدار عنصرهای سازنده ی برخی سیاره‌های سامانه ی خورشیدی و مقایسه ی آن با عنصرهای سازنده ی خورشید می‌توان به درک بهتری از چگونگی تشکیل عنصرها دست یافت.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

الف) 1_1H و 2_1H ایزوتوپ‌های پایدار هیدروژن هستند نه 3_1H .

ب) تعداد نوترون‌های ایزوتوپ‌های 3_1H ، 4_1H ، 5_1H ، 6_1H و 7_1H از $1/5$ برابر تعداد پروتون‌هایشان بیش تر است.

ج) فراوان ترین ایزوتوپ هیدروژن در طبیعت نوترون ندارد. $({}^1_0n)$

د) صحیح است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زیرا، پسماند راکتورهای اتمی هنوز خاصیت پرتوزایی دارد و خطرناک است؛ از این رو دفع آن‌ها از جمله

چالش‌های صنایع هسته‌ای به شمار می‌آید.

