

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow r = f(-2) = -32 + 24a - 2a + 5 = 0 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -1/5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع f یک تابع چندجمله‌ای است که در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، بنابراین برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق کافی است، آن را در نقاط بحرانی بررسی کنیم.

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(2 - x) = 0$$

طبق رابطه به دست آمده $x = 0$ و $x = 2$ ، ریشه‌های تابع $f'(x)$ هستند که تنها $x = 0$ در بازه $[-2, 1]$ وجود دارد، پس در

x	-2	0	1
f(x)	17	-3	-1

بازه $[-2, 1]$ ، $x = 1$ ، $x = 0$ و $x = -2$ سه نقطه بحرانی این تابع هستند.

با توجه به جدول رسم شده برد تابع f برابر با $[-3, 17]$ است و مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق آن برابر با $17 + (-3) = 14$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق تعریف، در انقباض یا انبساط عرضی، دامنه تغییر نمی‌کند اما برد تغییر می‌کند. در نمودار $y = kf(x)$ ، عرض هر نقطه از دامنه، k برابر عرض آن نقطه در نمودار $y = f(x)$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به $(fog)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$ داریم:

$$(f(x^2 + 5x))' = (x^4 + x^6 - 1)' \Rightarrow (3x^2 + 5) \cdot f'(x^2 + 5x) = 4x^5 + 6x^5$$

اگر در رابطه بالا قرار دهیم $x = 1$ ، آن‌گاه:

$$(3 + 5)f'(6) = 4 + 6 = 10 \Rightarrow f'(6) = 1/5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی تابع f را به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ می‌نویسیم، سپس با رسم نمودار تابع

مشخص می‌شود که تابع در $\mathbb{R}$ غیریکنواست.

اما در بازه‌ی $(-\infty, 0]$ نزولی و در بازه‌ی $[0, +\infty)$ صعودی است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مشتق تابع $m(t)$ در لحظه‌ی $t = 4$ همان آهنگ لحظه‌ای رشد در $t = 4$ است:

$$m(t) = \sqrt{t} + 2t^2 \Rightarrow m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 4t \Rightarrow m'(4) = \frac{1}{2 \times 2} + 4(4) = 16/25$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای تعیین طول نقاط بحرانی تابع f ، ابتدا از ضابطه‌ی تابع مشتق می‌گیریم و هر نقطه از تابع را که f' در آن جا صفر یا نامتناهی باشد یا وجود نداشته باشد، نقطه‌ی بحرانی محسوب می‌کنیم، داریم:

$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 4)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2 - 6x) =$$

$$\frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)^2}} = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)^2}}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \in (-1, 2) \\ x = 2 \notin (-1, 2) \end{cases} \\ x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x+1) \times (x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (-1, 2) \\ x = 2 \notin (-1, 2) \end{cases} \end{cases}$$

تنها $x = 0$ طول نقطه‌ی بحرانی تابع f در بازه‌ی $(-1, 2)$ است. برای تعیین وضعیت تابع در $x = 0$ کافی است به این نکته دقت کنیم که این نقطه ریشه‌ی ساده‌ی مشتق بوده و علامت مشتق در دو طرف آن تغییر می‌کند. در نتیجه $x = 0$ طول اکسترمم نسبی تابع f است. برای تشخیص ماکزیمم و مینیمم نسبی به سراغ رسم جدول تغییرات و آزمون مشتق اول می‌رویم:

x	-1	0	2
f'	+	○	-
f		↗ ↘	

Max نسبی

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم و سپس توان‌های بالاتر آن را محاسبه

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 2A$$

می‌کنیم:

$$\Rightarrow A^n = 2^{n-1} A \Rightarrow A^{20} = 2^{19} A = \begin{bmatrix} 2^{19} & -2^{19} \\ -2^{19} & 2^{19} \end{bmatrix}$$

$$A \text{ های درایه ضرب} = 2^{19}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. متوازی‌الاضلاعی که دو قطرش بر هم عمود باشند، لوزی است. پس:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{1 + m^2 + 4} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 6 = m^2 + 5 \Rightarrow m^2 = 1 \xrightarrow{m > 0} m = 1$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$(a - c) \times b = a \times c \Rightarrow a \times b - c \times b = a \times c \Rightarrow a \times b + b \times c + c \times a = 0$$

$$\xrightarrow{\text{در } a \text{ ضرب داخلی می‌کنیم}} a \cdot (b \times c) = 0$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$k = n(n+1) \Rightarrow 4k+1 = 4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2 \quad \text{گزاره الف:}$$

$$k = 2n(2n+2) \Rightarrow k+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2 \quad \text{گزاره ب:}$$

$$k = (2n+1)(2n+3) \Rightarrow k+1 = 4n^2+8n+4 = (2n+2)^2 \quad \text{گزاره پ:}$$

بنابراین هر سه گزاره همواره درست هستند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۲

زمانی که رئوس اسم ندارند باید سعی کنیم گراف‌ها را رسم کنیم:



که ۶ گراف قابل رسم است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۳

نکته: اگر داشته باشیم $\binom{n}{x} = \binom{n}{y}$ ، آن‌گاه دو حالت داریم: $x = y$ یا $x + y = n$.
در نتیجه خواهیم داشت:

$$(۱) x^2 = 3x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$(۲) x^2 + 3x = 2x + 20 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow (x + 5)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ ق ق} \\ x = -5 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$۷ = ۴ + ۳ + ۰ : \text{مجموع مقادیر}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با تقسیم صورت و مخرج کسر داده شده بر X داریم: ۱۴

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^2 x}{x + \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)}{1 + 3\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)}$$

با توجه به این که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$ است، حاصل حد بالا به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}}{1 + 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}} = \frac{1 - 2}{1 + 3} = -\frac{1}{4}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا میزان رنگ را در هر یک از دو مخلوط به دست می‌آوریم: ۱۵

$$\frac{10n}{100} \times 11 = \frac{11n}{10}, \quad \frac{70}{100} \times n = \frac{7n}{10}$$

مخلوط اولیه‌ی $(11 + n)$ کیلوگرم است که با تبخیر $0/6$ کیلوگرم آن به $(10/4 + n)$ کیلوگرم رسیده است، پس:

$$\frac{\frac{11n}{10} + \frac{7n}{10}}{10/4 + n} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{11n + 7n}{10 \cdot 4 + 10n} = \frac{1}{2} \Rightarrow 36n = 104 + 10n$$

$$\Rightarrow 26n = 104 \Rightarrow n = 4$$

$$\log \sqrt[8]{2} = \log \frac{2^{\frac{1}{8}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{1}{6}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۷

$$\left(-1, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow f(-1) = \frac{5}{2} \Rightarrow 1 + k + 2^{-1} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{5}{2} - 1 \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow k = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۸

$$(2f + g)(-4) = 2f(-4) + g(-4) = 2(-16 + 1) + \sqrt{4} = -30 + 2 = -28$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طول مماس مشترک خارجی دو دایره از طول مماس مشترک داخلی آنها بزرگتر است، در نتیجه:

$$\left. \begin{aligned} TT' &= \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = 11 \Rightarrow d^2 - (R - R')^2 = 121 \\ TT' &= \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = 7 \Rightarrow d^2 - (R + R')^2 = 49 \end{aligned} \right\}$$

تفریق می کنیم

$$\rightarrow d^2 - (R - R')^2 - d^2 + (R + R')^2 = 72$$

$$\Rightarrow -R^2 + 2RR' - R'^2 + R^2 + 2RR' + R'^2 = 72 \Rightarrow 4RR' = 72 \Rightarrow RR' = 18$$

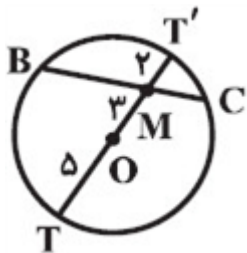
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می دانیم طول مماس های رسم شده بر یک دایره از یک نقطه ی خارج دایره برابر یکدیگرند. پس

$$MB = MT \text{ از طرفی طبق روابط طولی برای دایره ی بزرگتر داریم:}$$

$$MT^2 = MA \times MC \Rightarrow MB^2 = 4 \times (4 + 8) = 48 \Rightarrow MB = 4\sqrt{3}$$

$$AB = MB - MA = 4\sqrt{3} - 4 = 4(\sqrt{3} - 1)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با رسم امتداد OM از دو طرف و مشخص شدن قطر TT' داریم:



$$\left\{ \begin{aligned} OT = R = 5 &\Rightarrow MT = R + OM = 5 + 3 = 8 \\ MT' = OT' - OM = R - OM &= 5 - 3 = 2 \end{aligned} \right.$$

حال با توجه به قضیه ی روابط طولی در دایره داریم:

$$BM \times MC = T'M \times MT = 2 \times 8 = 16$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کافی است گزاره های P_2 و P_4 نادرست و مابقی گزاره ها درست باشند. ۲۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نوع متغیرهای داده شده در گزینه ها به ترتیب از راست به چپ عبارتند از: ۲۴

گزینه ۱: کمی پیوسته - کمی گسسته - کیفی اسمی - کمی پیوسته

گزینه ۲: کیفی اسمی - کیفی اسمی - کمی پیوسته - کمی گسسته

گزینه ۳: کمی پیوسته - کیفی اسمی - کیفی ترتیبی - کمی پیوسته

گزینه ۴: کیفی اسمی - کمی پیوسته - کمی گسسته - کیفی ترتیبی

$$\frac{\pi}{2x-1} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2x-1} = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2x-1 = \frac{2}{2k+1} \Rightarrow x = \frac{\frac{2}{2k+1} + 1}{2} = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2}$$

اگر $k \in \mathbb{Z}$ و $k < 0$ ، آنگاه $x < 0$ و اگر $k \geq 0$ ، با افزایش مقدار k مقدار x کم می‌شود، پس بزرگ‌ترین مجانب قائم حالتی است که:

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ بزرگ‌ترین مجانب قائم}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که تابع $y = \cos \alpha$ در $\alpha = 2k\pi$ به بیش‌ترین مقدار خود و در $x = (2k+1)\pi$ به کم‌ترین مقدار خود می‌رسد. پس برای تابع $f(x)$ داریم:

$$\begin{cases} \max : 2x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ \frac{x \in (0, \pi)}{k=1} \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4} \\ \min : 2x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \frac{x \in (0, \pi)}{k=0} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$ با توجه به تعریف مشتق، برابر با $f'(-1)$ است. پس

برای تعیین حاصل این حد، از تابع f مشتق گرفته و در ضابطه‌ی مشتق $x = -1$ را جایگذاری می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = (x-2) \cdot \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(x) = (1) \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \cdot (x-2) \Rightarrow$$

$$f'(-1) = (1) \cdot \sqrt[3]{(-1)^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{(-1)}} \cdot (-1-2) = 1 + 2 = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۸

می‌دانیم $\overrightarrow{AB} = B - A$ است، بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow M - A = \frac{2}{3}(B - A) \Rightarrow M = \frac{2}{3}B - \frac{2}{3}A + A$$

$$\Rightarrow M = \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}A \Rightarrow M = \frac{2}{3}(-1, 2, 4) + \frac{1}{3}(5, -4, 1) = (1, 0, 3)$$

در ضمن فاصله‌ی نقطه‌ی (x, y, z) تا محور y برابر $\sqrt{x^2 + z^2}$ است. پس:

$$\text{فاصله‌ی } M \text{ تا محور } y = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بدترین حالت ممکن این است که اعداد برداشته شده مقسوم علیه مشترک بزرگ تر از یک نداشته باشند، یعنی فرض می کنیم اعداد انتخاب شده عدد یک به همراه اعداد اول به صورت زیر باشند:

(تعداد اینها برابر با ۹ تا است) ۱, ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹

اگر $19 \leq n \leq 22$ باشد، مطمئن هستیم در بین ۱۰ عدد انتخاب شده حتماً خواسته‌ی مسأله اتفاق می افتد، ولی اگر $n = 23$ باشد، ممکن است ۱۰ عدد انتخابی اعداد بالا به همراه ۲۳ باشند که هیچ کدام دارای شرط مسئله نیستند، پس بیشترین مقدار n برابر ۲۲ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو رقم از ارقام دهگانه را انتخاب کرده و در جایگاه های یکان و هزارگان قرار می دهیم (رقم کوچک در یکان و رقم بزرگ در هزارگان)، دو رقم دیگر از ارقام هشت گانه ی باقی مانده را انتخاب کرده و در جایگاه های دهگان و صدگان می چینیم، بنابراین جواب موردنظر $\binom{10}{2} \times \binom{8}{2}$ یعنی ۱۲۶۰ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می دانیم $\cotg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$. با توجه به شکل:

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{2/5}{4} = \frac{5}{8} \Rightarrow -\tan \alpha = \frac{5}{8} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{5}{8}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \tan(3x + 5y + 2z) &= \tan((x + y + z) - (x + y)) = \tan(360^\circ - (x + y)) \\ &= -\tan(x + y) = -\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = -\frac{2 + 3}{1 - 2 \times 3} = 1 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا باید $\sin \alpha > 0$ و $\cos \alpha > 0$ باشد. بنابراین α در ربع اول قرار دارد. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \log \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1 < 0 &\Rightarrow \log \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \log \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} < 0 \Rightarrow \log \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} < 0 \\ \sin \alpha \cos \alpha &> 1 \end{aligned}$$

از آن جا که $0 < \cos \alpha < 1$ است، پس از نامعادله بالا داریم:

$$0 < \sin \alpha < 1 \text{ و } 0 < \cos \alpha < 1 \text{ زیرا}$$

بنابراین مجموعه مقادیر ممکن برای α برابر $\emptyset$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای آن که معادله ی درجه دوم $x^2 - 2x + 4 - 2m = 0$ ریشه ی حقیقی داشته باشد، باید دلتای آن نامنفی باشد، پس:

$$\begin{aligned} \Delta \geq 0 &\xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} (-2)^2 - 4(1)(4 - 2m) \geq 0 \Rightarrow 4 - 16 + 8m \geq 0 \\ \Rightarrow 8m &\geq 12 \Rightarrow m \geq \frac{3}{2} \quad (1) \end{aligned}$$

چون نقطه ی $A(\alpha, \beta)$ در ناحیه ی اول یا سوم است، پس α و β هم علامت اند، در نتیجه حاصل ضرب ریشه ها مثبت است یعنی $\alpha\beta > 0$.

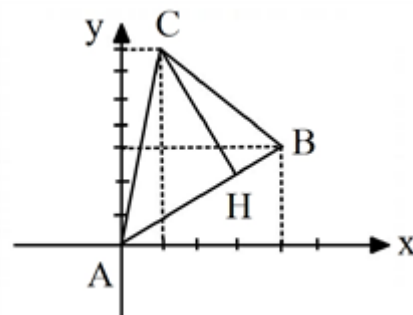
$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = 4 - 2m > 0 \Rightarrow 4 > 2m \Rightarrow m < 2 \quad (2) \xrightarrow{\text{اشتراک ۱, ۲}} \frac{3}{2} \leq m < 2$$

۳۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2}$$

اگر قاعده AB باشد، ارتفاع CH می‌شود، بنابراین طول قاعده برابر است با فاصله نقطه‌ی A تا B.



$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = 5$$

طول ارتفاع: فاصله‌ی نقطه‌ی C از ضلع AB ← ابتدا باید معادله‌ی AB به دست آید.

$$\text{شیب} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 0}{4 - 0} = \frac{3}{4} \Rightarrow y - 0 = \frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$$

$$\Rightarrow 4y = 3x \Rightarrow 4y - 3x = 0 \quad \text{معادله‌ی AB}$$

$$\text{ارتفاع} = 5 = \frac{25}{5} = \frac{|4(7) - 3(1)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = d \Rightarrow \text{فاصله‌ی C تا AB}$$

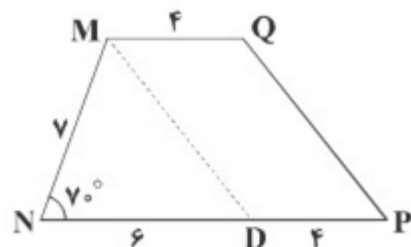
$$\text{مساحت} = \frac{5 \times 5}{2} = 12.5$$

نکته: دقت کنید که اضلاع بر هم عمود هستند، پس ارتفاع همان طول BC است. یعنی ارتفاع CH، منطبق بر ضلع BC می‌شود.

۳۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از رأس M خطی به موازات PQ رسم می‌کنیم. بنابراین چهارضلعی MQPD یک متوازی‌الاضلاع

خواهد بود و $DP = MQ = 4$ از طرفی می‌دانیم در دوزنقه زاویه‌های مجاور به ساق مکمل هم هستند بنابراین $\widehat{N} = 70^\circ$ است.



$$\triangle MND : MD^2 = (4)^2 + (7)^2 - 2 \times 4 \times 7 \times \cos(70^\circ)$$

$$\Rightarrow MD^2 = 36 + 49 - 2 \times 4 \times 7 \times \frac{35}{100} = 55/6 \Rightarrow MD = \sqrt{55/6}$$

۳۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در صورتی دو دایره فقط یک مماس مشترک دارند که دو دایره مماس داخلی باشند. شرط مماس داخلی بودن دو دایره $OO' = |R - R'|$ است، پس:

$$\epsilon = |a^2 - 2 - \epsilon a + 1| \Rightarrow \begin{cases} a^2 - \epsilon a - 1 = \epsilon \Rightarrow a^2 - \epsilon a - 7 = 0 & (1) \\ a^2 - \epsilon a - 1 = -\epsilon \Rightarrow a^2 - \epsilon a + 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow (a - 7)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ \text{غیر قابل قبول } a = -1 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow (a - 1)(a - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{غیر قابل قبول } a = 1 \\ a = 5 \end{cases}$$

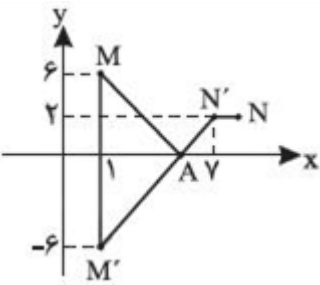
پس کوچک‌ترین مقدار ممکن برای a ، عدد ۵ است.

توجه کنید! $a = 1$ و $a = -1$ قابل قبول نیستند، زیرا به ازای آنها شعاع $a^2 - 2$ منفی می‌شود.

۳۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

انتقال یافته نقطه $N(8, 2)$ در راستای محور x ها به اندازه یک واحد به سمت چپ را به دست می‌آوریم تا به نقطه $N'(7, 2)$ برسیم. سپس بازتاب $M(1, 6)$ را نسبت به محور x ها پیدا می‌کنیم تا به نقطه $M'(1, -6)$ برسیم. از M' به N' وصل می‌کنیم تا محور x ها را در نقطه A قطع کند، در این صورت مسیر $MAN'N$ مسیر مینیمم خواسته شده است که طول مسیر برابر $M'AN'N$ است.



$$\text{طول مسیر مینیمم} = M'N' + N'N = \sqrt{(7-1)^2 + (2+6)^2} + 1 = 10 + 1 = 11$$

۳۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که ارزش گزاره شرطی $s \Rightarrow r$ تنها در صورتی نادرست است که r (مقدم) درست و s (تالی) نادرست باشد. گزاره $(p \wedge \sim p)$ همواره نادرست است. پس گزاره صورت سؤال تنها در صورتی درست است که $\sim p \Rightarrow q$ نادرست باشد. در این صورت $\sim p$ درست و q نادرست است. یعنی هر دو گزاره p و q نادرست هستند.

۴۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه f را تشکیل می‌دهیم.

$$\text{نمودار خطی که از نقاط } x \leq -2: (-2, -1), (-3, 0) \text{ می‌گذرد} \Rightarrow m = \frac{-1 - 0}{-2 + 3} = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -x - 3$$

$$\text{نمودار خطی که از نقاط } -2 \leq x \leq 2: (0, 3), (-2, -1) \text{ می‌گذرد} \Rightarrow m = \frac{3 + 1}{0 + 2} = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x + 3$$

$f(2) = 7$ ، پس به ازای $x \geq 2$ تابع f به صورت تابع ثابت $f(x) = 7$ است.

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3 & x \leq -2 \\ 2x + 3 & -2 \leq x \leq 2 \\ 7 & 2 \leq x \end{cases}$$

$$f(-5) = 5 - 3 = 2$$

$$f(1/5) = 3 + 3 = 6 \Rightarrow f(-5) + f(1/5) + f(2/5) = 15$$

$$f(2/5) = 7$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. خطوط میدان الکتریک از بار مثبت خارج و به بار منفی وارد می‌شوند. پس بار شماره ۱ مثبت و بار شماره ۲ منفی می‌باشد.
از طرفی در اطراف بار شماره ۱ خطوط میدان متراکم‌تر است. تراکم خطوط میدان نشان‌گر قوی‌تر بودن بار شماره ۱ و در نتیجه بیشتر بودن بار الکتریکی آن است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$157 \times 10^{-4} = \frac{4 \times 3 / 14 \times 10^{-7} \times N \times 2 / 5}{0 / 1} \Rightarrow N = \frac{157 \times 10^{-5}}{314 \times 10^{-8}} = 500$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\phi = BA \cos \theta \Rightarrow \Delta \phi = BA \cos \theta_2 - \cos \theta_1$$

و بر $0 / 0.5 \times 40 \times 10^{-4} (\cos 90 - \cos 0) = 2 \times 10^{-4} (0 - 1) = -2 \times 10^{-4}$ تغییرات شار مغناطیسی

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از قاعده دست راست جهت خطوط میدان مغناطیسی باید پادساعت‌گرد باشد. (رد گزینه‌های ۱ و ۴)

از طرفی تراکم خطوط میدان مغناطیسی بیانگر قوی‌تر بودن میدان مغناطیسی است و با افزایش فاصله تراکم خطوط کاهش می‌یابد. پس گزینه ۳ صحیح است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گام اول: ابتدا اختلاف پتانسیل خازن را به دست می‌آوریم:

$$C = \frac{q}{\Delta V} \Rightarrow \Delta V = \frac{q}{C} = \frac{60 \times 10^{-6}}{30 \times 10^{-6}} = 2V$$

گام دوم: حال میدان الکتریکی بین دو صفحه خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{2}{4 \times 10^{-2}} = 500 \frac{N}{C}$$

گام سوم: حال نیروی وارد بر بار $q = 4 \text{ nC}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$F_E = E |q| \Rightarrow F_E = 500 \times 4 \times 10^{-9} = 2 \times 10^{-6} N$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow (752 - 1112) = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = -200^\circ C = -200 K$$

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow \frac{P_r}{P_1} = \frac{R_1}{R_r} \Rightarrow \frac{P_r}{P_1} = \frac{R_1}{R_1 (1 + \alpha \Delta \theta)} \Rightarrow \frac{P_r}{920} = \frac{1}{1 + 4 \times 10^{-4} (-200)}$$

$$\Rightarrow \frac{P_r}{920} = \frac{1}{1 - 0.08} \Rightarrow P_r = \frac{920}{0.92} = 1000 W$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بررسی موارد:

الف) نادرست. برای مثال اگر خودرویی روی خط راست در حال حرکت باشد و راننده آن ترمز بگیرد، نیروی خالص وارد بر خودرو در خلاف جهت حرکت آن است.

ب) نادرست. نیروهای کنش و واکنش به دو جسم متفاوت وارد می‌شوند و نمی‌توان از آن‌ها برایند گرفت.

پ) درست. برای مثال هنگام ترمز خودرو بر مسیر مستقیم، هر چه شتاب ترمز بیشتر باشد، تغییر سرعت آن ناگهانی‌تر بوده و سرنشینان خودرو با شدت بیشتری به جلو پرتاب می‌شود.

ت) نادرست. اگر نیروی خالص وارد بر جسمی صفر باشد، طبق قانون اول نیوتون یا جسم ساکن است و یا با سرعت ثابت در حال حرکت است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حداکثر جرم آب زمانی به دست می‌آید که آب به دمای $0^{\circ}C$ برسد و تمام یخ را ذوب کند، بنابراین:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m_1 c_{\text{آب}} \times (0 - 50) + m_2 c_{\text{یخ}} \times (0 - (-10)) + m_2 L_F = 0$$

$$\Rightarrow -210 m_1 + 4000 \times 2/1 + 400 \times 336 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2/1} -100 m_1 + 4000 + 64000 = 0 \Rightarrow 100 m_1 = 68000 \Rightarrow m_1 = 680 \text{ g}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فقط جمله ب غلط است. در تمام رساناهای فلزی، سهم الکترون‌های آزاد در رسانش گرمایی بیش‌تر از اتم‌هاست.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کلون یکای استاندارد کمیت دما می‌باشد. آمپر یکای استاندارد کمیت جریان الکتریکی می‌باشد. ضخامت یک برگ کاغذ زیرمجموعه کمیت طول می‌باشد، بنابراین جزء کمیت‌های اصلی است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نادرستی گزینه‌های «۱» و «۴»: وقتی دو گلوله در حرکت هستند گلوله‌ی A همواره سرعت $30 \frac{m}{s}$ بیشتر از گلوله‌ی B دارد. بنابراین در هر ثانیه فاصله‌ی A به اندازه‌ی 30 متر بیشتر خواهد شد.

نادرستی گزینه‌ی «۳» و «۴»: شتاب هر دو گلوله برابر با g است و با گذشت زمان شتاب آن‌ها بدون تغییر خواهد بود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

در این سؤال مشخص نیست. متحرک در چه زمانی در مکان $2/5 \text{ m}$ قرار گرفته است، لذا چون مکان متحرک را در 3 s پس از این لحظه خواسته است فرض می‌کنیم متحرک در لحظه صفر در مکان $2/5 \text{ m}$ بوده است و مکان آن را در لحظه 3 s ، به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v \cdot t + x_0 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3^2 + 2/5 + 3 - 2/5 = 14 \text{ m}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق رابطه $E = hf$ انرژی فوتون فقط به بسامد بستگی دارد و می‌دانیم با تغییر محیط بسامد ثابت می‌ماند پس انرژی فوتون در تغییر محیط ثابت می‌ماند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. میزان جابه‌جایی‌ها در t ثانیه‌های متوالی، تشکیل تصاعد حسابی می‌دهد، بنابراین جابه‌جایی‌ها به صورت زیر می‌شوند:

$$20 \Rightarrow 3 \text{ ثانیه‌ی اول مسیر}$$

$$\Delta x \Rightarrow 3 \text{ ثانیه‌ی دوم مسیر}$$

$$80 \text{ m} \Rightarrow 3 \text{ ثانیه‌ی سوم مسیر}$$

همان‌طور که می‌دانیم، جمله‌ی دوم از میانگین جملات اول و سوم به دست می‌آید، بنابراین:

$$\Delta x = \frac{20 + 80}{2} = 50 \text{ m}$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = 20 + 50 + 80 = 150 \text{ m}$$

در نتیجه جابه‌جایی در ۹ ثانیه‌ی اول مسیر برابر است با:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از بین نیروهای مورد بررسی سؤال، تنها نیروی عکس‌العمل عمودی سطح بر مسیر حرکت عمود بوده و کار آن صفر است.

بررسی سایر موارد:

الف) چون جسم پایین می‌آید، کار نیروی وزن، مثبت است.

ب) نیروی $\vec{F}$ هم‌جهت با جابه‌جایی به جسم وارد می‌شود، پس کار آن مثبت است.

ج) نیروی اصطکاک در خلاف جهت جابه‌جایی به جسم وارد می‌شود و کار آن منفی است.

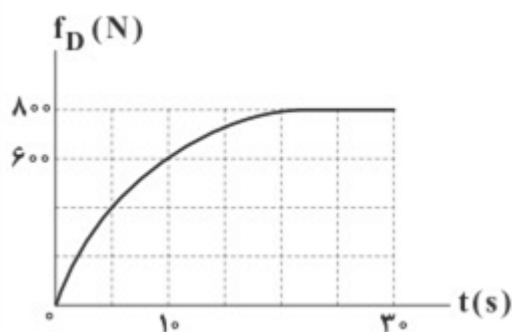
ه) کار نیروی عکس‌العمل سطح برابر مجموع کار نیروی اصطکاک و نیروی عکس‌العمل عمودی سطح است. با توجه به این که کار نیروی اصطکاک، منفی و کار نیروی عکس‌العمل عمودی سطح، صفر است، بنابراین کار نیروی عکس‌العمل سطح نیز منفی خواهد بود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار، چتر باز در لحظه‌ی $t = 20 \text{ s}$ به سرعت حد رسیده و در این حالت شتاب حرکت برابر صفر و $f_D = mg$ است، بنابراین:

$$t = 20 \text{ s} : f_D = mg \Rightarrow 800 = mg \Rightarrow m = 80 \text{ kg}$$

در ادامه در لحظه‌ی $t = 10 \text{ s}$ ، با توجه به خط‌چین‌های نمودار، مقاومت هوا برابر 600 N بوده و شتاب حرکت چتر باز برابر است با:

$$mg - f_D = ma \Rightarrow 800 - 600 = 80a \Rightarrow a = \frac{200}{80} = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

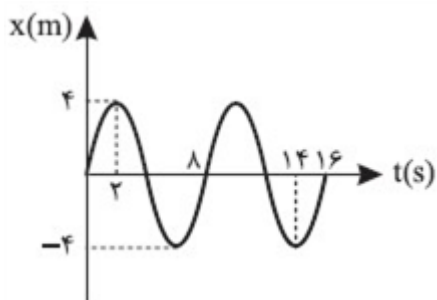


گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به طور کلی اگر جهت شتاب آسانسور رو به بالا باشد (فارغ از هر نوع حرکت آسانسور) اندازه نیرویی که آسانسور به شخصی وارد می‌کند بیش‌تر از حالتی است که آسانسور ساکن است.

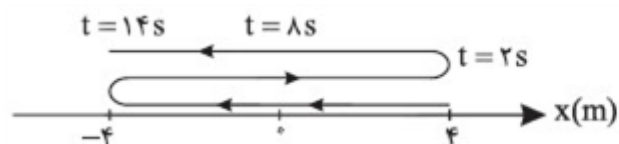
$$F' = mg \text{ : در حال سکون}$$

$$\Rightarrow F > F' \text{ : اگر شتاب رو به بالا باشد}$$

با توجه به تقارن تابع سینوسی مطابق شکل، لحظه‌های ۲s و ۱۴s را در شکل مشخص می‌کنیم.



تصویر نمودار مکان - زمان روی محور مکان معرف مسیر حرکت است. در بازه‌ی ۲s تا ۱۴s مسیر را مشخص می‌کنیم:



$$d = 3 \times 8 = 24 \text{ m} \quad \text{مسافت طی شده}$$

$$S_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{24}{14-2} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه معرف سرعت در آن لحظه است. با توجه به شکل $v_2 = 0$ و $v_{14} = 0$ است.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-0}{14-2} = 0$$

$$E = Pt = \frac{nhc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{nhc}{Pt} = \frac{1.0^{23} \times 6/4 \times 1.0^{-34} \times 3 \times 1.0^8}{640 \times 60}$$

$$= 500 \times 10^{-9} \text{ m} = 500 \text{ nm}$$

$$n = 5 \xrightarrow{\text{بیشترین انرژی}} n = 1 \Rightarrow \frac{E_R}{1^2} - \frac{E_R}{5^2} = \frac{24E_R}{25}$$

$$n = 5 \xrightarrow{\text{کمترین انرژی}} n = 4 \Rightarrow \frac{E_R}{4^2} - \frac{E_R}{25} = \frac{9E_R}{16 \times 25}$$

$$13/6 \text{ eV}$$



$$\text{سوال} \Rightarrow \frac{24E_R}{25} - \frac{9E_R}{16 \times 25} = 12/75$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وقتی ماهواره در مداری دایره‌ای به شعاع r می‌چرخد، تندی آن به روش زیر محاسبه

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \quad \text{می‌شود.}$$

در نتیجه برای مقایسه انرژی جنبشی داریم:

$$\frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \frac{r_1}{r_2} \xrightarrow{r_1=R_e+R_e=2R_e, r_2=R_e+1/5R_e=6/5R_e} \frac{K_2}{K_1} = \frac{2R_e}{6/5R_e} = \frac{5}{3}$$

$$\left(\frac{K_2}{K_1} - 1 \right) \times 100 = \left(\frac{5}{3} - 1 \right) \times 100 = -20\%$$

درصد تغییرات انرژی جنبشی برابر است با:

۶۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم طول موج مرئی طیف اتم هیدروژن مربوط به رشته بالمر ($n' = 2$) می‌باشد و فقط چهار خط اول این رشته به ازای ($n = 3, 4, 5, 6$) مرئی هستند.

از طرفی بلندترین طول موج هر رشته، از گذار از نزدیکترین تراز ($n = n' + 1$) و کوتاه‌ترین طول موج هر رشته، از گذار از دورترین تراز هر رشته ($n = \infty$) به دست می‌آید که در این مورد خاص که مربوط به نور مرئی است ($n = 6$) خواهد بود.

$$\xrightarrow{n'=2} \xrightarrow{n=3} \frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{100} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) \Rightarrow \lambda_{\max} = 720 \text{ nm}$$

$$\xrightarrow{n'=2} \xrightarrow{n=6} \frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{100} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36} \right) \Rightarrow \lambda_{\min} = 450 \text{ nm}$$

$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{720}{450} = \frac{8}{5} \quad \text{بنابراین:}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۳

$$F_2 = 0.6 F_1, a_2 = 1/2 a_1, m_2 = m_1 - 8$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{m_1 - 8}{m_1} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{m_1 - 8}{m_1} \Rightarrow m_1 = 2m_1 - 16 \Rightarrow m_1 = 16 \text{ kg}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶۴

$s =$ تندی ابتدایی

$$\text{مرحله اول} \Rightarrow s = \frac{L}{\Delta h} \Rightarrow L = s \times 5 \quad (I)$$

$$\text{مرحله دوم} \Rightarrow (s + 72) = \frac{L}{(\Delta h - 90 \text{ min})} \Rightarrow s + 72 = \frac{L}{3/5} \Rightarrow L = (s + 72) \times 3/5 \quad (II)$$

$\downarrow$
 $1/5 h$

$$\xrightarrow{(I), (II)} s \times 5 = (s + 72) \times 3/5 \Rightarrow s \times 5 = 3/5 s + 3/5 \times 72 \Rightarrow 1/5 s = 3/5 \times 72$$

$$s = \frac{72 \times 3/5}{1/5} = 168 \frac{\text{km}}{h}$$

$$s = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow 168 = \frac{672}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{672}{168} = 4 h$$

۶۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هنگامی تندی متحرک در حال کاهش است که نوع حرکت کندشونده باشد، به تعبیر دیگر در نمودار سرعت - زمان آن بخش‌هایی که نمودار به محور زمان t نزدیک می‌شود، مورد سؤال است. ابتدا نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم:

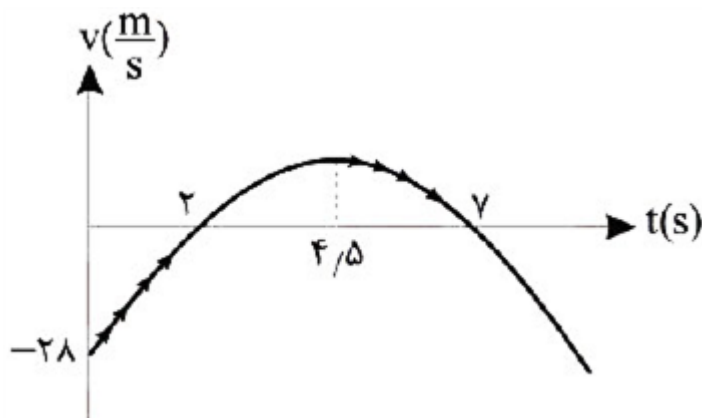
$$v(t) = 0 \Rightarrow -2t^2 + 18t - 28 = 0$$

$$\Rightarrow -2(t-2)(t-7) = 0 \Rightarrow t_1 = 2s, t_2 = 7s$$

قسمت‌هایی از نمودار که فلش‌گذاری شده است، تندی متحرک در حال کاهش است.

$$\Delta t_1 = 2 - 0 = 2s$$

$$\Delta t_2 = 7 - 4/5 = 2/5s \Rightarrow \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 4/5s$$



$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{16 - 4}{7 - 2} = 3 \frac{m}{s}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۶۶

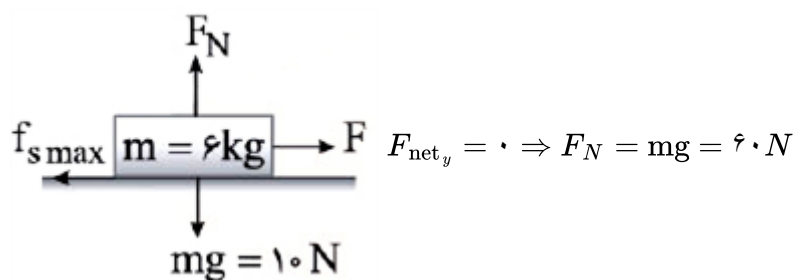
$$x = vt + x_0 \xrightarrow{t=3s} 4 = 3 \times 3 + x_0 \Rightarrow x_0 = -5m$$

$$x = vt + x_0 = 3t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{3}s$$

لحظه تغییر جهت بردار مکان:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

۶۷



سپس بیشینه اصطکاک ایستایی یا همان $f_{s_{max}}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f_{s_{max}} = \mu_s F_N \xrightarrow{F_N=60, \mu_s=0/5} f_{s_{max}} = 0/5 \times 60 = 30N$$

برای اینکه جسم در آستانه حرکت باشد، باید $F = f_{s_{max}}$ شود، بنابراین:

$$F = f_{s_{max}} \xrightarrow{F=t^2+t, f_{s_{max}}=30} t^2+t = 30 \Rightarrow t^2+t-30 = 0 \Rightarrow (t-5)(t+6) = 0$$

$$\Rightarrow t = 5s$$

$$m = \rho v \Rightarrow 0.314 = 1000 \times 3/14 \times (0.5 \times 10^{-3})^2 L \Rightarrow L = \frac{1000}{25} = 40m$$

$$R = \frac{3/14 \times 10^{-8} \times 40}{3/14 \times (0.5 \times 10^{-3})^2} = 1/6 \text{ اهم}$$

بار اولیهی کره‌های $\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$ برابر با $\begin{bmatrix} x = ? \\ -16 \mu C \\ +32 \mu C \\ \text{صفر} \end{bmatrix}$ است و بار نهایی کره‌ی D برابر $+8 \mu C$ شده است.

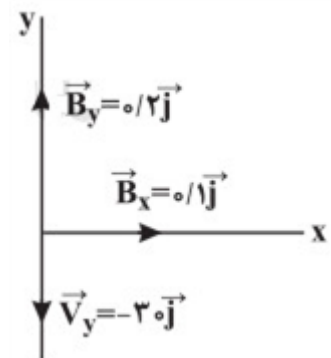
$$(x)_D + (x)_A \Rightarrow q'_D = q'_A = \frac{x + 0}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)_D + (-16 \mu C)_B \Rightarrow q_D = q'_B = \frac{\left(\frac{x}{2}\right) + (-16 \mu C)}{2} = \frac{x}{4} - 8 \mu C$$

$$\left(\frac{x}{4} - 8 \mu C\right)_D + (+32 \mu C)_C \Rightarrow q_D = q'_C = \frac{\left(\frac{x}{4} - 8 \mu C\right) + 32 \mu C}{2}$$

$$= \frac{x}{8} + 12 \mu C = +8 \mu C \Rightarrow \frac{x}{8} = -4 \mu C \Rightarrow x = -32 \mu C$$

رسم می‌کنیم. با توجه به شکل رسم شده مؤلفه v_y در امتداد مؤلفه B_y و خلاف جهت آن است. بنابراین زاویه‌ی بین $\vec{B}_y$ و $\vec{v}_y$ برابر 180° می‌باشد. همچنین زاویه‌ی بین B_x و v_y برابر 90° است. در این صورت با استفاده از رابطه‌ی $F = |q| v B \sin \theta$ می‌توان نوشت:



$$F_y = |q| V_y B_y \sin 180^\circ$$

$$\xrightarrow{\sin 180^\circ = 0} F_y = 0$$

$$\xrightarrow{|q| = 2 \times 10^{-9} \text{ C}, v_y = 3.0 \text{ m/s}} F_x = 2 \times 10^{-9} \times 3.0 \times 0.1 \times 1 = 6 \times 10^{-9} \text{ N}$$

$$\xrightarrow{B_x = 0.1 \text{ T}} F_{\text{کل}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \xrightarrow{F_y = 0} F_{\text{کل}} = F_x = 6 \times 10^{-9}$$

با توجه به قاعده‌ی دست راست جهت نیروی وارد بر ذره‌ی باردار برون سو است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. وقتی درب مخزن گاز را باز می‌کنیم، فشار هوا در دو طرف لوله‌ی U شکل برابر می‌شود. در این فرایند، مایع ۶۰ cm جابه‌جا می‌شود، سپس هم‌تراز می‌شود.

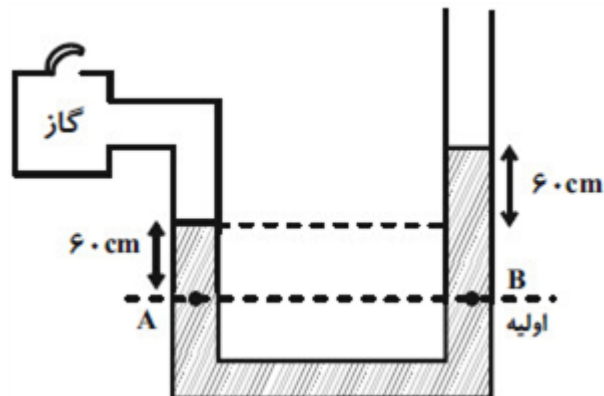
پس اختلاف ارتفاع اولیه‌ی دو سطح مایع در دو طرف لوله‌ی U شکل برابر با ۱۲۰ cm می‌باشد.

در حالت اول با توجه به برابر فشار در نقاط هم‌تراز از یک مایع ساکن، داریم:

$$P_A = P_B$$

$$P_{\text{گاز}} = \rho gh + P.$$

$$P_{\text{گاز}} - P. = \rho gh \Rightarrow P_{\text{پیمانه ای}} = 6800 \times 10 \times 1 / 2 \Rightarrow P_{\text{پیمانه ای}} = 81600 \text{ Pa}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به طرح‌واره زیر، تبدیل یخ 10°C به آب 20°C در سه مرحله انجام می‌شود. بنابراین، ابتدا زمان لازم برای تبدیل یخ 10°C به 0°C را می‌یابیم:

$$-10^{\circ}\text{C} \xrightarrow{Q_1 = mc_{\text{یخ}} \Delta\theta} 0^{\circ}\text{C} \xrightarrow{Q_2 = mL_F} 0^{\circ}\text{C} \xrightarrow{Q_3 = mc_{\text{آب}} \Delta\theta} 20^{\circ}\text{C}$$

آب 20°C

$$P = \frac{Q_1}{\Delta t_1} = \frac{mc_{\text{یخ}} \Delta\theta}{\Delta t_1} \xrightarrow{P = 5/25 \text{ KW}, \Delta\theta = 0 - (-10) = 10^{\circ}\text{C}, c_{\text{یخ}} = 2/1 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}, m = 2 \text{ kg}} P = \frac{mc_{\text{یخ}} \Delta\theta}{\Delta t_1}$$

$$5/25 = \frac{2 \times 2/1 \times 10}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = 8 \text{ s}$$

می‌بینیم، بعد از ۸ s یخ 10°C به یخ 0°C تبدیل می‌شود. بنابراین، گزینه‌های ۲ و ۴ حذف می‌شوند.

اکنون زمان لازم برای تبدیل یخ 0°C به آب 0°C را پیدا می‌کنیم:

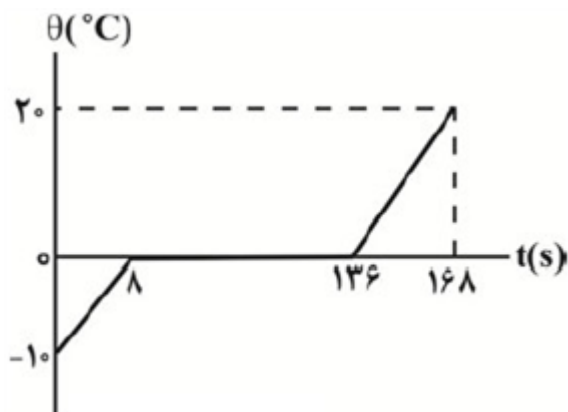
$$P = \frac{Q_2}{\Delta t_2} = \frac{mL_F}{\Delta t_2} \xrightarrow{L_F = 336 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, m = 2 \text{ kg}} 5/25 = \frac{2 \times 336}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 128 \text{ s}$$

در آخر، زمان لازم برای تبدیل آب 0°C به آب 20°C را حساب می‌کنیم:

$$P = \frac{Q_3}{\Delta t_3} = \frac{mc_{\text{آب}} \Delta\theta}{\Delta t_3} \xrightarrow{\Delta\theta = 20 - 0 = 20^{\circ}\text{C}, m = 2 \text{ kg}, c_{\text{آب}} = 4/2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}}} P = \frac{mc_{\text{آب}} \Delta\theta}{\Delta t_3}$$

$$5/25 = \frac{2 \times 4/2 \times 20}{\Delta t_3} \Rightarrow \Delta t_3 = 32 \text{ s}$$

در آخر، نمودار دما برحسب زمان به صورت مقابل رسم می‌شود:



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون حرکت با شتاب ثابت است، نمودار سهمی است و معادله‌ی حرکت با شتاب ثابت به صورت مقابل

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \quad \text{است:}$$

در لحظه‌ی $t = 0$ متحرک در $x = 27m$ قرار دارد. لذا $x_0 = 27m$ است. از طرف دیگر، در لحظه‌ی $t = 4s$ شیب خط مماس بر نمودار برابر صفر است، بنابراین سرعت متحرک در این لحظه برابر صفر است. در این صورت داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 4a + v_0 = 0 \Rightarrow v_0 = -4a \quad (1)$$

مکان متحرک در لحظه‌ی $t = 4s$ برابر $x = 75m$ است؛ بنابراین، داریم:

$$75 = \frac{1}{2}a \times 16 + v_0 \times 4 + 27 \Rightarrow 75 = 8a + 4v_0 + 27 \Rightarrow 2a + v_0 = 12 \quad (2)$$

با حل دو معادله و دو مجهول ۱ و ۲ داریم:

$$a = -\frac{6}{5} \frac{m}{s^2}, v_0 = 24 \frac{m}{s} \Rightarrow x = -3t^2 + 24t + 27$$

برای محاسبه‌ی تندی متوسط در ۳ ثانیه‌ی دوم (بین $3s$ تا $6s$) بایستی مسافت طی شده را محاسبه کنیم و با توجه به این که

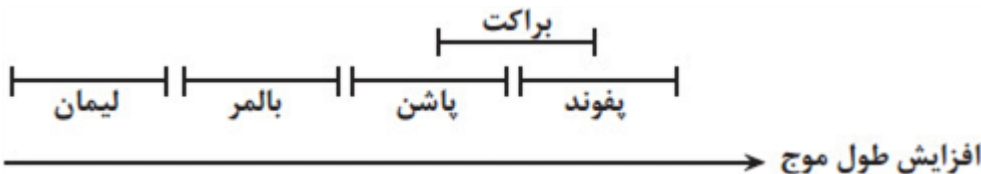
$t = 4s$ لحظه‌ی تغییر جهت است، داریم:

$$\begin{cases} t = 3s \Rightarrow x_3 = -3 \times 9 + 24 \times 3 + 27 = 72m \\ t = 4s \Rightarrow x_4 = -3 \times 16 + 24 \times 4 + 27 = 75m \Rightarrow L = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 15m \\ t = 6s \Rightarrow x_6 = -3 \times 36 + 24 \times 6 + 27 = 63m \end{cases}$$

$$s_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{15}{3} = 5 \frac{m}{s}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. پدیده فوتوالکتریک زمانی رخ می‌دهد که بسامد موج تابیده شده به سطح فلز از بسامد آستانه فلز بیشتر باشد، بلندترین طول موج رشته بالمر ($n' = 2$) از بلندترین طول موج رشته پاشن کوتاه‌تر است بنابراین گسیل آن باعث پدیده فوتوالکتریک می‌شود.

به طور کلی گستره طول موج‌ها در ۵ رشته لیمان، بالمر، پاشن، براکت و پفوند را می‌توانیم مطابق شکل زیر مشخص کنیم:



مطابق شکل بسامد بلندترین طول موج رشته بالمر از کوتاه‌ترین طول موج رشته پاشن بیشتر است اما بسامد کوتاه‌ترین طول موج رشته پفوند از بسامد بلندترین طول موج رشته پاشن کم‌تر است.

$$\frac{1}{\lambda_{\max, \text{پاشن}}} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty} \right) \Rightarrow \lambda_{\max, \text{پاشن}} = \frac{144}{7R}$$

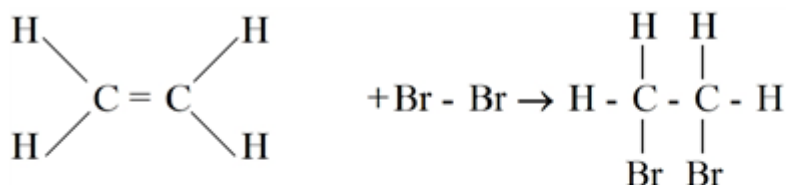
$$\frac{1}{\lambda_{\min, \text{براکت}}} = R \left(\frac{1}{4^2} \right) \Rightarrow \lambda_{\min, \text{براکت}} = \frac{16}{R}$$

$$\frac{16}{R} < \frac{144}{7R}$$

بنابراین گسیل کوتاه‌ترین طول موج رشته براکت باعث پدیده فوتوالکتریک می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که در آزمایش یانگ ضخامت نوارهای روشن و تاریک به طول موج نور بستگی دارد.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{V_2}{V_1} \times \frac{f_1}{f_2} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{n_1}{n_2} \times \frac{f_1}{f_2} \Rightarrow \frac{a_2}{6} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \times \frac{480}{600} \Rightarrow \frac{a_2}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{8}{10} \Rightarrow a_2 = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5} \text{ mm}$$



$\Delta H = (\text{مجموع انرژی پیوند محصولات}) - (\text{مجموع انرژی پیوند مواد اولیه})$

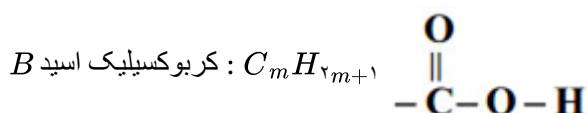
$$\Delta H = [4(\text{C} - \text{H}) + (\text{C} = \text{C}) + (\text{Br} - \text{Br})] - [4(\text{C} - \text{H}) + 2(\text{C} - \text{Br}) + (\text{C} - \text{C})] =$$

$$= 4 \times 418 + 602 + 193 - 4 \times 418 - 2 \times 276 - 332 = -89 \text{ KJ}$$

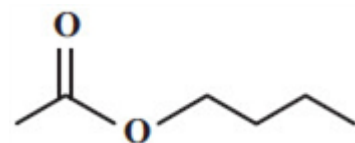
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۷

$$A_{\text{کل}} : C_n H_{2n+2} O \left\{ \begin{array}{l} \text{شمار جفت الکترون پیوندی} : \frac{n(4) + 2n + 2 + 1(2)}{2} = 3n + 2 \\ \text{شمار جفت الکترون ناپیوندی} : 1 \times 2 = 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{p.e}{n.e} = \frac{3n + 2}{2} = 7 \Rightarrow 3n = 12 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow A_{\text{کل}} : C_4 H_{10} O$$



$$\frac{C-H}{C-C} = \frac{2m+1}{m} = 3 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow B : \text{CH}_3 \text{COOH}$$



ساختار استر حاصل (بوتیل اتانوات):

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرمول پیوند - خط مونومر سازنده پلیمر داده شده به صورت زیر است: ۷۸



بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) درست

(۲) فرمول مولکولی مونومر سازنده این پلیمر و مولکول‌های حاصل از تجزیه ناشسته (گلوکز) به ترتیب $C_6 H_{12} O_6$ و $C_6 H_{12} O_5$ است که اختلاف جرم مولی آن‌ها برابر با $96 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = (6 \times 16)$ است.

(۴) زیرا ماندگاری درازمدت آن در طبیعت سبب ایجاد مشکلات فراوان می‌شود.

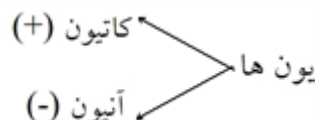
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با از دست دادن الکترون، یون مثبت یا کاتیون تشکیل می‌گردد و با گرفتن الکترون یون منفی یا ۷۹

آنیون به وجود می‌آید. از کنار هم قرار گرفتن این یون‌ها، پیوند یونی تشکیل می‌گردد.

راه حل دیگر: اگر آخرین جای خالی را در نظر بگیریم، قطعاً پیوند یونی است. پس گزینه‌ی (۱) و (۲) جواب است و با توجه به نوع یون‌های کاتیون و آنیون می‌توان گزینه‌ی ۲ را در نظر گرفت.

نکته‌ی درسی: اتم‌ها با جابه‌جایی الکترون‌ها به یون تبدیل می‌شوند.

معمولاً فلزها کاتیون و نافلزها آنیون می‌دهند.



$${}_{15}^{31}P^{3-} \Rightarrow \begin{cases} p = 15 \\ e = 15 + 3 = 18 \\ n = 31 - 15 = 16 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۸۰

$${}_{26}^{56}Fe^{3+} \Rightarrow \begin{cases} p = 26 \\ e = 26 - 3 = 23 \\ n = 56 - 26 = 30 \end{cases}$$

$5 = 23 - 18 =$ الکترون‌های فسفید - الکترون‌های یون آهن

$${}_{21}^{44}Sc^{3+} \Rightarrow \begin{cases} p = 21 \\ e = 21 - 3 = 18 \Rightarrow N - e = 23 - 18 = 5 \\ N = 44 - 21 = 23 \end{cases}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

۸۱

گزینه ۱: افزودن ید به هگزان منجر به تشکیل محلول (مخلوط همگن) می‌شود. حالت فیزیکی و ترکیب شیمیایی در سرتاسر محلول‌ها، یکسان و یک‌نواخت است. محلول ید در هگزان بنفش رنگ است.
گزینه ۲: در ساختار یخ اتم‌های اکسیژن در رأس حلقه‌های شش ضلعی قرار دارند.
گزینه ۳: گشتاور دوقطبی اغلب هیدروکربن‌ها (نه ترکیب‌های آلی) ناچیز و در حدود صفر است.
گزینه ۴: در استون اکسیژن با کربن پیوند دوگانه دارد و بین خود دو الکترون به اشتراک گذاشته‌اند. همین کربن با دو پیوند یگانه‌ی دیگر به دو اتم کربن کناری خود متصل شده است و در کل ۴ الکترون به اشتراک می‌گذارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۸۲

الف) درست است.

ب) نادرست است. ذرات تشکیل‌دهنده‌ی محلول‌ها، مولکول‌ها و یون‌ها هستند.

پ) درست است. تعداد کل کربن‌ها برابر با ۱۳ کربن زنجیره‌ی الکیل به علاوه ۶ کربن حلقه‌ی بنزنی است. بنابراین ۱۹ کربن در این ترکیب وجود دارد. تعداد اتم‌های هیدروژن در زنجیره‌ی آلکیل، ۲۷ اتم و در حلقه‌ی بنزنی، ۴ اتم است. بنابراین در کل ۳۱ اتم هیدروژن وجود دارد.

ت) نادرست است. آب گل‌آلود، سوسپانسیون است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف درصد یونش خواهیم داشت:

۸۳

$$\text{درصد یونش} = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}{\text{شمار مولکول‌های حل شده}} \times 100 = \frac{32}{128 + 32} \times 100 = 20\%$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مواد یونی جزء ترکیب‌ها هستند اما جامدهای کووالانسی شامل ترکیب‌ها (مانند SiO_2) و عناصر (مانند

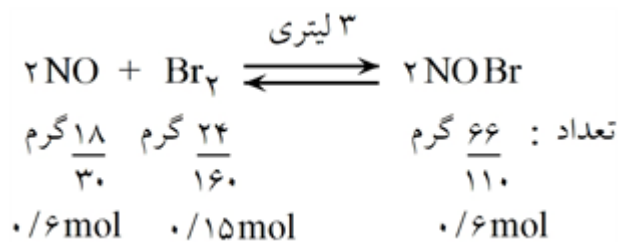
۸۴

الماس) هستند. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: مواد کووالانسی در حالت جامد سختی بالایی دارند و در حالت مذاب رسانای جریان برق نیستند. ذره‌های سازنده‌ی مواد کووالانسی، تعداد بسیار زیادی از اتم‌ها هستند که با پیوند اشتراکی (کووالانسی) به یکدیگر متصل شده‌اند.

گزینه ۲: مواد فلزی در حالت جامد معمولاً سختی بالایی ندارند و در حالت مذاب رسانای جریان برق هستند. مواد فلزی، کمترین فراوانی را در بین مواد در طبیعت دارند. بیشترین تنوع مربوط به مواد مولکولی است.

گزینه ۴: مواد مولکولی، در حالت جامد سخت نیستند و در حالت مذاب رسانای جریان برق نیستند، این مواد با توجه به نوع نیروهای بین‌مولکولی در دمای اتاق می‌توانند به صورت جامد، مایع یا گاز باشند.



$$K = \frac{\left(\frac{0/6}{3}\right)}{\left(\frac{0/6}{3}\right) \times \left(\frac{0/15}{3}\right)} = 20$$

$$m - x = 0/15 \quad m - 0/6m = 0/15 \quad m = \frac{0/15}{0/4} = 0/375$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت‌های اول و سوم درست هستند. بررسی عبارت‌های نادرست:

اگر در دما و حجم ثابت، فشار گاز A ، دو برابر فشار گاز X باشد، به این معناست که شمار مول‌ها و مولکول‌های گاز A ، دو برابر گاز X است. در صورتی که هر دو گاز A و X ، تک‌اتمی یا دواتمی باشند، می‌توان نتیجه گرفت که شمار اتم‌های گاز A ، دو برابر گاز X است. واکنش مربوط به فرایند هابر در دما و فشار اتاق انجام نمی‌شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

(۱) برای تشکیل هر مول Al_2O_3 ، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود.

(۲) تبدیل هر اتم فلزی به کاتیون آن با کاهش شعاع همراه است.

(۳) Al با از دست دادن ۳ الکترون، اکسید شده و به Al^{3+} تبدیل می‌شود. گونه‌ای که اکسید می‌شود، همان کاهنده است.

(۴) نیم‌واکنش کاهش به صورت روبه‌رو است:

$$\text{O}_2(g) + 4e^- \rightarrow 2\text{O}^{2-}(s)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. انرژی پیوند، مقدار انرژی لازم برای شکستن یک مول پیوند و تبدیل آن به دو مول اتم جدا از هم گازی شکل است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

گزینه ۱: توزیع ناهمگون عناصر در جهان، دلیلی بر پیدایش تجارت جهانی است.

گزینه ۲: گسترش صنعت الکترونیک بر اجرایی مبتنی است از موادی به نام نیمه‌رساناها ساخته می‌شود.

گزینه ۳: جرم کل مواد در زمین تقریباً ثابت است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. خورشید تنها منبع حیات‌بخش انرژی است نه یکی از آن‌ها.

سایر گزینه‌ها، صحیح‌اند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

(۱) نادرست - چهره پنهان ردپای غذا شامل همه منابعی است که در تهیه غذا از آغاز تا سر سفره سهم دارد.

(۲) نادرست - تولید گاز گلخانه‌ای چهره پنهان ردپای غذا محسوب می‌شود.

(۳) نادرست - چهره آشکار ردپای غذا نشان می‌دهد که حدود ۳۰ درصد از غذایی که در جهان فراهم شود، مصرف نمی‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹۲

گزینه ۲: میل ترکیبی و واکنش پذیری بیشتر از CO_2 و ناپایدارتر از آن

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عبارت (آ) درست است. بررسی عبارت‌ها: ۹۳

(آ) به دلیل نزدیک بودن دمای جوش Ar و O_2 تهیه‌ی اکسیژن صد در صد خالص در تقطیر جز به جز هوای مایع دشوار است.
(ب) مهم‌ترین کاربرد هلیوم، استفاده از آن برای خنک کردن قطعات الکترونیکی در دستگاه‌های تصویربرداری همانند MRI می‌باشد.
(پ) در دمای -78°C گاز کربن‌دی‌اکسید به حالت جامد در می‌آید.
(ت) در فرایند تقطیر جز به جز هوای مایع که با کاهش دما تا -200°C همراه است He با نقطه‌ی جوش -269°C به صورت گاز باقی می‌ماند و قبل از N_2 ، O_2 و Ar که به حالت مایع هستند، جداسازی می‌شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. توسعه‌ی پایدار براساس ملاحظات اقتصادی، اجتماعی و محیط زیستی می‌باشد. تولید پلاستیک‌های پایه‌ی صنعتی و نفتی با اینکه ارزان‌قیمت هستند ولی با ملاحظات زیست‌محیطی سازگار نیستند. ۹۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فقط مورد دوم نادرست است. پلاستیک‌های سبز فقط بر پایه‌ی مواد گیاهی ساخته می‌شوند. ۹۵

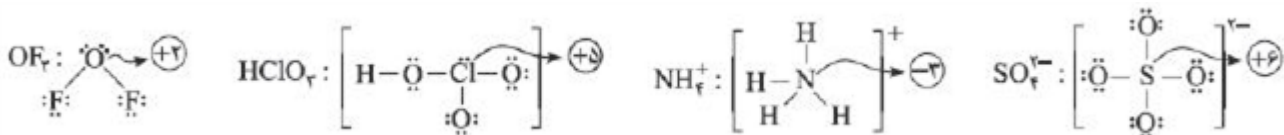
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹۶

عسل و اتیلن گلیکول، هر دو مولکول قطبی هستند و دارای گروه هیدروکسیل ($-\text{OH}$)، بنابراین توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارند، اما گریس و وازلین و روغن زیتون و بنزین، مولکول ناقطبی هستند.

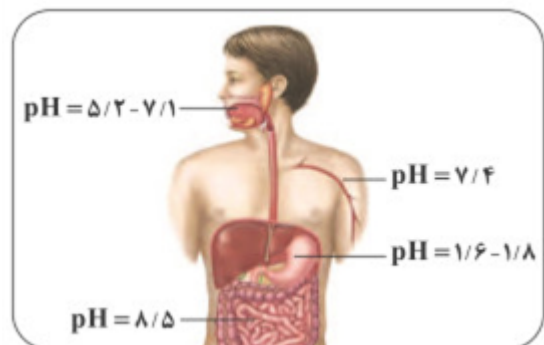
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فلزات عموماً به علت وجود دریای الکترونی، شکننده نیستند، ولی در سایر خواص مشترک هستند. ۹۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هر چهار عبارت پیشنهاد شده درست هستند. ۹۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹۹



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هر چه pH یک سامانه بیشتر باشد، نسبت غلظت مولی OH^- به H^+ در آن سامانه، بزرگ‌تر است. ۱۰۰



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا برخی عناصر مانند Au در آن یافت می‌شود. ۱۰۱

۱۰۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به جز موارد اول و آخر بقیه موارد درستند. بررسی موارد:

مورد اول: نادرست. در این مجموعه A^{3+} ضعیف‌ترین اکسنده و E^{2+} قوی‌ترین اکسنده است.

مورد دوم: درست. C و D کم‌ترین اختلاف را بین E° های دو نیم‌واکنش دارند پس سلول گالوانی حاصل از آنها، کمترین ولتاژ را ($0/29V$) ایجاد می‌کند.

مورد سوم: درست. با توجه به این که E° عنصر B از E° عنصر C کوچکتر است بنابراین در صورت ایجاد خراش، عنصر B به عنوان آند خورده شده و عنصر C محافظت می‌شود.

مورد چهارم: درست. همواره از فلز با E° بزرگتر بعنوان ظرف برای نگهداری محلول فلز با E° کوچکتر استفاده می‌شود.

$$E^\circ_{(A-E)} = 1/2 - (-1/7) = 2/9 \Rightarrow \frac{2/9}{0/6} = 4/83$$

$$E^\circ_{(D-B)} = -0/15 - (-0/75) = 0/6$$

مورد پنجم:

۱۰۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی موارد:

(آ) نادرست، سیلیس خالص در ساخت منشورها و عدسی‌ها به کار می‌رود.

(ب) درست.

(پ) درست، زیرا مواد مولکولی برخلاف سایر مواد در دمای اتاق به حالت جامد، مایع و گاز وجود دارند.

(ت) درست

(ث) درست

۱۰۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عبارت‌های ب و ت درست هستند. بررسی عبارت‌های نادرست:

(الف) گاز NO تولیدی در اگزوز خودروهای بنزینی در مجاورت مبدل کاتالیستی به سرعت به گاز N_2 مبدل می‌شود.

(ب) در مبدل‌های کاتالیستی خودروها از فلزها Pt, Pd و Rh به عنوان کاتالیزگر استفاده می‌شود.

۱۰۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها:

عبارت الف: نادرست ← زیرا روغن زیتون فاقد تعداد زیادی گروه هیدروکسیل است.

عبارت ب: درست

عبارت ج: درست

عبارت د: نادرست ← اتیلین گلیکول، اوره و نمک خوراکی در آب حل می‌شوند ولی عامل انحلال در هر سه آنها وجود گروه هیدروکسیل نمی‌باشد.

