

$$B^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow B^T = I$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(ABA^{-1})^T = AB^T A^{-1} = AIA^{-1} = I$$

۲ = مجموع درایه‌ها

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ماتریس AB سطرها مضرب یکدیگرند (مثلاً سطر اول m برابر سطح دوم است). پس

$$BA = [-m + m - 1] \Rightarrow |BA| = |[-1]| = -1$$

دترمینان آن صفر است. از طرفی:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم ماتریس $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ عضو خنثی ضرب است پس تساوی داده شده به صورت زیر است:

$$A \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{ماتریس دوم ضرب می کنیم}]{\text{طرفین را از سمت راست در وارون}} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A^{-1} برابر $\frac{11}{3} = \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + 1$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر عدد از داخل دترمینان خارج شود، به توان مرتبه ماتریس می‌رسد، یعنی:

$$|KA| = K^n |A|$$

$$|A| = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \left| 16 \times \frac{1}{2} A \right| = |8A| = 8^2 \times |A| = 64 \times \frac{1}{2} = 32$$

$$|B| = 2 \cos^2 15^\circ - 2 \sin^2 15^\circ = 2(\cos 30^\circ) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}$$

$$|3 \times \sqrt{3} B| = |3 \sqrt{3} B| = (3 \sqrt{3})^2 |B| = 27 |B| = 27 \sqrt{3}$$

$$\text{عبارت مورد نظر سؤال} = 32 + \sqrt{3}(27 \sqrt{3}) = 32 + 81 = 113$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا از طرفین رابطه داده شده دترمینان می‌گیریم. داریم:

$${}^2A = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ -2 & |A| \end{bmatrix} \Rightarrow |{}^2A| = |A|^2 + 4 \Rightarrow {}^2|A| = |A|^2 + 4 \Rightarrow |A|^2 - 4|A| + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

بنابراین حاصل عبارت صورت سؤال برابر است با:

$$\left| |A| A + \frac{A}{|A|} \right| = |{}^2A| + \left| \frac{A}{2} \right| = {}^2|A| + \left(\frac{1}{2} \right)^2 |A| = 4 \times 2 + \frac{1}{4} \times 2 = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مکان هندسی عمودمنصف پاره‌خط‌های AB و CD جواب مسئله است که این دو عمودمنصف

می‌توانند با هم موازی (صفر نقطه) یا متقاطع (یک نقطه) یا بر هم منطبق (بی‌شمار نقطه) باشند و در هیچ حالتی دو خط

عمودمنصف هم‌دیگر را در دو نقطه قطع نمی‌کنند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف a_{ij} ماتریس A به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \lambda A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda}{3} \\ -\frac{\lambda}{3} & -\frac{\lambda}{9} \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{\lambda}{3} = -4 \Rightarrow \lambda = 12$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به ویژگی $|kA| = K^3 |A|$ که A ماتریس 3×3 است. داریم:

$$|-|A||A| = (-|A|)^3 |A| = -|A|^4 = -5^4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \times A^{-1} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -25 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{درایه ها}]{\text{مجموع}} -28$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 20a - 189 \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 25a - 198 \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{فرض سوال}]{\text{باتوجه به}} (20a - 189) + 6 = 25a - 198 \Rightarrow 5a = 15 \Rightarrow a = 3$$

روش دوم:

می‌دانیم $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$

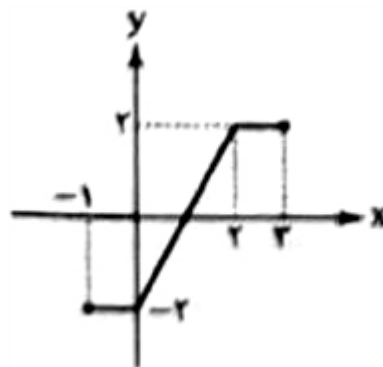
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4+1 & -2+1 & 7+1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$k+6$ k

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر سوم}} 6 - 5 \times (3-a) + 6(3-2) = 6 \rightarrow 6 - 5 \times (3-a) = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & -2 & 2 \end{array}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



این تابع در بازه $[-1, 3]$ صعودی است.

$$f(x) = f(x+1) \Rightarrow f(2x+1)$$

$$D : [-1, 1] \Rightarrow [-2, 0] \Rightarrow [-1, 0]$$

دقت کنید که برد تابع $f(2x+1)$ همان برد تابع $f(x)$ است، پس:

$$R_g = [0, 1], D_g = [-1, 0] \Rightarrow D_g \cap R_g = \{0\}$$

$$y = 2x^2 - 4x - 11 \xrightarrow{\text{چهار واحد به راست}} y = 2(x-2)^2 - 4(x-2) - 11$$

$$y = 2(x^2 - 4x + 16) - 4x + 16 - 11$$

$$\Rightarrow y = 2x^2 - 16x + 32 - 4x + 16 - 11$$

$$y = 2x^2 - 20x + 37 \xrightarrow{\text{دو واحد به پایین}} y = 2x^2 - 20x + 35$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -2x^2 + 20x - 35$$

$$M = 2(1 - \cos^2 x) - 16 \cos x + 18$$

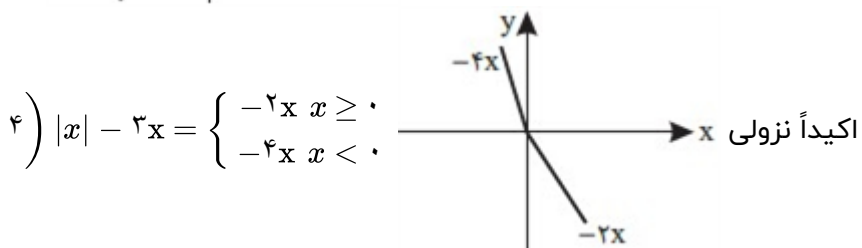
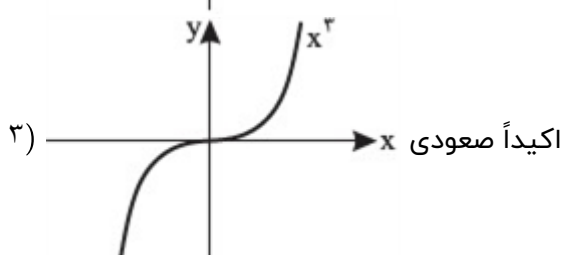
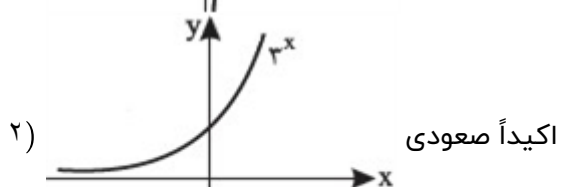
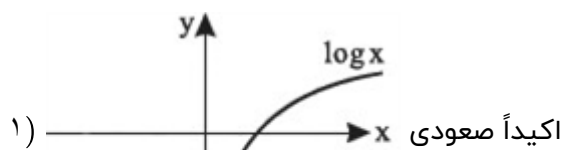
$$M = -2 \cos^2 x - 16 \cos x + 20$$

$$M = -2(\cos^2 x + 8 \cos x) + 20$$

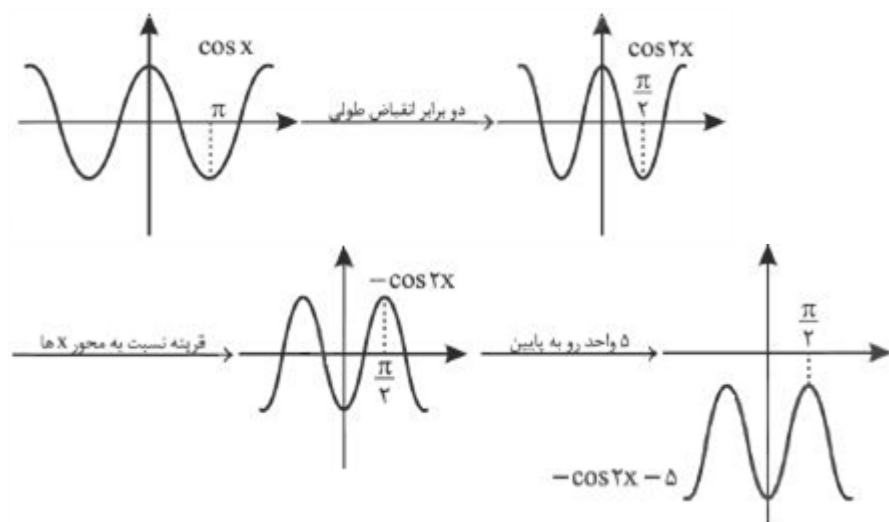
$$M = -2((\cos + 4)^2 - 16) + 20 \Rightarrow M = -2(\cos + 4)^2 + 52$$

$$\text{چون } -1 \leq \cos \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\cos x = -1} \text{Max} = 34 \\ \xrightarrow{\cos x = 1} \text{Min} = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف Max, Min} = 32$$

اگر تابعی اکیدا نزولی باشد، وارونش هم اکیدا نزولی است و برعکس.
فقط گزینه ۴ اکیدا نزولی است.



تابع را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



از نمودار تابع معلوم است که تابع در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ اکیدا صعودی است.

$$D_f = [-4, 6] \quad D_f \text{ تبدیل یافته} = [-3, 2]$$

نمودار تابع، ضمن قرینه شدن نسبت به محور x ها، دو برابر روی محور x ها فشرده شده است.

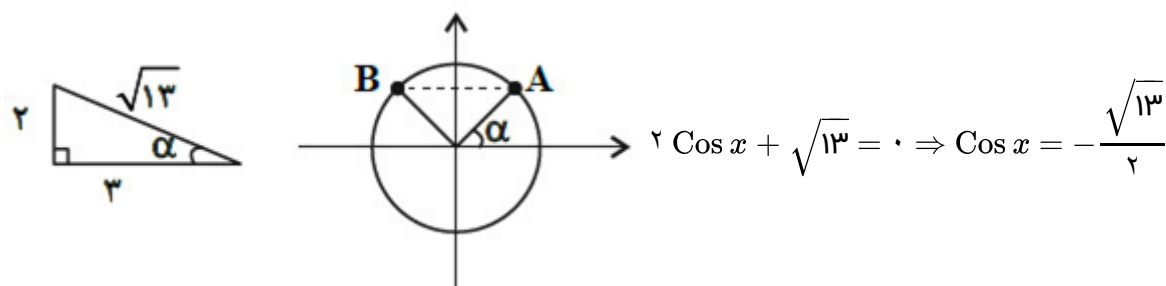
$$R_f = [-2, 3] \quad R_f \text{ تبدیل یافته} = \left[-\frac{3}{2}, 1\right]$$

نمودار تابع، ضمن قرینه شدن نسبت به محور y ها دو برابر روی محور y ها فشرده شده است. در نتیجه برد تابع نصف شده است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون حاصل ضرب چند عبارت برابر صفر است، پس باید تک تک عبارات را برابر صفر قرار

$$\sqrt{13} \sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \text{دهیم:}$$

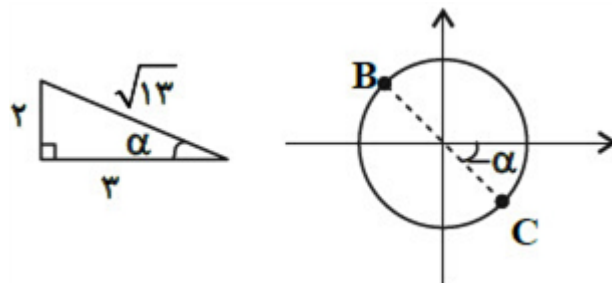
جوابهای این معادله نقاط A و B را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کند:



به این علت که $-\frac{\sqrt{13}}{2} < -1$ است، این معادله جواب ندارد.

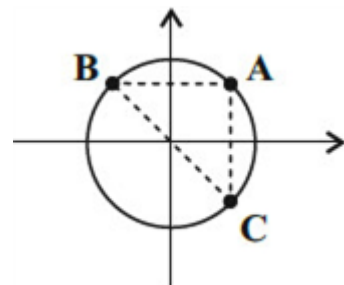
$$3 \tan x + 2 = 0 \Rightarrow \tan x = -\frac{2}{3}$$

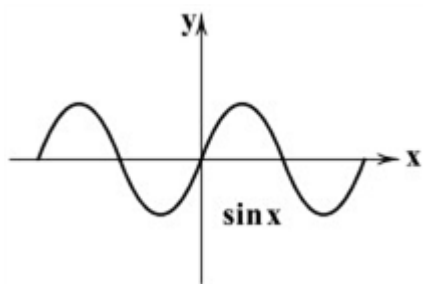
جوابهای این معادله نیز نقاط B و C را مشخص می‌کنند:



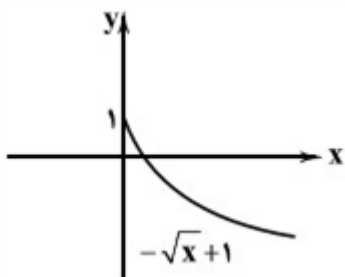
توجه: با توجه به مثلثهای قائم‌الزاویه رسم شده، نقطه B در دو معادله $\sin x = \frac{2}{\sqrt{13}}$ و $\tan x = -\frac{2}{3}$ صدق می‌کند.

بنابراین کل جوابها بر یک دایره مثلثاتی، مثلثی قائم‌الزاویه با رأس قائمه A را پدید می‌آورند:

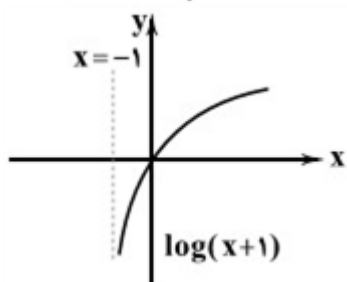




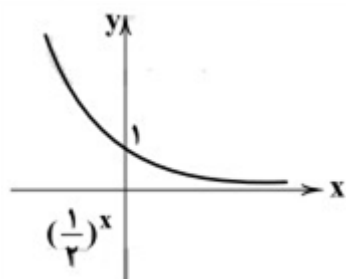
(۱) تابع $\sin x$ غیریکنوا است.



(۲) تابع $1 - \sqrt{x}$ نزولی اکید است.

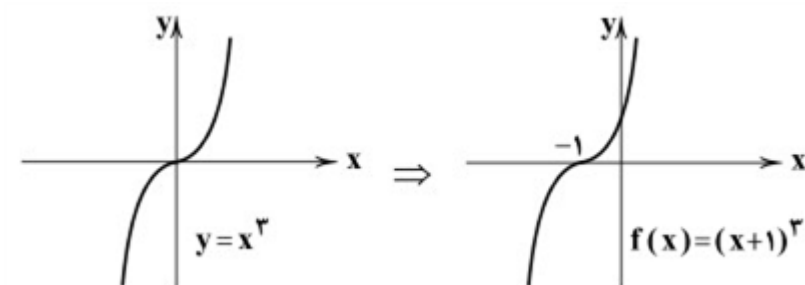


(۳) تابع $\log(x+1)$ صعودی اکید است.

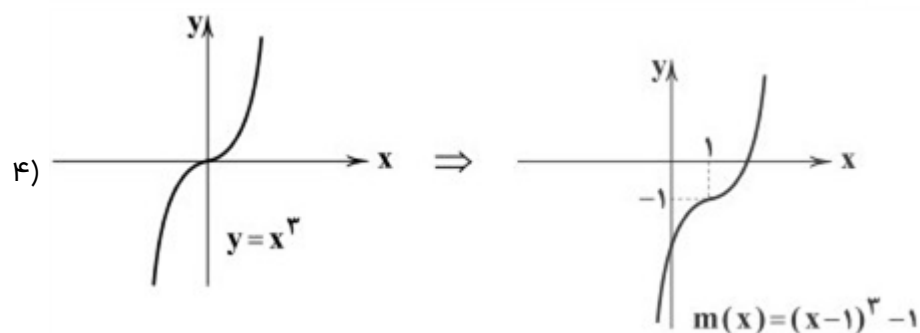
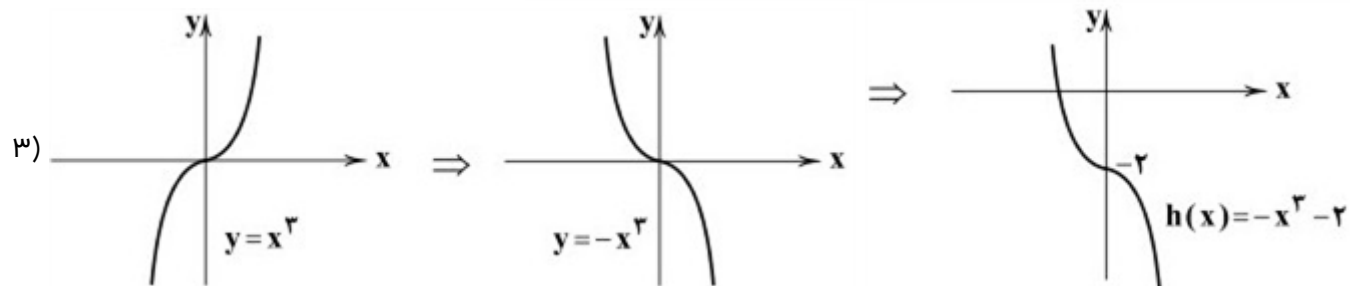
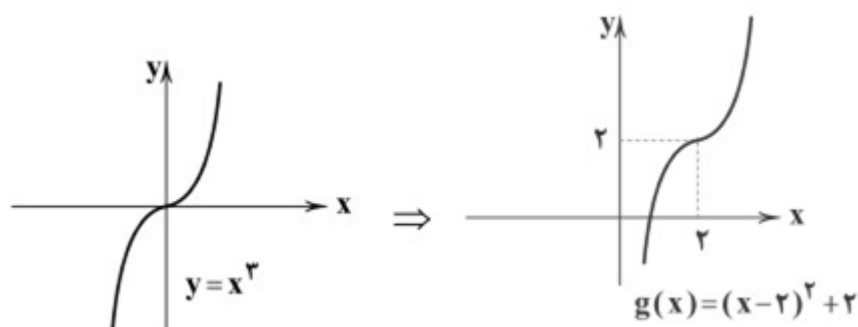


(۴) تابع $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ نزولی اکید است.

$$۱) f(x) = x^r + rx^r + rx + 1 = (x+1)^r$$

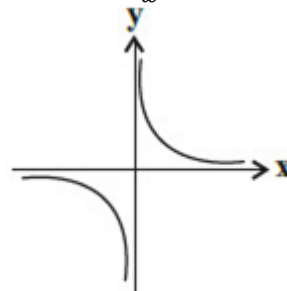


$$۲) g(x) = x^r - rx^r + 12x - r = (x-2)^r + 2$$

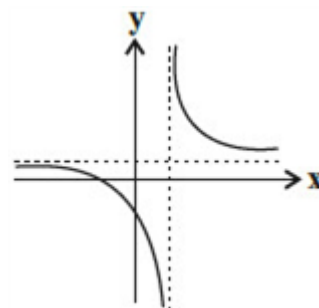


ملاحظه می‌کنید که تابع $h(x)$ از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد.

نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ به صورت زیر است.



واضح است که انتقال افقی و انتقال عمودی می‌تواند باعث عبور نمودار از چهار ناحیه‌ی صفحه‌ی مختصات شود.



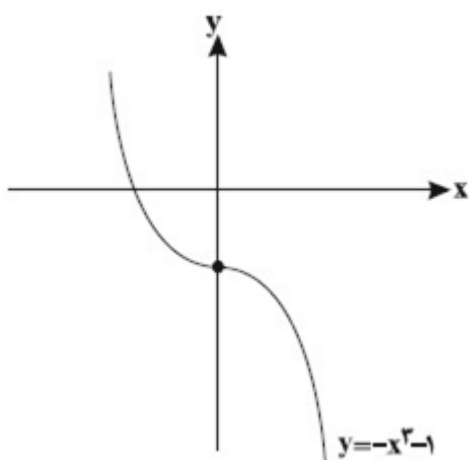
$$\cos 2x + \underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\cos 2x} = 2 \sin 2x \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$$

$$\operatorname{tg} 2x = 1$$

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

$$f(a) = 2 \Rightarrow a^2 - a^2 + b = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$f(b) = f(2) = 8 - 4a + 2 = 14 \Rightarrow 4a = -4 \Rightarrow a = -1$$



$$y = (-x + 1)^2 + 1 \xrightarrow{x \rightarrow x+1} \text{واحد به چپ}$$

$$y = (-(x+1) + 1)^2 + 1 \Rightarrow y = -x^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به پایین}} y = -x^2 + 1 - 2 = -x^2 - 1$$

همان‌طور که می‌بینید نمودار تابع $y = -x^2 - 1$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار $a > 0$ و $b < 0$ از طرفی:

$$\text{Min} = a - |b| = -\frac{b}{3} \Rightarrow a + b = -\frac{b}{3} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}b$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{|b\pi|}{3}} = \frac{6}{|b|} = a \Rightarrow ab = -6$$

$$-\frac{3}{4}b \cdot b = -6 \Rightarrow b^2 = 8 \Rightarrow \begin{matrix} b = -2 \\ a = 3 \end{matrix} \Rightarrow a - b = 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow f''(x) = -\sin x - \cos x$$

$$\Rightarrow f'(x)f''(x) = (-\sin x + \cos x)(-\sin x - \cos x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

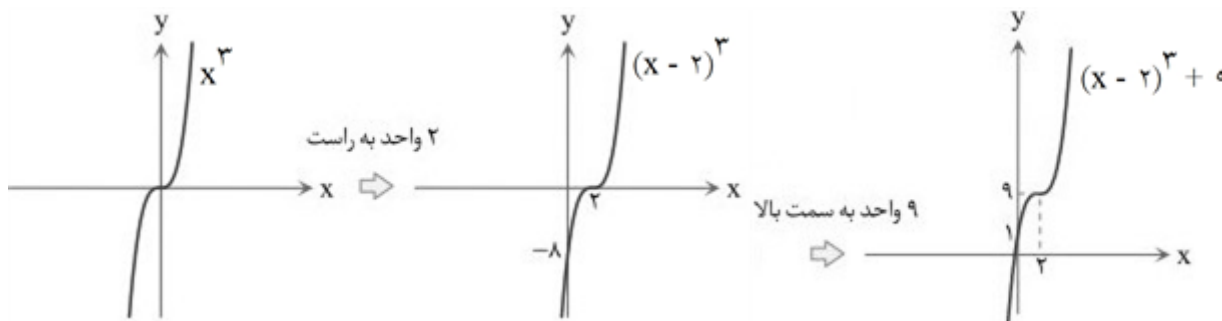
به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ ، حاصل برابر $-\frac{1}{2}$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در گزینه‌های ۳ و ۴ دوره‌ی تناوب برابر $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ است. در گزینه‌ی ۱ مقدار ماکزیمم برابر

$$5 = |-4| + 1 \text{ است؛ بنابراین تنها گزینه‌ی ۲ می‌تواند صحیح باشد.}$$

یادآوری: در تابع $y = a + b \sin(cx + d)$ یا $y = a + b \cos(cx + d)$ دوره‌ی تناوب برابر $\frac{2\pi}{|c|}$ است و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع برابر $a + |b|$ و $a - |b|$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی تابع را به شکل $f(x) = (x - 2)^3 + 9$ می‌نویسیم سپس با انتقال، آن را رسم می‌کنیم.



گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. بدیهی است نقاط $(1, 0)$ و $(0, -6)$ و $(-2, -6)$ در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ صدق می‌کنند.

$$(0, -6) \Rightarrow c = -6$$

$$(1, 0) \Rightarrow a + b - 6 = 0$$

$$(-2, -6) \Rightarrow 4a - 2b - 6 = -6 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

پس تابع داده شده به صورت $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ خواهد بود که $f(-1) = 2 - 4 - 6 = -8$ برابر است با:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 5x - 6 & x-1 \\ -x^3 + x^2 & \\ \hline x^2 + 5x - 6 & \\ -x^2 + x & \\ \hline 6x - 6 & \\ -6x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم.

۱) $a \mid b, b^x \mid ac \Rightarrow ab \mid b^x, b^x \mid ac \Rightarrow ab \mid ac \Rightarrow b \mid c$

۲) $a \mid b, b^x \mid ac \Rightarrow a^x \mid b^x, b^x \mid ac \Rightarrow a \mid c$

۳) $\begin{vmatrix} x & y \\ 4 & 9 \end{vmatrix} < 0 : a^x \mid b^y \not\Rightarrow a^x \mid b^4$

۴) $\begin{vmatrix} x & y \\ 4 & 9 \end{vmatrix} < 0 : a^x \mid b^4 \Rightarrow a^x \mid b^y$

توجه: با فرض $a^m \mid b^n$ می‌توان نتیجه گرفت که $a^y \mid a^n$ به شرطی که $\begin{vmatrix} m & n \\ x & y \end{vmatrix} \geq 0$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عددی نسبت به ۶ اول است که نه بر ۲ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳، بنابراین مجموعه‌ی مضارب ۲ را A و مضارب ۳ را مجموعه‌ی B می‌نامیم، بنابراین داریم:

$$[A] = \left[\frac{80}{2} \right] - \left[\frac{49}{2} \right] = 16$$

$$[B] = \left[\frac{80}{3} \right] - \left[\frac{49}{3} \right] = 10$$

$$[A \cap B] = \left[\frac{80}{6} \right] - \left[\frac{49}{6} \right] = 13 - 8 = 5$$

$$[A' \cap B'] = |S| - [A \cup B] = 31 - [16 + 10 - 5] = 10$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2 \equiv 0 \xrightarrow{\times 3} 9x - 6y + 6 \equiv 0 \\ 5x + 3y \equiv 0 \xrightarrow{\times 2} 10x + 6y \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow 19x + 6 \equiv 0 \Rightarrow -2x \equiv -6$$

$$\Rightarrow x \equiv 3 \Rightarrow x = 7k + 3$$

بنابراین:

$$x_{\max} = 994 + 3 = 997 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9 + 9 + 7 = 25$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم گراف ساده‌ای وجود ندارد که تعداد رأس‌های فرد آن عددی فرد باشد. بنابراین حالات الف و ب غیرممکن‌اند. توجه کنید که هریک از این ۱۹ نفر را می‌توان یک رأس گراف در نظر گرفت و در حالت الف بین هر دو نفر که دوست هستند، و در حالت ب بین هر دو نفر که حرف اول نامشان یکسان است یک یال تعریف کرد. اما مورد پ را نمی‌توان متناظر با یک گراف ساده دانست. زیرا ممکن است فرد a ، نام b را بداند ولی فرد b نام a را نداند. مورد پ غیرممکن نیست و توسط یک گراف جهت‌دار قابل نمایش است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم a و b دو عدد نامنفی باشد. داریم:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \xleftrightarrow[\text{روش بازگشتی}]{\text{اثبات به}} a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ همیشه درست}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌توان همه اعداد ۱ تا ۶ را در عبارت جایگذاری کرد (در نظر گرفتن همه حالات). تنها اعدادی

$$\text{که } \frac{n^2(n-1)^2}{4} \text{ را به عددی زوج تبدیل می‌کنند ۴ و ۵ هستند.}$$

از طرفی با اثبات مستقیم می‌توان نشان داد که $4|n$ یا $4|n-1$ ، اما هیچ‌کدام را به تنهایی نمی‌توان نتیجه گرفت.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$110 \equiv 59^m \Rightarrow m|110-59 \Rightarrow m|51 = 3 \times 17 \Rightarrow m = 3 \text{ یا } 17$$

$$\begin{cases} m=3 \Rightarrow 3^3 \equiv 27 \\ m=17 \Rightarrow 17^{17} \equiv 7^{17} \equiv 7 \end{cases}$$

که در هر دو حالت رقم یکان ۷ است.

$$\begin{cases} a^{rk+r} \equiv a^r \\ 1 \leq r \leq 4 \end{cases} \text{ توجه:}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$a = 100q + \frac{q^r}{3}, 0 \leq \frac{q^r}{3} < 100$$

$$\frac{q^r}{3} < 100 \Rightarrow q^r < 300 \Rightarrow q < \sqrt[6]{300} \rightarrow q = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{cases}$$

اما q باید مضرب ۳ باشد در نتیجه $q = 3, 6$

گزینه ۱ پاسخ درست است. $q \Rightarrow p$ تنها زمانی دارای ارزش نادرست خواهد بود که مقدم آن درست و تالی آن نادرست باشد، یعنی:

$$q \equiv T$$

$$p \equiv F$$

در $r \Rightarrow p$ ارزش تالی نادرست است. پس برای این که ارزش ترکیب شرطی درست باشد، داریم:
بررسی ارزش گزینه‌ها:

$$۱) ((\sim P \wedge r) \Rightarrow \sim q) \equiv ((T \wedge F) \Rightarrow F) \equiv (F \Rightarrow F) \equiv T$$

F

$$۲) ((q \vee p) \Rightarrow r) \equiv ((T \vee F) \Rightarrow F) \equiv (T \Rightarrow F) \equiv F$$

T

$$۳) ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \equiv ((F \Rightarrow T) \Rightarrow F) \equiv (T \Rightarrow F) \equiv F$$

T

$$۴) (r \Rightarrow p) \wedge \sim q \equiv (F \Rightarrow F) \wedge F \equiv T \wedge F \equiv F$$

T

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} A &= 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \\ B &= 2^5 \times 3^2 \times 4^a \times 11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (A, B) = 2^2 \times 3^2 \times 5^{\min(a, 2)}$$

تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک مثبت و غیر یک (A, B) برابر ۲۳ است و پس تعداد کل مقسوم‌علیه‌های مشترک مثبت

$$\text{آن‌ها } 24 = 23 + 1 \text{ تا است و بنابراین: } (3 + 1)(2 + 1)(\min\{a, 2\} + 1) = 24$$

اگر $\min\{a, 2\} = 3$ نامساوی فوق برقرار نیست پس $a = 1$ و بدین ترتیب داریم:

$$B = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

$$\text{کم}.. [A, B] = 2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 11$$

و تعداد تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت ک.م.م برابر است با:

$$(5 + 1)(4 + 1)(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 720$$

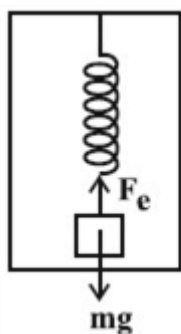
$$\left\{ \begin{aligned} N &= P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \dots \times P_n^{\alpha_n} \\ \text{توجه: اگر } P_i &\text{ عدد اول} \end{aligned} \right.$$

باشد، آن‌گاه تعداد مقسوم‌علیه مثبت N برابر است با:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مسئله را در دو حالت گفته شده بررسی می‌کنیم.

در حالت حرکت با سرعت ثابت خواهیم داشت:

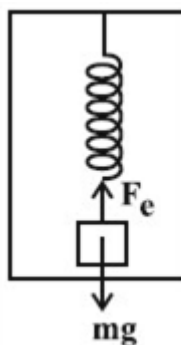


$$\vec{F}_{\text{net}} = 0 \Rightarrow F_e = mg \Rightarrow k\Delta L = mg$$

$$\Delta L = \frac{2 \times 10}{40} = 0.5 \text{ cm} \Rightarrow L - L_0 = 0.5$$

$$L_0 = 10 \text{ cm} \longrightarrow L = 10.5 \text{ cm}$$

در حالت حرکت شتابدار گفته شده، داریم:



$$F_e - mg = ma \Rightarrow F_e = m(g + a) = 2(10 + 2) = 24 \text{ N}$$

$$\xrightarrow{F_e = k\Delta L} 40 \times \Delta L = 24 \Rightarrow \Delta L = 0.6 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow L' - L_0 = 0.6 \text{ cm} \xrightarrow{L_0 = 10 \text{ cm}} L' = 10.6 \text{ cm}$$

$$\frac{L}{L'} = \frac{10.5}{10.6} = \frac{105}{106}$$

حال نسبت خواسته شده را حساب می‌کنیم:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{W_h}{W_o} = \left(\frac{R_e}{R_e + h} \right)^2 = \left(\frac{6400}{6400 + 3600} \right)^2 \Rightarrow \frac{W_h}{250 \times 10} = \left(\frac{16}{25} \right)^2 \Rightarrow W_h = 1024 \text{ N}$$

$$x(t) = x_0 \Rightarrow Ax = 0$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر t لحظه عبور مجدد از مکان اولیه باشد:

بنابراین مجموع جبری سطح محصور بین نمودار سرعت با محور زمان از لحظه ۰ تا t باید صفر شود:

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0 \Rightarrow |S_3| = S_1 + S_2$$

چون قاعده مثلث S_1 ، سه برابر S_2 است:

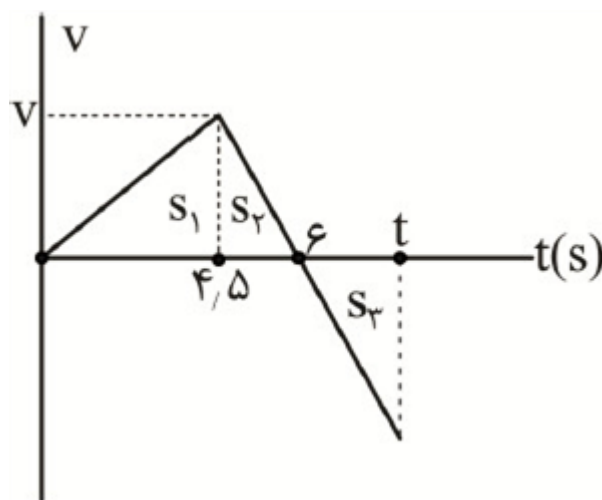
$$\frac{4/5}{6 - 4/5} = 3$$

در حالی که ارتفاع ۷ برابر دارند.

$$\frac{|S_3|}{S_2} = \frac{S_1 + S_2}{S_2} = \frac{3S_2 + S_2}{S_2} = 4$$

دو مثلث S_2 و S_3 متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها با مربع نسبت اضلاع قائمه برابر است:

$$\frac{|S_3|}{S_2} = \left(\frac{t - 6}{6 - 4/5} \right)^2 \Rightarrow 4 = \left(\frac{t - 6}{1/5} \right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{t - 6}{1/5} \Rightarrow t = 9s$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار مکان - زمان اولاً باید تابع باشد پس گزینه‌ی (۱) غلط است. ثانیاً باید شیب نمودار در هیچ نقطه‌ای ∞ نشود پس گزینه‌ی (۲) غلط است. ثانیاً باید پیوسته باشد. پس گزینه‌ی (۳) هم غلط است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\Delta x = v \Delta t$$

$$120 = 60 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 2h$$

مدت زمان ۲ ساعت طول می‌کشد که پرنده به ایستگاه قطار برسد، در این مدت قطار به اندازه‌ی d_1 به سمت ایستگاه در حرکت بوده است.

$$d_1 = 40 \times 2 = 80 \text{ km}$$

$$L_1 = 120 - d_1 = 40 \text{ km} : t_1 \text{ فاصله‌ی قطار از ایستگاه در لحظه‌ی } t_1$$

پرنده به سمت قطار حرکت می‌کند و پس از t_2 به قطار می‌رسد:

$$L_1 = |\Delta x_{\text{قطار}}| + |\Delta x_{\text{پرنده}}| \Rightarrow 40 = 40 \cdot t_2 + 60 \cdot t_2 = 100 t_2$$

$$t_2 = 0.4h$$

در این مدت قطار به اندازه‌ی $40 \cdot t_2$ به ایستگاه نزدیک‌تر شده و فاصله‌ی قطار تا ایستگاه در این لحظه:

$$L_2 = L_1 - 40 \cdot t_2 = 40 - 40 \times 0.4 \Rightarrow L_2 = 24 \text{ km}$$

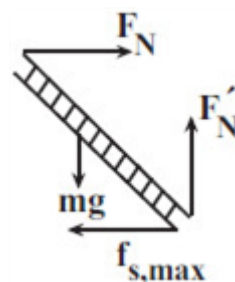
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. آسانسور با شتاب ثابت در حال حرکت است و نردبان در آستانه لغزش است. بنابراین با توجه به این که دیوار قائم بدون اصطکاک است بنابراین نیروی اصطکاک با نیروی سطح دیوار قائم وارد بر نردبان برابر است:

$$f_{s,\max} = F'_N \mu_s \xrightarrow{f_{s,\max} = F'_N = 36 N} F'_N = \frac{36}{0.5} = 72 N$$

از آنجا که $F'_N < W$ بنابراین شتاب حرکت آسانسور به سمت پایین است. با نوشتن قانون دوم نیوتن برای نردبان در راستای قائم داریم: (جهت پایین را مثبت فرض می‌کنیم).

$$mg - F'_N = ma \xrightarrow{m=12 \text{ kg}, g=10 \frac{N}{\text{kg}}} 120 - 72 = 12a \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}$$

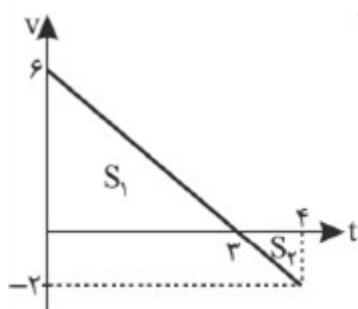
چون آسانسور به سمت پایین در حال حرکت است و جهت شتاب آن نیز به سمت پایین است، بنابراین نوع حرکت آسانسور تندشونده است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هنگامی که بازیکن با پای خود به توپ ضربه می‌زند، به توپ انرژی جنبشی اولیه می‌دهد. پس از جدا شدن توپ از پای بازیکن، اگر مقاومت هوا را اندک فرض کنیم، می‌توان گفت تقریباً نیروی خالص در راستای حرکت توپ بر آن وارد نمی‌شود؛ در نتیجه طبق خاصیت لختی در توپ که ناشی از قانون اول نیوتون است، توپ هم چنان حالت حرکت رو به جلوی خود را حفظ می‌کند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

بهترین روش برای حل این مسأله رسم نمودار سرعت - زمان است.



$$L = |S_1| + |S_2| \text{ مسافت طی شده}$$

$$= \frac{6 \times 3}{2} + \frac{1 \times 2}{2} = 10 \text{ m}$$

$$d = s_1 - s_2 = 9 - 1 = 8 \text{ m} \text{ جابه‌جایی}$$

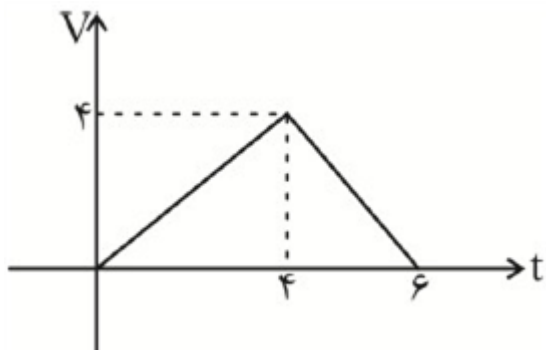
$$\frac{S_{av}}{V_{av}} = \frac{L}{d} = \frac{10}{8} = 1.25$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا شتاب را در دو سطح حساب می‌کنیم:

$$\text{سطح ۱: } f_{k_1} = \mu_k \times N = 0/2 \times 50 = 10 \Rightarrow a_1 = \frac{F_{\text{net}}}{m} = \frac{15 - 10}{5} = 1 \frac{m}{s^2}$$

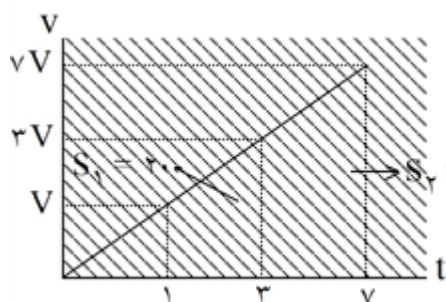
$$\text{سطح ۲: } f_{k_2} = \mu_k \times N = 0/5 \times 50 = 25 \Rightarrow a_2 = \frac{F_{\text{net}}}{m} = \frac{15 - 25}{5} = -2 \frac{m}{s^2}$$

برای به دست آوردن مسافت طی شده از سطح زیر نمودار $(v - t)$ استفاده کرد.



$$\Delta x = s = \frac{6 \times 4}{2} = 12m$$

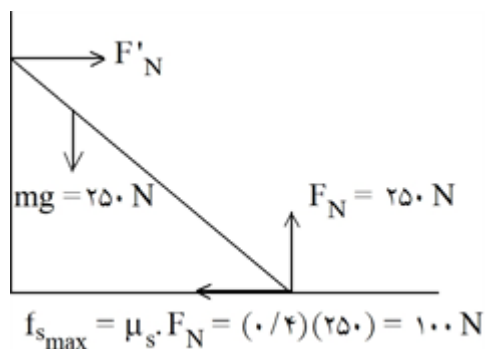
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون شیب خط ثابت است سرعت در لحظه‌های s_1, s_2, s_3 مطابق شکل است.



$$S_1 = \frac{4V \times 2}{2} = 20 \Rightarrow V = 5 \frac{m}{s}$$

$$S_2 = \frac{10V \times 4}{2} = 20V = 100m$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$R = 50 \sqrt{29} N$$

$$F_N = 250 = 50(5)$$

$$f_{s_{\text{max}}} = 100 = W(2)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با دقت در نمودار مکان متحرک A، متوجه می‌شویم که این متحرک، از مکان $x_0 = +20\text{ m}$ حرکت خود را آغاز کرده و در ثانیه‌های متوالی، جابه‌جایی‌های یکسانی را طی کرده است؛ بنابراین حرکتش با سرعت ثابت (یکنواخت) می‌باشد. در این حالت با محاسبه سرعت متحرک، معادله مکان - زمان آن را می‌نویسیم:

$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 1\text{ s}]{\Delta x = 20 - 20 = 10\text{ m}} v_A = \frac{10}{1} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_A = v_A t + x_0 \xrightarrow[v_A = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}]{x_0 = 20\text{ m}} x_A = 10t + 20$$

همچنین، با دقت در نمودار مکان متحرک B، متوجه می‌شویم که این متحرک، از مکان $x_0 = 0$ حرکت خود را آغاز کرده و در ثانیه‌های متوالی، جابه‌جایی‌های آن یک دنباله عددی را تشکیل می‌دهد. یعنی حرکتش با شتاب ثابت است. بنابراین به کمک رابطه جابه‌جایی در t ثانیه n ام $\left(\Delta x = \frac{1}{2} a (2n - 1) t^2 + v_0 t \right)$ شتاب و سرعت اولیه متحرک B را می‌یابیم و معادله حرکتش را می‌نویسیم:

$$(n = 1) \text{ جابه جایی در ثانیه اول} : \Delta x_1 = \frac{1}{2} a (2 \times 1 - 1) t^2 + v_0 t \xrightarrow[\Delta x_1 = 3\text{ m}]{t = 1\text{ s}} 3 = \frac{1}{2} a + v_0$$

$$(n = 2) \text{ جابه جایی در ثانیه دوم} : \Delta x_2 = \frac{1}{2} a (2 \times 2 - 1) t^2 + v_0 t \xrightarrow[\Delta x_2 = 5\text{ m}]{t = 1\text{ s}} 5 = \frac{3}{2} a + v_0$$

$$\text{با حل دستگاه دو معادله - دو مجهول} \begin{cases} \frac{1}{2} a + v_0 = 3 \\ \frac{3}{2} a + v_0 = 5 \end{cases} \text{ کمیت‌های } a \text{ و } v_0 \text{ برای متحرک B به دست می‌آید:}$$

$$\begin{cases} a_B = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ v_{0,B} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

بنابراین، معادله مکان - زمان متحرک B برابر است با:

$$x_B = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 = \frac{1}{2} \times 2 t^2 + 2t + 0 \Rightarrow x_B = t^2 + 2t$$

در آخر، چون در لحظه‌ای که این دو متحرک به یکدیگر می‌رسند $x_A = x_B$ است، می‌توان نوشت:

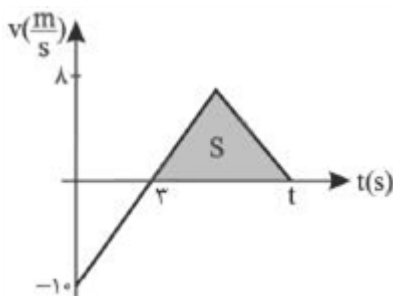
$$x_A = x_B \Rightarrow 10t + 20 = t^2 + 2t \Rightarrow t^2 - 8t - 20 = 0 \Rightarrow (t + 2)(t - 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 10\text{ s} \\ t = -2\text{ s} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

در نتیجه مکانی که دو متحرک از کنار هم عبور می‌کنند برابر است با:

$$x_B = x_A = 10t + 20 \xrightarrow{t = 10\text{ s}} x_B = x_A = 10 \times 10 + 20 = 120\text{ m}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

بازه‌ای که متحرک در جهت محور حرکت می‌کند، بازه رنگی است.



$$\bar{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}(4-3)}{(4-3)} \Rightarrow v_{av} = \frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

چون نمودار مکان-زمان یک خط راست شیبدار است، حرکت با سرعت ثابت بر خط راست است، در این حرکت داریم:

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

یعنی سرعت متوسط در هر بازه زمانی دلخواه برابر سرعت لحظه‌ای است.

$$v_{av. \dots} = \frac{0 - (-12)}{3 - 0} = 4 \frac{m}{s}$$

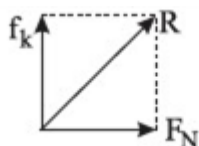
ابتدا $f_{s,max}$ را محاسبه و با نیروی mg مقایسه می‌کنیم.

$$F_N = 40 N \text{ و } F_{s,max} = \mu_s F_N = 20 N$$

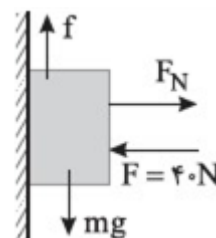
$$mg = 30 N$$

$mg > f_{s,max} \Rightarrow$ جسم به سمت پایین حرکت می‌کند f_k داریم

$$f_k = \mu_k F_N = 10 N$$



$$R = \sqrt{f_k^2 + F_N^2} = 10 \sqrt{17}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شتاب حرکت در حالت $F = 40\text{ N}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f_k = \frac{F_N}{\mu_k} = 40 \times 0.6 = 24\text{ N}$$

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow 40 - 24 = 4a_1 \Rightarrow a_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

سرعت متحرک در پایان این مرحله برابر است با:

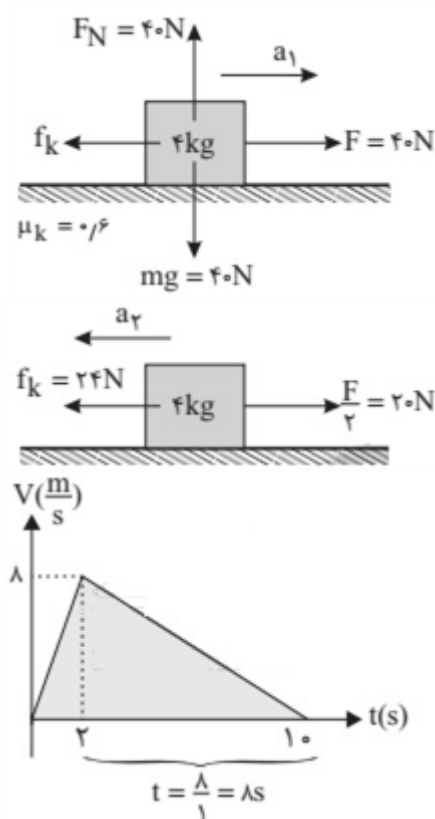
$$V = at + V_0 = 4 \times 2 + 0 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حالا شتاب حرکت پس از نصف شدن نیروی F را به دست می‌آوریم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow 20 - 24 = 4a_2 \Rightarrow a_2 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

چون در این حالت نیروی محرک کوچک‌تر از نیروی اصطکاک است، شتاب منفی و حرکت کندشونده است. می‌توانیم برای محاسبه‌ی مسافت طی شده نمودار $V - t$ را از لحظه‌ی شروع حرکت تا لحظه‌ی توقف آن رسم کنیم:

$$\Delta x = \text{مساحت ناحیه رنگی} = \frac{8 \times 10}{2} = 40\text{ m}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با داشتن a ، v_0 و v ، از معادله‌ی سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) استفاده می‌کنیم.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow[v_0=0, v=16 \frac{\text{m}}{\text{s}}]{a=4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} 16^2 - 0 = 2 \times 4 \times \Delta x \Rightarrow \Delta x = 32\text{ m}$$

$$x_0 = 0 \rightarrow x = 32\text{ m}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا با توجه به نمودار مکان - زمان‌های داده شده، معادله‌ی مکان - زمان هر کدام را می‌نویسیم. چون نمودارها به صورت خط راست است، هر دو متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. بنابراین داریم:

$$v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta x_B = 0 - 45 = -45m]{\Delta t = 15s} v_B = \frac{-45}{15} = -3 \frac{m}{s}$$

$$x_B = v_B t + x_{0,B} \xrightarrow{x_{0,B} = 45m} x_B = -3t + 45$$

از طرف دیگر، چون دو متحرک در مکان $x = 15$ به هم رسیده‌اند، زمان این لحظه را می‌یابیم:

$$x_B = -3t + 45 \Rightarrow 15 = -3t + 45 \Rightarrow t = 10s$$

بنابراین مطابق نمودار، در لحظه‌ی $t = 10s$ ، متحرک A در مکان $x = 15m$ است. پس، سرعت متحرک A و به دنبال آن، معادله‌ی حرکتش را پیدا می‌کنیم.

$$x_A = v_A t + x_{0,A} \xrightarrow[x_{0,A} = -25m]{x_A = 15m, t = 10s} 15 = v_A \times 10 - 25 \Rightarrow v_A = 4 \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow x_A = 4t - 25$$

با توجه به این‌که باید فاصله‌ی دو متحرک کمتر از $20m$ باشد، می‌توان نوشت:

$$|x_B - x_A| \leq 20m \Rightarrow \begin{cases} -3t + 45 - 4t + 25 \leq 20 \\ 4t - 25 + 3t - 45 \leq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7t + 70 \leq 20 \\ 7t - 70 \leq 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 50 \leq 7t \\ 90 \geq 7t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq \frac{50}{7}s \\ t \leq \frac{90}{7}s \end{cases} \Rightarrow \frac{50}{7}s \leq t \leq \frac{90}{7}s$$

می‌بینیم در بازه‌ی زمانی $\frac{50}{7}s$ تا $\frac{90}{7}s$ ، یعنی به مدت $\frac{40}{7}s$ در فاصله‌ی کمتر از $20m$ نسبت به هم قرار دارند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون نمودار مکان - زمان داده‌شده بخشی از یک سهمی است، بنابراین حرکت متحرک، یک حرکت با شتاب ثابت است، پس با کمک نمودار، معادله‌ی مکان - زمان این متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

از صفر بودن شیب خط مماس بر نمودار در لحظه‌ی $t = 0$ می‌توان نتیجه گرفت که $v_0 = 0$ است. مکان متحرک در لحظه‌ی $(x_0) t = 0$ ، برابر با 20 متر می‌باشد، پس معادله‌ی مکان - زمان این متحرک به صورت زیر است:

$$x = \frac{1}{2} at^2 + 0 \times t + 20 \Rightarrow x = \frac{1}{2} at^2 + 20$$

از نمودار مشخص است که مکان متحرک در لحظه‌ی $t = 2s$ برابر صفر است، بنابراین با جایگذاری این نقطه در معادله‌ی مکان - زمان داریم:

$$0 = \frac{1}{2} \times a \times 2^2 + 20 \Rightarrow a = -10 \frac{m}{s^2}$$

به کمک مقادیر شتاب و سرعت اولیه، معادله‌ی سرعت - زمان این متحرک را تشکیل داده و لحظه‌ی $t = 2s$ ، یعنی لحظه‌ی رسیدن به مبدأ مکان را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -10 \times 2 + 0 = -20 \frac{m}{s}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی متحرک را در

بازه‌های زمانی یکسان و متوالی T به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{\Delta x'}{T} \xrightarrow{v_2 = v_1 + aT} \frac{(v_1 + aT) + (v_1 + aT)}{2} = \frac{\Delta x'}{T}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) T + aT^2 = \Delta x' \xrightarrow{\left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) T = \Delta x} \Delta x' = \Delta x + aT^2$$

$$\Rightarrow \Delta x_n = \Delta x + naT^2$$

در این سؤال $T = 4s$ و $n = \frac{20}{4} = 5$ بنابراین داریم:

$$5^2 = 12 + 5aT^2 \Rightarrow aT^2 = 8m$$

$$\overline{AB} = \Delta x + (\Delta x + aT^2) + (\Delta x + 2aT^2) + \dots + (\Delta x + 5aT^2)$$

$$= 6\Delta x + aT^2(1 + 2 + \dots + 5) \xrightarrow[\substack{\Delta x = 12m \\ aT^2 = 8m}}{\overline{AB}} = 6 \times 12 + 8 \times 15 = 192m$$

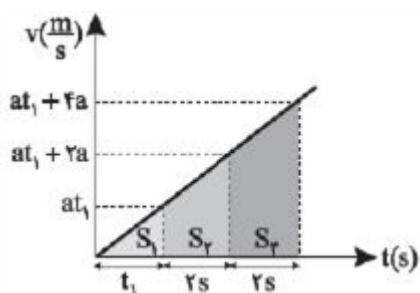
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$v = -10 \frac{m}{s}, t = 5s, \Delta x = 25m$$

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt \Rightarrow 25 = -\frac{1}{2} \times a \times 5^2 - 10 \times 5$$

$$\Rightarrow a = -6 \frac{m}{s^2} \Rightarrow |a| = 6 \frac{m}{s^2}$$

ابتدا نمودار سرعت-زمان این متحرک را رسم می‌کنیم:



می‌دانیم سطح محصور بین منحنی سرعت-زمان و محور زمان، جابه‌جایی است پس:

$$S_2 = 10m, S_3 = 14m$$

$$S_2 = 10 \Rightarrow \left(\frac{2at_1 + 2a}{2} \right) \times 2 = 10 \Rightarrow 2at_1 + 2a = 10$$

$$S_3 = 14 \Rightarrow \left(\frac{2at_1 + 4a}{2} \right) \times 2 = 14 \Rightarrow 2at_1 + 4a = 14$$

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$2at_1 + 2a = 10 \Rightarrow 2t_1 + 2 = 10 \Rightarrow t_1 = 4s$$

فاصله 0 تا A سطح S_1 است.

$$OA = S_1 = \frac{at_1 \times t_1}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8m$$

راه‌حل دوم: اگر سرعت متحرک در A را v_A فرض کنیم داریم:

$$AB: \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_A t \Rightarrow 10 = \frac{1}{2}a \times (2)^2 + v_A \times 2 \Rightarrow 10 = 2a + 2v_A \Rightarrow v_A + a = 5$$

$$AC: \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_A t \xrightarrow[t=4s]{t=2s} 24 = \frac{1}{2}a(4)^2 + v_A \times 4$$

$$\Rightarrow 24 = 8a + 4v_A \Rightarrow v_A + 2a = 6$$

$$\begin{cases} v_A + a = 5 \\ v_A + 2a = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \frac{m}{s^2}, v_A = 4 \frac{m}{s}$$

$$OA: v_0 = 0, v_A = 4 \frac{m}{s}, a = 1 \frac{m}{s^2}$$

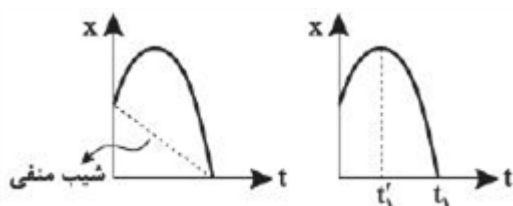
$$v_A^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 16 - 0 = 2 \times 1 \times \Delta x \Rightarrow \Delta x = 8m$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

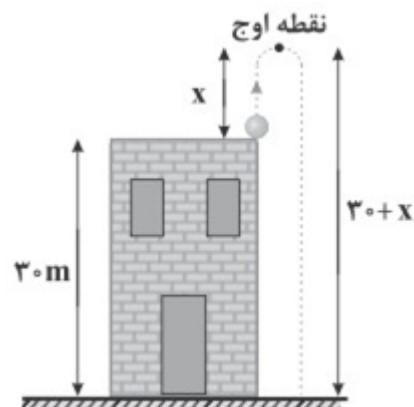
مورد «ب» نادرست است زیرا متحرک ابتدا در لحظه t_1 جهتش تغییر می‌کند و در کل زمان حرکت بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

مورد «ج» نادرست است زیرا شیب خط واصل بین نقطهٔ ابتدا و انتهای حرکت منفی است.

موارد «الف» و «د» درست هستند.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل زیر، فرض می‌کنیم فاصله‌ی نقطه‌ی اوج گلوله (حداکثر ارتفاع گلوله از سطح زمین) تا لبه‌ی ساختمان برابر x باشد، در این صورت می‌توان نوشت:



فاصله‌ی نقطه‌ی اول و آخر = اندازه‌ی جابه‌جایی $d = 30\text{m}$

مسافت: $l = x + (30 + x) = 30 + 2x$

در ادامه چون تندی متوسط گلوله، ۵۰ درصد بزرگ‌تر از اندازه‌ی سرعت متوسط آن است، مسافت طی‌شده نیز ۵۰ درصد بیشتر از اندازه‌ی جابه‌جایی است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{l}{d} = \frac{150}{100} \Rightarrow \frac{30 + 2x}{30} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 7/5\text{m}$$

$$30 + x = 30 + 7/5 = 37/5\text{m}$$

بنابراین حداکثر ارتفاع گلوله از سطح زمین برابر است با:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۵

اگر ثانیه سوم $\Delta t'$ و ۰/۲ ثانیه اول Δt فرض شود، می‌دانیم Δv در حرکت سقوط آزاد برابر است با $\Delta v = g\Delta t$ ، بنابراین داریم:

$$\frac{\Delta v'}{\Delta v} = \frac{g \cdot \Delta t'}{g \cdot \Delta t} = \frac{1}{0.2} = 5$$

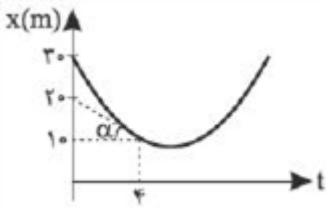
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۶

$$\text{برای واگن جدا شده} \begin{cases} v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta x = 80\text{m} \quad \Delta x = \left(\frac{v+v_1}{2} \right) \times t \\ v = 0 \\ t = ? \end{cases}$$

$$\Rightarrow 80 = \frac{20}{2} \times t \Rightarrow t = 8\text{s}$$

$$t = 8 \text{ در } \Delta x = vt - 5 \Rightarrow \Delta x = 160\text{m}$$

شیب خط مماس بر منحنی مکان-زمان در $t = ۴$ همان سرعت در لحظه $t = ۴$ s است، بنابراین:



$$v_{t=۴} = \tan \alpha = \frac{-۱۰}{۴} = -۲/۵ \frac{m}{s}$$

(دقت شود مماس رو به پایین است و شیب باید منفی باشد.)

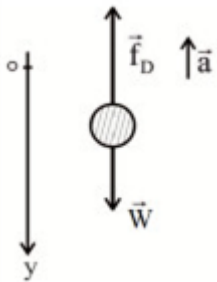
حال می‌توان با استفاده از رابطه مستقل از شتاب $\left(\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t \right)$ ، مقدار تندی اولیه به دست می‌آید.

$$\Delta x = ۱۰ - ۳۰ = -۲۰ \text{ m} \quad \text{جابه‌جایی در } ۴ \text{ s اول:}$$

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t \Rightarrow -۲۰ = \frac{v_1 - ۲/۵}{2} \times ۴ \Rightarrow v_1 = -۷/۵ \frac{m}{s} \Rightarrow S = ۷/۵ \frac{m}{s}$$

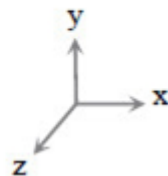
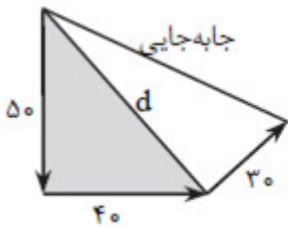
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در حالتی که چتر باز خود را باز کرده و به تندی حدی خود نرسیده است، به دلیل بزرگتر بودن اندازه نیروی مقاومت هوا نسبت به وزن چتر باز، جهت بردار شتاب رو به بالا است.



$$F_{\text{net}} = ma \rightarrow W - f_D = ma \rightarrow f_D = ۸۰ \times ۱۰ - ۸۰ \times (-۰/۱۵) \rightarrow f_D = ۸۱۲ \text{ N}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دقت کنیم که در فضای ۳ بعدی، شمال و بالا تفاوت دارند.



$$\text{جابه‌جایی} = \sqrt{d^2 + ۳۰^2} = \sqrt{(۴۰^2 + ۵۰^2) + ۳۰^2}$$

$$\text{جابه‌جایی} = \sqrt{۱۶۰۰ + ۲۵۰۰ + ۹۰۰} = \sqrt{۵۰۰۰} = ۵۰\sqrt{۲}$$

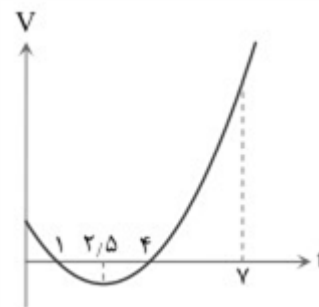
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معادله‌ی مستقل از زمان را با این معادله تطبیق می‌دهیم:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= 2ax + v_1^2 \\ v^2 &= ۱۰x + ۳۶ \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2a &= ۱۰ \Rightarrow a = ۵ \frac{m}{s^2} \\ v_1^2 &= ۳۶ \Rightarrow v_1 = \pm \frac{m}{s} \end{aligned} \right.$$

با توجه به اینکه در $t = ۰$ متحرک خلاف جهت محور x حرکت کرده است، معادله‌ی مکان آن برابر است با:

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_1 t, t = +\frac{5}{2} t^2 - ۶t \rightarrow x_5 = ۶۲/۵ - ۳۰ = ۳۲/۵$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار این سهمی را رسم می‌کنیم. در زمان‌هایی که نمودار به محور t نزدیک می‌شود و حرکت کندشونده است.



$$V = t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4)$$

$$t = (1 - 0) + (4 - 2/5) = 2/5 \text{ s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بزرگی نیروی متوسط از رابطه $F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} p(4) = 4^3 - 6 \times 4 - 11 = 29 \frac{\text{kgm}}{\text{s}} \\ p(2) = 2^3 - 6 \times 2 - 11 = -15 \frac{\text{kgm}}{\text{s}} \end{cases} \rightarrow F_{av} = \frac{29 - (-15)}{2} = 22 \text{ N}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. رابطه $\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ یک تفاضل برداری است، هر گاه دو بردار در خلاف جهت یکدیگر باشند، بزرگی بردار تفاضل آنها، برابر مجموع اندازه‌های آنها است:

$$\Delta p = p_2 + p_1 = m(v_2 + v_1) = 2(6 + 8) = 28 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

در لحظه‌ای که $f_D > W$ است، چتر باز هنوز چتر باز نکرده است و در حال حرکت تندشونده است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار ارایه شده در متن سوال، مشخص است که شتاب متحرک در بازه‌ی زمانی نشان داده شده همواره مثبت است. برای به‌دست آوردن علامت سرعت سطح زیر منحنی را در فاصله‌ی زمانی نشان داده شده به‌دست می‌آوریم.

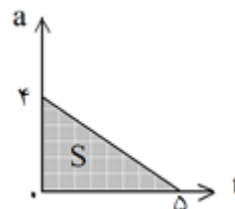
$$S = \Delta V_x = \frac{4 \times 5}{2} = 10 \text{ m/s}$$

$$\Delta V_x = 10 \text{ m/s} \rightarrow V_x - V_{x,0} = 10 \text{ m/s} \rightarrow V_x - (-6) = 10 \text{ m/s} \rightarrow V_x = 4 \text{ m/s}$$

بنابراین سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = 0$ برابر -6 m/s است و در لحظه‌ی $t = 5 \text{ s}$ برابر 4 m/s است. در نتیجه سرعت

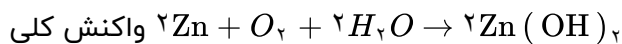
متحرک ابتدا منفی و سپس مثبت شده است درحالی‌که شتاب همواره مثبت است. بنابراین درمی‌یابیم که حرکت

متحرک ابتدا کندشونده ($a_x V_x < 0$) و سپس تندشونده ($a_x V_x > 0$) است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با ایجاد خراش در آهن سفید، فلز Zn اکسایش یافته و تبدیل به هیدروکسید آن می‌شود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در آهن سفید خراشیده شده، فلز روی کاهنده است و واکنش می‌دهد.



$$?g\text{O}_2 = 19/8g\text{Zn}(\text{OH})_2 \times \frac{1\text{ mol Zn}(\text{OH})_2}{99g\text{Zn}(\text{OH})_2} \times \frac{1\text{ mol O}_2}{2\text{ mol Zn}(\text{OH})_2} \times \frac{32g\text{O}_2}{1\text{ mol O}_2} = 3/2g\text{O}_2$$

$$?g\text{H}_2\text{O} = 19/8g\text{Zn}(\text{OH})_2 \times \frac{1\text{ mol Zn}(\text{OH})_2}{99g\text{Zn}(\text{OH})_2} \times \frac{2\text{ mol H}_2\text{O}}{2\text{ mol Zn}(\text{OH})_2} \times \frac{18g\text{H}_2\text{O}}{1\text{ mol H}_2\text{O}} = 3/4g\text{H}_2\text{O}$$

H_2O و O_2 جرم اختلاف $= 3/4 - 3/2 = 0/4g$

$$2\text{ mol Zn}(\text{OH})_2 \sim 4\text{ mol } e^-$$

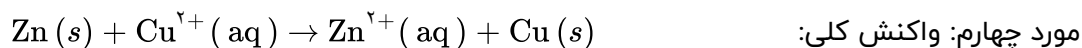
$$? \text{ mol } e^- = 19/8g\text{Zn}(\text{OH})_2 \times \frac{1\text{ mol Zn}(\text{OH})_2}{99g\text{Zn}(\text{OH})_2} \times \frac{4\text{ mol } e^-}{2\text{ mol Zn}(\text{OH})_2} = 0/4\text{ mol } e^-$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فقط مورد چهارم نادرست است. بررسی موارد:

مورد اول: جهت حرکت یون‌ها درست معرفی نشده است. کاتیون‌ها به طرف کاتد و آنیون‌ها به طرف آند حرکت می‌کنند.

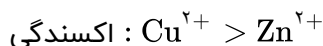
مورد دوم: نقش الکترودها نادرست معرفی شده است روی (Zn) آند و مس (Cu) کاتد می‌باشد.

مورد سوم: درست. Zn^{2+} تولید و Cu^{2+} مصرف می‌شود و اندازه شیب تغییر غلظت آنها به دلیل ضرایب برابرشان برابر می‌باشد.



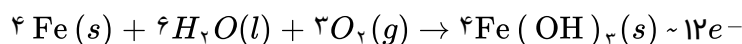
$$\text{افزایش جرم کاتد} = 0/4\text{ mol Zn} \times \frac{1\text{ mol Cu}}{1\text{ mol Zn}} \times \frac{64g\text{Cu}}{1\text{ mol Cu}} = 25/4g$$

مورد پنجم: جهت حرکت الکترون از طرف آند به طرف کاتد



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست؛ واکنش‌های خوردگی آهن و فرایند هال به صورت زیر است:

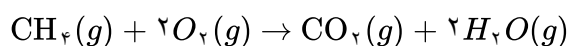


با شمار یکسانی مبادله الکترون، محلول آهن (III) هیدروکسید در واکنش خوردگی آهن یا کربن دی‌اکسید در فرایند هال تولید می‌شود.

ب) نادرست؛ فراورده گازی واکنش برقکافت منیزیم کلرید مذاب، گاز کلر است که به دلیل واکنش‌پذیری کمتر آن از گاز فلوئور، واکنش آن با سدیم فلوئورید جهت تشکیل F_2 ، پیش نمی‌رود.

پ) نادرست؛ لیتیم در فلزات قلیایی کمترین شمار الکترون‌های با $l = 0$ (زیرلایه s) را دارد، اما بیشترین قدرت کاهندگی و کمترین E° را دارد.

ت) درست؛ واکنش کلی سلول سوختی «متان - اکسیژن» به صورت زیر است:



STP، حالت فیزیکی آب، مایع خواهد بود و فراورده به جرم مولی بیشتر (CO_2) به شکل مایع در نمی‌آید.

۸۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مولکول‌های صابون به کمک سر چربی‌گریز خود در آب و با کمک بخش آب‌گریز خود با مولکول‌های چربی جاذبه برقرار می‌کنند. صابون همانند پاک‌کننده‌های غیرصابونی هم در آب و هم در چربی حل می‌شود.

۸۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) محلول شمار زیادی از ترکیب‌های قطبی مانند اتانول، استون و ... در آب، جزو محلول‌های غیرالکترولیت هستند.
 ۲) سفیدکننده‌ها همانند جوهرنمک با آلاینده‌ها واکنش می‌دهند.
 ۳) به کمک مدل آرنیوس می‌توان اسیدهای قوی را از اسیدهای ضعیف تفکیک کرد.

۸۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارتهای اول و سوم درست هستند. بررسی عبارتهای نادرست:

اتم‌های روی موجب کاهش یون‌های مس می‌شوند، نه اتم‌های مس!!
 اگر به جای تیغه روی از تیغه منیزیم استفاده کنیم، واکنش با سرعت و شدت بیشتری انجام می‌شود.

۸۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. سطح بیرونی یک قطره روغن که به وسیله مولکول‌های پاک‌کننده غیرصابونی در آب به صورت مخلوط درآمده، دارای بار منفی است.

۸۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

آ) درست است.

ب) نادرست؛ علاوه بر زنجیره هیدروکربنی حلقه بنزنی نیز جزو بخش ناقطبی آن محسوب می‌شود.
 پ) درست است.

ت) نادرست؛ در ساختار این پاک‌کننده ۹ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

۸۵

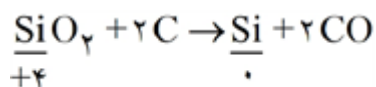
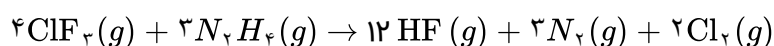
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$? \text{mL KOH} = \frac{0.34 \text{ g KHSO}_4}{136 \text{ g KHSO}_4} \times \frac{1 \text{ mol KHSO}_4}{1 \text{ mol KOH}} \times \frac{1 \text{ L KOH}}{10^{-2} \text{ mol KOH}}$$

$$\times \frac{1000 \text{ mL KOH}}{1 \text{ L KOH}} = 250 \text{ mL}$$

۸۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۸۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اتیلن گلیکول ($\text{C}_2\text{H}_6\text{O}_2$) و اوره ($\text{CO}(\text{NH}_2)_2$) هر دو قطبی هستند و در آب محلول می‌باشند، اما شمار اتم‌های هیدروژن در آن‌ها برابر نیست.

۸۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا، قدرت اسیدی فورمیک اسید از نیترو اسید، کمتر است.

۸۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا بخش قطبی آن‌ها به صورت $\text{Na}^+ \text{SO}_3^- \text{R}$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گروه COO^- با آب جاذبه یون - دوقطبی برقرار می‌کند و باعث انحلال صابون در آب می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی عبارتهای نادرست:

ب) بازها در سطح پوست همانند صابون احساس لیزی ایجاد می‌کنند اما به پوست نیز آسیب وارد می‌کنند.
ت) اغلب میوه‌ها خاصیت اسیدی داشته و بنابراین pH آن‌ها کمتر از ۷ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $[H^+] = 10^{-3}$

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \rightarrow 2 \times 10^{-4} = \frac{10^{-3} \times 10^{-3}}{[HA]} \rightarrow 2 \times 10^{-4} = \frac{10^{-6}}{[HA] - 10^{-3}}$$

به علت ضعیف بودن اسید و جواب تقریبی می‌توان از 10^{-3} صرف‌نظر کرد:

$$[HA] = \frac{10^{-6}}{2 \times 10^{-4}} = 5 \times 10^{-3} \rightarrow \frac{5 \times 10^{-3}}{10^{-3}} = 5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هر چهار عبارت پیشنهاد شده درست هستند.

مطابق داده‌های سؤال فلز A در مقایسه با فلز M کاهنده‌ی قوی‌تری است. به این ترتیب تمام عبارتها درست هستند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا، شربت معده، سوسپانسیون است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

به‌جز مقدار واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، سایر موارد بر روی مقدار E° یک نیم‌سلول مؤثر هستند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. موارد «آ» و «پ» درست نتیجه‌گیری شده‌اند.

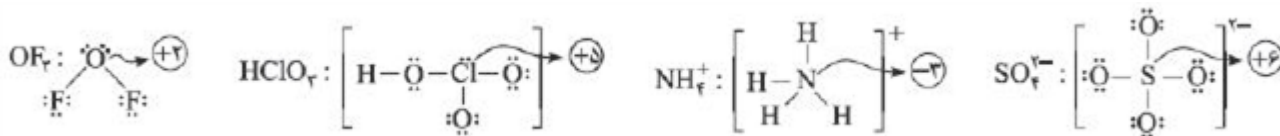
بررسی موارد نادرست:

ب) از روی واکنش‌پذیری دو فلز نمی‌توان شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم آن‌ها را با هم مقایسه کرد.

ت) پلاتین در هوای مرطوب اکسید نمی‌شود و در ضمن واکنش‌پذیری آن کمتر از نقره است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در یک واکنش برگشت‌پذیر، در لحظه برقراری تعادل سرعت واکنش‌های رفت و برگشت با هم برابر و غلظت مواد فراورده و واکنش‌دهنده ثابت می‌شود. ثابت تعادل، در دمای ثابت مستقل از مقدار آغازی واکنش‌دهنده‌ها است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق داده‌های سؤال فرمول صابون موردنظر به صورت $C_{15}H_{27}COONa$ است.

$$\frac{\text{جرم کربن}}{\text{جرم هیدروژن}} = \frac{(15 + 1) \times 12}{27 \times 1} = 7/11$$

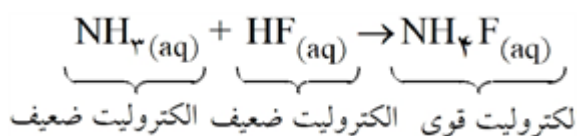
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

در حدود سال ۱۳۴۰، امید به زندگی ۵۰ سال بوده و در حدود سال ۱۳۷۰ به ۶۰ سال رسیده است.

$$60 - 50 = 10$$

$$\frac{10}{50} \times 100 = \% + 20 \text{ افزایش}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. آمونیاک و هیدروفلوئوریک اسید هر دو الکترولیت ضعیف‌اند و رسانایی الکتریکی ضعیفی دارند. پس از مخلوط شدن و انجام واکنش بین آن‌ها نمک آمونیوم فلئورید حاصل می‌شود که هم محلول است و هم الکترولیت قوی، در نتیجه میزان رسانایی پس از واکنش افزایش می‌یابد.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کلئیدها مخلوط‌های ناهمگنی هستند که پایدار بوده و پس از مدتی ثابت ماندن ته‌نشین نمی‌شوند. هم‌چنین این مخلوط‌ها نور را به طور کامل عبور نمی‌دهند و بخشی از نور را پخش می‌کنند. از این رو ظاهر کدر و مات دارند. ذره‌ها در کلئیدها توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت هستند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا به کمک فرمول زیر، غلظت مولی KOH را به دست می‌آوریم:

$$M = \frac{10 \times a \times d}{\text{جرم مولی}} \rightarrow \left(\frac{g}{mL} \right) \text{ چگالی}$$

↑ درصد جرمی

غلظت مولی

$$KOH \text{ جرم مولی} = 39 + 16 + 1 = 56 g \cdot mol^{-1}$$

$$M = \frac{10 \times 8 \times 1 / 12}{56} = 1/6 mol \cdot L^{-1}$$

$$M \cdot V \cdot n = M \cdot V \cdot n$$

باز باز باز اسید اسید اسید

حال به کمک رابطه‌ی زیر حجم HCl موردنیاز را حساب می‌کنیم:

می‌دانیم n (ظرفیت اسیدی) برای HCl برابر ۱ و هم‌چنین n (ظرفیت بازی) نیز برای NaOH برابر ۱ است.

$$\frac{1/6 \times 100}{0/4} \times 1 = 1/6 \times 100 \times 1 \rightarrow V = \frac{1/6 \times 100}{0/4} = 400 \text{ mL HCl}$$

اسید اسید

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۰۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در محلول ۰/۰۱ مولار از باز دوظرفیتی قوی، غلظت یون OH^- برابر $۰/۰۲ \frac{\text{mol}}{\text{lit}}$ است. ۱۰۵

$$[\text{OH}^-]_1 = ۰/۰۲ \frac{\text{mol}}{\text{lit}} \rightarrow \text{pOH}_1 = ۱/۷ \rightarrow \text{pH}_1 = ۱۴ - ۱/۷ = ۱۲/۳$$

و اگر محلول را ۱۰ مرتبه رقیق کنیم غلظت OH^- برابر $۰/۰۰۲ \frac{\text{mol}}{\text{lit}}$ می باشد.

$$\rightarrow [\text{OH}]_2 = ۰/۰۰۲ \frac{\text{mol}}{\text{lit}} \rightarrow \text{pOH}_2 = ۲/۷ \rightarrow \text{pH}_2 = ۱۴ - ۲/۷ = ۱۱/۳ \rightarrow \text{pH}_2 - \text{pH}_1 = ۱$$

