

۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا چارک اول و چارک سوم را محاسبه می‌کنیم (تعداد داده‌ها برابر ۱۸ است)

۵۱ ۵۴ ۵۵ ۵۷ ۵۸ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۰ ۶۴ ۶۵ ۶۵ ۶۶ ۷۲ ۷۳ ۷۶ ۷۶ ۷۷

چارک اول

چارک سوم

توجه شود که میانه‌ی نیمه‌ی اول داده‌ها، چارک اول و میانه‌ی نیمه‌ی دوم داده‌ها، چارک سوم است. پس باید میانگین داده‌های ۷۲، ۶۶، ۶۵، ۶۴، ۶۰، ۵۹، ۵۸، ۵۸ را محاسبه کنیم.

یعنی داریم:

$$\bar{x} = \frac{51 + 54 + 55 + 57 + 58 + 58 + 59 + 60 + 60 + 64 + 65 + 65 + 66 + 72 + 73 + 76 + 76 + 77}{18} = \frac{627}{18} = 62/7$$

۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\bar{x} = \frac{3 + 6 + 4 + 5 + 7}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(3-5)^2 + (6-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{4 + 1 + 1 + 0 + 4}{5} = 2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2} \Rightarrow \bar{x} + \sigma = 5 + \sqrt{2}$$

بنابراین نمودار گزینه‌ی ۳ درست است.

۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\bar{x} = \frac{16 + 15 + 13 + a + 17 + 14}{6} = \frac{75 + a}{6} = 15 \Rightarrow 75 + a = 90 \Rightarrow a = 90 - 75 = 15$$

پس داده‌ها به صورت ۱۶، ۱۵، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۴ هستند.

مد داده‌ها عدد ۱۵ است. آن را حذف می‌کنیم و برای داده‌های زیر انحراف معیار را می‌یابیم:

$$16, 13, 17, 14 \Rightarrow \bar{x} = \frac{16 + 13 + 17 + 14}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

$$\sigma^2 = \frac{(16-15)^2 + (13-15)^2 + (17-15)^2 + (14-15)^2}{4} = \frac{1 + 4 + 4 + 1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2/5$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{2/5} \approx 1/6$$

$$x = \text{میانگین} + \text{انحراف معیار} = 15 + 1/6 = 16/6$$

۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برابری اندازه‌ی طبقات از ویژگی‌های نمونه‌گیری سیستماتیک است. در نمونه‌گیری طبقه‌ای، جامعه

صرفاً به زیرجامعه‌های مجزا تقسیم می‌شود و از هر طبقه، یک نمونه‌ی تصادفی ساده انتخاب می‌گردد.

۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شماره‌های داده‌های انتخاب شده در نمونه‌گیری سیستماتیک، جمله‌های یک دنباله حسابی هستند. اگر

۲۱ و ۴۰ جمله‌های یک دنباله حسابی باشند، تفاضل آن‌ها مضربی از قدرنسبت است.

با توجه به اینکه ۱۹ عددی اول است، پس قدرنسبت همان ۱۹ است و جمله‌های دنباله حسابی به صورت زیر هستند:

$$2, 21, 40, 59, \dots, 2 + 19(n-1)$$

پس در بین گزینه‌ها عددی که به صورت $2 + 19k$ باشد قابل قبول است. با توجه به اینکه $135 = 19 \times 7 + 2$ ، پس داده ۱۳۵

در این نمونه‌گیری انتخاب شده است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق قضیه میانه‌ها داریم:

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

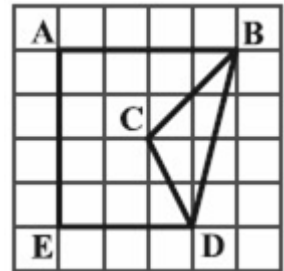
$$\Rightarrow 25 + 36 = 2AM^2 + \frac{100}{2} \Rightarrow 2AM^2 = 11 \Rightarrow AM = \sqrt{\frac{11}{2}}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل اگر از B به D وصل کنیم، در مثلث شبکه‌ای BCD، تعداد نقاط مرزی برابر $b = 4$ و

$$S_{\triangle BCD} = \frac{b}{2} + i - 1 = 3$$

تعداد نقاط درونی برابر $i = 2$ است. در نتیجه طبق رابطه‌ی پیک داریم:

مقدار افزایش مساحت، دقیقاً دو برابر مساحت مثلث BCD، یعنی برابر ۶ است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

دو قایق از نقطه‌ی O شروع به حرکت کرده‌اند. مسافت طی شده توسط دو قایق بعد از نیم ساعت برابر با طول OA و طول OB است.

$$OA = 60 \times 0.5 = 30 \text{ کیلومتر}$$

$$OB = 100 \times 0.5 = 50 \text{ کیلومتر}$$

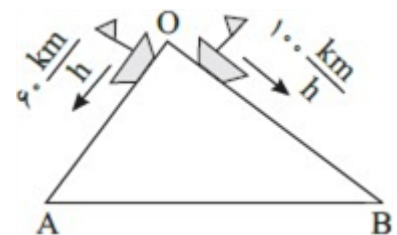
به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌توانیم طول AB (فاصله‌ی دو قایق بعد از نیم ساعت از شروع حرکت) را به دست آوریم.

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow AB^2 = 30^2 + 50^2 - 2 \times 30 \times 50 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AB^2 = 4900 \Rightarrow AB = 70$$

بنابراین نیم ساعت بعد از شروع حرکت از نقطه‌ی O، دو قایق در فاصله‌ی ۷۰ کیلومتری از هم قرار می‌گیرند.

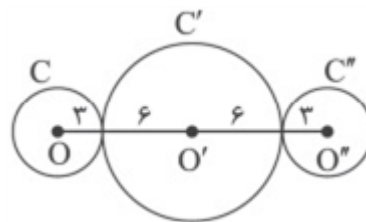


گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ترکیب دو دوران متوالی به مرکز O و زاویه‌ی 90° در جهت ساعتگرد، یک دوران با زاویه‌ی 180° است.

دوران تنها در صورتی تبدیل همانی است که زاویه‌ی دوران مضربی از 360° باشد و در غیر این صورت موقعیت نقطه در صفحه تغییر می‌کند. در گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ ترکیب دو تبدیل هندسی مشخص شده، یک تبدیل همانی است.

۱۰) گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در شکل، دایره‌ی (C'') انتقال یافته‌ی دایره‌ی (C) تحت بردار $\overrightarrow{OO'}$ است. انتقال، تبدیل ایزومتري است، پس شعاع دایره‌ی C'' برابر شعاع دایره‌ی C یعنی ۳ است. بنابراین:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی دو دایره‌ی مماس} = 2\sqrt{R'R''} = 2\sqrt{6 \times 3} = 6\sqrt{2}$$



۱۱) گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow y = a + b \sin x$$

چون به ازای $x > 0$ شروع صعودی است پس $b > 0$

$$y_{\max} = a + b = 3$$

$$f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow a + b \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow a + 2a = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 1 + 2 \sin x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

۱۲) گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{x} + 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{-6}{5} = -1\frac{1}{5}$$

$$\cot\left(\frac{5\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$$

۱۳) گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow L = r\theta \Rightarrow \frac{\pi}{6} = r \times \frac{\pi}{6} \Rightarrow r = 3$$

۱۴) گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} x^2 + 4x = 25 + 20 = 45$$

۱۵) گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x + 5 = 7$$

۱۶) گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} kx - 9 = 2k - 9$$

$$f(2) = 2k - 9$$

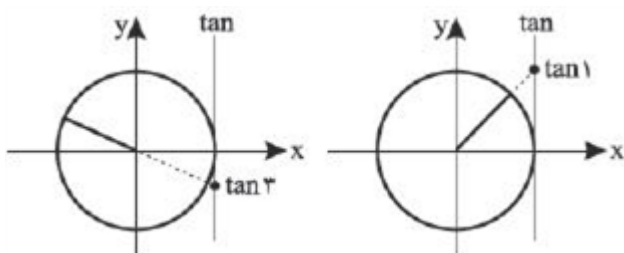
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow 2k - 9 = 7 \Rightarrow 2k = 16 \Rightarrow k = 8$$

شرط پیوستگی:

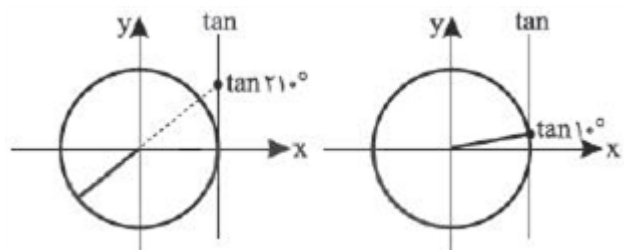
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از دایره مثلثاتی کمک می‌گیریم. ۱۷

بررسی گزینه‌ها:

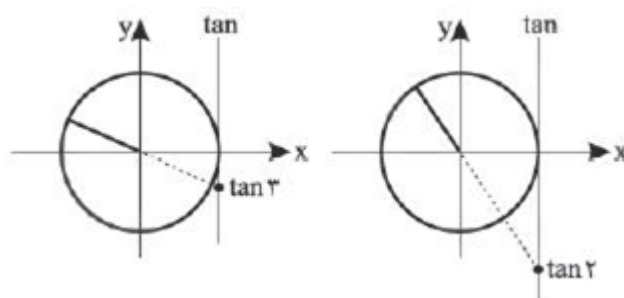
گزینه (۱): $\text{tg } 1 > \text{tg } 3$



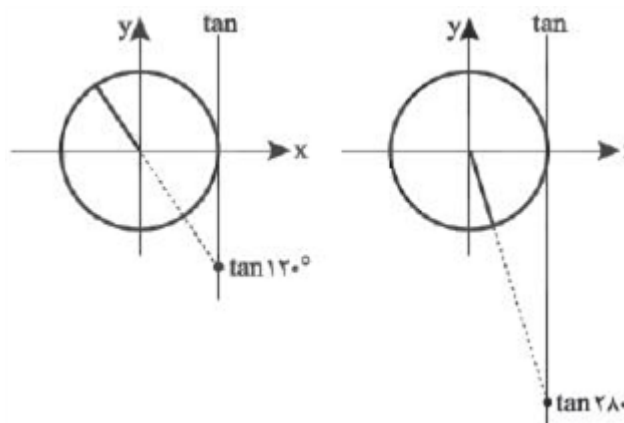
گزینه (۲): $\text{tg } 110^\circ > \text{tg } 10^\circ$



گزینه (۳): $\text{tg } 3 > \text{tg } 2$



گزینه (۴): $\text{tg } 120^\circ > \text{tg } 280^\circ$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۸

زاویه $7/2$ رادیان در ناحیه اول است. $\Leftrightarrow$ زاویه $-7/2$ رادیان در ناحیه چهارم است، بنابراین با زاویه $5/2$ رادیان در یک ناحیه است.

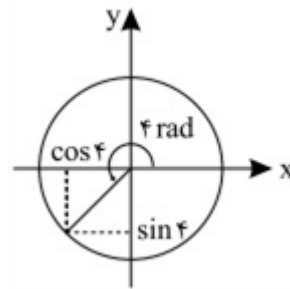
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹

$$L = 24$$

$$\theta = 36 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$$

$$L = r\theta \Rightarrow 24 = \frac{\pi}{5} r \Rightarrow r = \frac{120}{\pi}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هر ۱ رادیان تقریباً ۵۷ درجه است. پس $۴ \text{ rad} \approx ۴ \times ۵۷^\circ = ۲۲۸^\circ$ می‌باشد و در ناحیه سوم قرار می‌گیرد. پس $\sin ۴ < ۰$ و $\cos ۴ < ۰$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. در این صورت طبق قضایای محاسبه حد داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{3f(x) + 2}{2f(x) - 6} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} (3f(x) + 2)}{\lim_{x \rightarrow a} (2f(x) - 6)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} 2}{2 \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} 6} \\ &= \frac{3L + 2}{2L - 6} = \frac{2}{5} \Rightarrow 4L - 12 = 15L + 10 \Rightarrow 11L = -22 \Rightarrow L = -2 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} |2x + a| < b &\Rightarrow -b < 2x + a < b \Rightarrow \frac{-b - a}{2} < x < \frac{b - a}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{b - a}{2} = 5 \\ \frac{-b - a}{2} = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} b - a = 10 \\ -b - a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow 2a - b = -17 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. همسایگی محذوف عدد ۳ است بنابراین:

$$5a - 7 = 3 \Rightarrow 5a = 10 \Rightarrow a = 2$$

$$\xrightarrow{a=2} (2, 5) - \{3\}$$

این مجموعه تنها شامل عدد صحیح ۴ می‌باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\alpha = \frac{L}{R} \Rightarrow \alpha = \frac{12\pi}{9} = \frac{4\pi}{3}$$

حال خواهیم داشت:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha = -\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\sin(3\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha = \sin 2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

ابتدا $\cos \alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

$$\xrightarrow{\alpha \text{ ناحیه } 2} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

خواسته‌ی سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{7}{2}\pi + \pi + \alpha \right) - \sin \left(\frac{13}{2}\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha \right) &= \sin (\pi + \alpha) - \sin \left(\frac{7}{2}\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \\ &= -\sin \alpha - \sin \left(-\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = -\frac{3}{5} + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\frac{3}{5} + \cos \alpha \\ &= -\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{7}{5} = -1\frac{2}{5} \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{3\sigma}{3\bar{x} - 1} = 4 \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 3\bar{x} = 12\bar{x} - 4 \Rightarrow \bar{x} = \frac{4}{9}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + 2 + x_2 + 3 + x_3 + 4}{3}$$

با توجه به فرض داریم:

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + 9}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3\bar{x} - 9$$

حالا میانگین $-2x_1 + 3, -2x_2 + 3, -2x_3 + 3$ را می‌خواهیم پس

$$\bar{x} = \frac{(-2x_1 + 3) + (-2x_2 + 3) + (-2x_3 + 3)}{3} \Rightarrow \bar{x} = \frac{-2(x_1 + x_2 + x_3) + 9}{3}$$

$$\xrightarrow{x_1 + x_2 + x_3 = 3\bar{x} - 9} \bar{x} = \frac{-2(3\bar{x} - 9) + 9}{3} = \frac{-6\bar{x} + 18 + 9}{3} = \frac{-6\bar{x} + 27}{3} = -2\bar{x} + 9$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

دسته ۵ $(1, 2, 3), (4, 5, \dots, 12), (13, \dots, 39), (40, \dots, 120), (121, \dots, 363)$

$$\bar{x} = \frac{121 + 363}{2} = \frac{484}{2} = 242$$

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

نکته: اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ جملات یک دنباله حسابی باشند، میانگین آن‌ها برابر است با:

۲۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر بازتاب F نسبت به خط AE را F' بنامیم و بازتاب D نسبت به EC را D' بنامیم، آن گاه زمین جدید AF'ED'CB هم محیط با زمین داده شده است ولی مساحت آن به اندازه $2S_{\triangle AEF} + 2S_{\triangle DEC}$ بیش تر شده است.

$$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AF \times FE \sin 150^\circ = \frac{1}{2} (3)(4) \left(\frac{1}{2} \right) = 3$$

$$S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} DE \times DC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} (2\sqrt{3})(3) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 9$$

بنابراین:

$$\text{مساحت} = 2S_{\triangle AEF} + 2S_{\triangle DEC} = 6 + 18 = 24$$

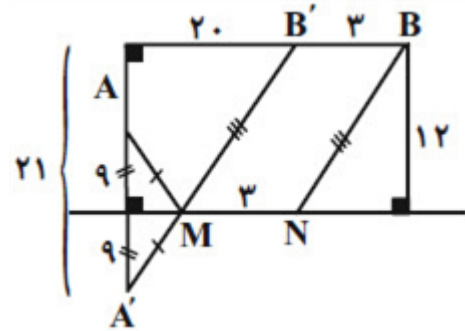
۳۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مطابق شکل داریم:

$$A'B'^2 = 20^2 + 21^2 = 841 \Rightarrow A'B' = 29$$

$$\text{Min} (AMNB) = A'B' + MN = 29 + 3 = 32$$

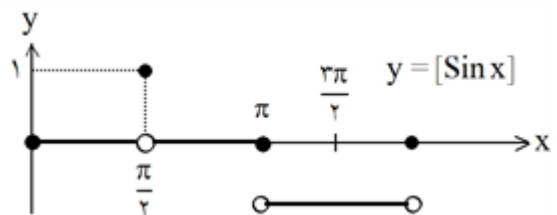


۳۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ابتدا نمودار تابع $y = \sin x$ و سپس با توجه به آن نمودار تابع $y = [\sin x]$ را رسم کرده و در مورد پیوستگی تابع $y = [\sin x]$ در نقاط $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ بحث می‌کنیم.

با توجه به نمودار مقابل به وضوح دیده می‌شود که تابع $y = [\sin x]$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{2}$ ناپیوسته و در $x = \frac{3\pi}{2}$ پیوسته است.



۳۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = \frac{1 + \sin 80^\circ - \cos 80^\circ}{1 + \sin 80^\circ + \cos 80^\circ} = \frac{1 - \cos 80^\circ + \sin 80^\circ}{1 + \cos 80^\circ + \sin 80^\circ}$$

$$= \frac{2 \sin^2 40^\circ + 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{2 \cos^2 40^\circ + 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \frac{2 \sin 40^\circ (\sin 40^\circ + \cos 40^\circ)}{2 \cos 40^\circ (\sin 40^\circ + \cos 40^\circ)} = \tan 40^\circ = \cot 50^\circ$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -2 \Rightarrow -\operatorname{Cotg} \alpha = -2 \Rightarrow \operatorname{Cotg} \alpha = 2$$

$$۱) \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$۲) \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$۳) \cos(\alpha - 2\pi) = \cos(2\pi - \alpha) = \cos(2\pi + \pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$۴) \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$A = \frac{\sin \alpha - 2 \sin \alpha}{-\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha - \sin \alpha} \xrightarrow[\text{بر } \sin \alpha \text{ تقسیم می کنیم}]{\text{صورت و مخرج کسر را}} A = \frac{1}{1 + \operatorname{Cotg} \alpha} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون حد مخرج کسر در نقطه‌ی $x = \frac{1}{4}$ برابر صفر است، پس باید حد صورت کسر نیز برابر صفر باشد

تا به حالت مبهم $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ تبدیل شود و حاصل حد بتواند برابر عدد مشخص L شود. پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} (4x^2 + ax - 3) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{a}{4} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow a = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{4x^2 + 5x - 3}{4x^2 + 7x - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow[\text{مبهم}]{\text{تجزیه صورت و مخرج}} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{(4x-1)(x+3)}{(4x-1)(x+2)}$$

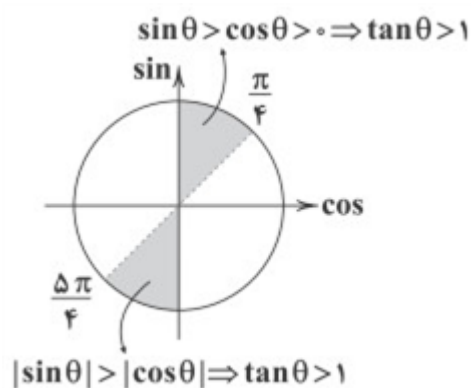
$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{4x+3}{x+2} = \frac{\frac{1}{4} + 3}{\frac{1}{4} + 2} = \frac{\frac{13}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{13}{9} \Rightarrow L = \frac{13}{9}$$

$$\Rightarrow a + L = 5 + \frac{13}{9} = \frac{58}{9}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به دنبال نواحی هستیم که در آن:

$$\tan \theta > \cot \theta > 0$$

$$\Rightarrow \tan \theta > \frac{1}{\tan \theta} \xrightarrow{\tan \theta > 0} \tan^2 \theta > 1 \Rightarrow \tan \theta > 1$$



وقتی $\tan \theta > 0$ است که θ در ربع اول یا سوم باشد، در این نواحی شرط $\tan \theta > 1$ را اعمال می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{r} - rx\right) \stackrel{x=\frac{\pi}{r}}{=} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{r} - \pi\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{r} = \sqrt{r}$$

پس حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -1$$

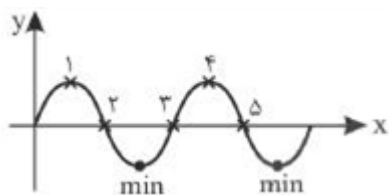
۳۷

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^r - 1}x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{(x-1)^r}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{x} - 1}{|x-1|} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{x} - 1}{-(x-1)} &\times \frac{(x\sqrt{x})^r + x\sqrt{x} + 1^r}{(x\sqrt{x})^r + x\sqrt{x} + 1^r} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x\sqrt{x})^r - 1^r}{-(x-1)\underbrace{\left((x\sqrt{x})^r + x\sqrt{x} + 1^r\right)}_r} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^r(x) - 1}{-(x-1) \times r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^\Psi - 1}{-(x - 1) \times \Psi} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^\Psi - 1)(x^\Psi + 1)}{-\Psi(x - 1)} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)(x^\Psi + 1)}{-\Psi(x - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 1)(x^\Psi + 1)}{-\Psi} = \frac{\Psi \times \Psi}{-\Psi} = -\frac{\Psi}{\Psi} \end{aligned}$$

38

تابع $y = [f(x)]$ در نقاطی که $f(x) \in \mathbb{Z}$ باشد، ناپیوسته است مگر آن که $f(x)$ در آن نقطه دارای min نسبی باشد. تابع $y = \sin x$ در بازه $(\pi, 2\pi)$ به شکل زیر است و در نقاط مشخص شده دارای مقدار صحیح است. ضمناً نقاط min نسبی آن حذف شده‌اند:



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{|2+a|+4}{2+3} = \frac{|a+2|+4}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{|a+2|+8}{2+6} = \frac{|a+2|+8}{8}$$

باید حد چپ و راست در $x = 2$ برابر باشند. فرض می‌کنیم $|a+2| = u$ ، پس:

$$\frac{u+4}{5} = \frac{u+8}{8} \Rightarrow 8u+32 = 5u+40$$

$$\Rightarrow 3u = 8 \Rightarrow u = \frac{8}{3} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2 = \frac{8}{3} \\ a_2 + 2 = -\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow a_1 + a_2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 = -4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ و $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ است.

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{1 - \sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

می‌نویسیم:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{1}{2}, \cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 2$$

همچنین داریم:

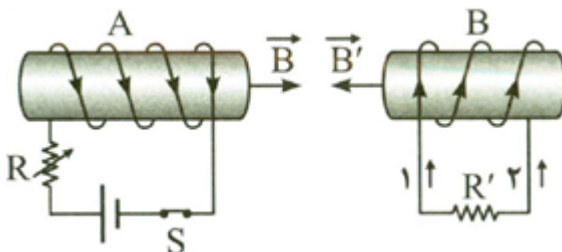
و مطلوب مسئله را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\sin^2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \cot^2 (\pi + x) = \cos^2 x + \cot^2 x = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وقتی کلید باز است در هیچ یک از سیملوله‌ها شار مغناطیسی وجود ندارد. در لحظه‌ای که کلید وصل

می‌شود در سیملوله‌ی متصل به مولد (A) جریان برقرار می‌شود و سبب می‌گردد شار مغناطیسی حاصل از عبور جریان، از سیملوله‌ی مقابل (B) بگذرد. این تغییر شار موقتی در سیملوله‌ی مقابل، جریان القایی موقتی به وجود می‌آورد. چون با وصل کلید جریان از صفر تا مقدار معینی افزایش می‌یابد، پس شار مغناطیسی گذرنده از سیملوله‌ی B نیز افزایش می‌یابد. در نتیجه میدان مغناطیسی حاصل از جریان القایی در آن، B' باید در خلاف جهت B رسم شود. اکنون با استفاده از جهت B' و قانون دست راست می‌توان تشخیص داد که جهت جریان القایی در R' در جهت (۱) است.

پس از این که جریان به مقدار ثابت I رسید، شار ثابت مانده و جریان القایی حاصل از تغییر آن قطع می‌شود. اکنون اگر مقاومت R را افزایش دهیم، جریان عبوری از مدار سیملوله‌ی A کاهش می‌یابد و در نتیجه شار مغناطیسی گذرنده از سیملوله‌ی B کاهش خواهد یافت. در این حالت میدان مغناطیسی حاصل از جریان القایی در آن، B' باید در جهت B رسم شود که با استفاده از قانون دست راست می‌توان تشخیص داد که جهت جریان القایی در R' در جهت (۲) خواهد بود.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۴۲

$$B = 2\pi \times 10^{-7} \frac{NI}{R} \rightarrow 2/4 \times 10^{-2} = 2 \times 3/14 \times 10^{-7} \times \frac{40 \times I}{3/14 \times 10^{-2}} \rightarrow I = 3A$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۳

$$A = 200 \text{ cm}^2 = 200 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

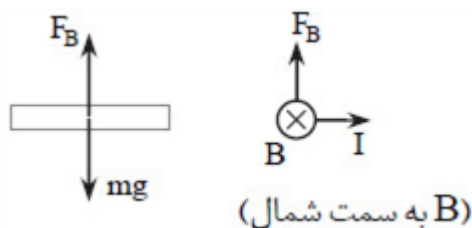
$$\varphi = BA \cos \theta \Rightarrow \varphi = 0.4 \times 200 \times 10^{-4} \times \cos 60^\circ = 4 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نیروی وزن سیم را نیروی مغناطیسی باید خنثی کند. ۴۴

$$F_B = mg \Rightarrow ILB \sin 90^\circ = mg \Rightarrow I \times 1 \times 0.5 \times 10^{-2} \times 1 = 8 \times 10^{-3} \times 10$$

$$\Rightarrow I = 1600 \text{ A}$$

حال از قانون دست راست جهت I را به دست می آوریم.



شدت جریان (I) از چپ به راست است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۵

چون آهنربای طبیعی Fe_2O_3 می باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴۶

$$\varepsilon = \left| -N \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right| \Rightarrow IR = \left| -N \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right|$$

$$200 \times 10^{-3} \times 20 = 500 \times \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right| \Rightarrow \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right| = \frac{4}{500} = \frac{8}{1000} \frac{\text{Wb}}{\text{s}}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خطوط میدان مغناطیسی از قطب N خارج و به قطب S وارد می شوند، بنابراین آهنربا به صورت ۴۷

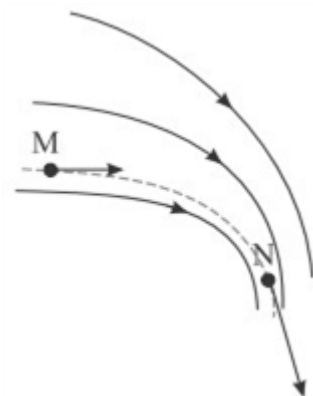
پادساعتگرد می چرخد تا مطابق شکل زیر، به صورت افقی به حال تعادل قرار بگیرد.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴۸

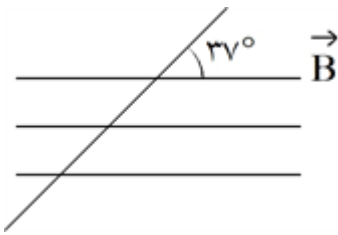
میدان مغناطیسی در هر نقطه بر خط میدان مماس است:

تراکم خطوط اطراف نقطه‌ی N بیشتر بوده و میدان در این نقطه بیشتر از نقطه‌ی M است و باید بردار میدان آن را بزرگ تر کشید.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. خطوط میدان مغناطیسی درون سیملوله موازی محور اصلی می باشند، بنابراین اگر بارهای الکتریکی به ۴۹

موازی محور اصلی حرکت کنند، نیرویی از طرف میدان سیملوله به آن ها وارد نشده و در نتیجه سرعت حرکت آن ها ثابت می ماند.



$$F = BIL \sin \theta$$

$$F = 500 \times 10^{-4} \times 4 \times 2 \times \sin 37^\circ = 0.24 = 2/4 \times 10^{-1}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تنها عبارت «ه» درست است. بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) مواد فرومغناطیسی دارای حوزه‌های مغناطیسی هستند.

ب) فقط برخی از فلزات مانند آهن فرومغناطیسی هستند.

ج) آلومینیم فرو مغناطیس نیست و نمی‌توان از آن به عنوان هسته‌ی سیملوله استفاده کرد.

د) فولاد یک فرومغناطیس سخت است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۲

با حرکت سیم MN به سمت راست مساحت سطح حلقه در حال افزایش است پس شار عبوری از حلقه افزایش می‌یابد و با توجه به قانون لنز باید میدان القایی خلاف جهت میدان اصلی و برونسو باشد. با استفاده از قاعده‌ی دست راست برای حلقه جهت جریان القایی پادساعتگرد می‌شود و جهت جریان باتری ساعتگرد است و جریان‌ها در خلاف جهت یکدیگر خواهند بود، بنابراین:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{\text{القایی}} &= BLV = 0.5 \times 4 \times 1 = 2V \\ I_{\text{مدار}} &= \frac{\varepsilon - \bar{\varepsilon}}{R + r} \Rightarrow I_{\text{مدار}} = \frac{8 - 2}{2} = 3A \end{aligned}$$

$$P_{\text{خروجی}} = \varepsilon I - rI^2 \Rightarrow P_{\text{خروجی}} = 24 - 9 = 15W$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. قطب‌های مغناطیسی زمین بر قطب‌های جغرافیایی آن منطبق نیست و فاصله‌ی نسبتاً زیادی از یکدیگر دارند و عقربه‌ی مغناطیسی قطب‌نما در جهت شمال واقعی جغرافیایی قرار نمی‌گیرد. ۵۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. سدیم جزء مواد پارامغناطیس و بیسموت و نقره جزء مواد دیامغناطیس هستند. ۵۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به قانون دست راست $q_1 < 0$ و $q_2 > 0$ ۵۵

هر چه بار بزرگ‌تر باشد، نیروی $F_B = \uparrow |q| VB$ وارد بر آن قوی‌تر شده و سبب انحراف بیشتر ذره‌ی باردار می‌شود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۶

$$B = \mu \cdot \frac{N}{l} I, l = Nd$$

$$B = 12 \times 10^{-7} \frac{N}{N \times 2 \times 10^{-3}} \times 10 = 6 \times 10^{-2} T = 60 G$$

با توجه به قاعده‌ی دست راست جهت میدان سیملوله به سمت راست است.

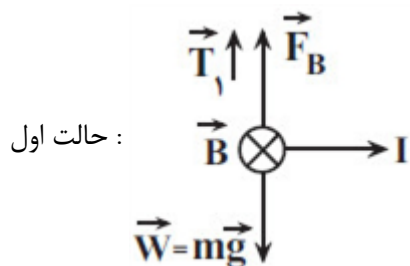
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بین دو قطب N و S یک آهنربای C شکل، در ناحیه‌ی کوچکی خطوط میدان مغناطیسی به صورت هم ۵۷

فاصله و موازی قرار می‌گیرند که بیانگر میدان مغناطیسی یکنواخت در آن ناحیه می‌باشد.

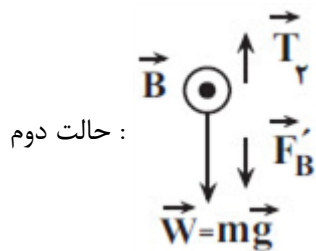
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا جریان عبوری از میله را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \xrightarrow[\substack{R=3\Omega, r=2\Omega}]{\mathcal{E}=40V} I = \frac{40}{3+2} = 8A$$

کشش نخ را در دو حالت T_1 و T_2 بررسی می‌کنیم، در هر دو حالت به کمک دست راست داریم:



$$F_{\text{net}} = \text{صفر} \Rightarrow T_1 + F_B = W \Rightarrow T_1 = W - F_B \quad (1)$$



$$F'_{\text{net}} = \text{صفر} \Rightarrow T_2 = F'_B + W \quad (2)$$

با روابط ۱ و ۲ داریم:

$$T_2 - T_1 = F'_B + W - (W - F_B) \xrightarrow{F_B = F'_B} T_2 - T_1 = 2F_B$$

$$\Rightarrow T_2 - T_1 = 2(BIL) \xrightarrow[\substack{I=8A}]{\substack{L=0.4m, B=0.4T}} T_2 - T_1 = 2 \times 0.4 \times 8 \times 0.4 = 0.256N$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. جهت میدان مغناطیسی در خارج از آهنربا از قطب N به طرف قطب S است. بنابراین جهت میدان مغناطیسی در محل سیم به طرف راست و عمود بر راستای جریان است. با استفاده از قاعده دست راست معلوم می‌شود که نیروی مغناطیسی وارد بر سیم $(\vec{F})$ به طرف پایین است. از طرفی طبق قانون سوم نیوتون، واکنش این نیرو $(\vec{F}')$ ، رو به بالا بر آهنربا اثر می‌کند.

$$F_N + F' - W = 0 \xrightarrow{F'=F} F_N = W - F$$

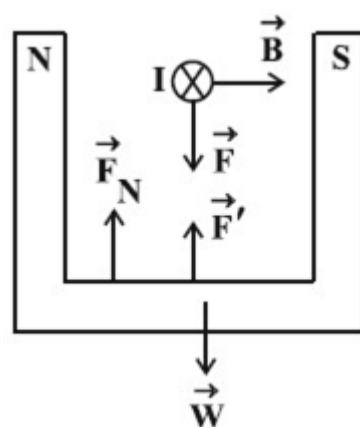
$$F = ILB \sin \theta$$

نیروسنج، اندازه $\vec{F}_N$ را نشان می‌دهد. بنابراین با افزایش جریان و در نتیجه افزایش مقدار F ، اندازه F_N کاهش می‌یابد و نیروسنج عدد کمتری را نشان می‌دهد. اکنون تغییر عددی را که نیروسنج نشان می‌دهد به دست می‌آوریم:

$$\Delta F_N = F_{N_2} - F_{N_1} = W - F_2 - (W - F_1) = F_1 - F_2 \Rightarrow \Delta F_N = ILB \sin \theta - (I + \Delta) LB \sin \theta$$

$$= -\Delta LB \sin \theta \xrightarrow[B=3000G=3000 \times 10^{-4}T, \theta=90^\circ]{L=80cm=0.8m, \theta=90^\circ} \Delta F_N = -5 \times 0.8 \times 0.3 \times 1 = -1.2N$$

علامت منفی تأیید می‌کند که نیروی F_N کاهش یافته است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای محاسبه جریان القایی کافی است از رابطه $I_{av} = \frac{\epsilon_{av}}{R} = -\frac{N}{R} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ استفاده کنیم و توجه شود که میدان مغناطیسی یک کمیت برداری است و وقتی جهت آن تغییر می‌کند یک علامت منفی نسبت به جهت اولیه‌اش در مقدار آن ضرب می‌شود:

$$|I_{av}| = \left| \frac{N}{R} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| \xrightarrow[\Delta t=0.03s, R=10\Omega, A=100cm^2]{N=600, B_1=0.04T, B_2=-0.04T} \left| \frac{N}{R} \frac{\Delta B}{\Delta t} A \right|$$

$$|I_{av}| = \left| \frac{600}{10} \times \frac{-0.04 - 0.04}{0.03} \times 100 \times 10^{-4} \right| = 1.2A$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\Phi_m = AB = 15 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{-4} = 30 \times 10^{-8} = 0.3 \mu wb$$

$$\text{برای وارد شدن حلقه به میدان: } V = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{0.05}{2} = 25 \text{ ms}$$

نیز در ۵۰ ms طی می‌کند، در نتیجه هنگام خروج به لحظه‌ی ۷۵ ms می‌رسد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. انرژی ذخیره شده در سیم لوله از رابطه‌ی $U = \frac{1}{2} LI^2$ به دست می‌آید. L ضریب القاوری برابر است با:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} = \frac{12 \times 10^{-6} \times 500^2 \times 10 \times 10^{-4}}{0.3} = 10^{-5} \text{ H}$$

$$U = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-5} \times (0.2)^2 = 2 \times 10^{-7} \text{ J} = 2 \times 10^{-4} \text{ mJ}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. جهت مثبت محور z ها است.

$$\begin{cases} \vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} \\ \vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = q(V_x B_y - V_y B_x) \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 2 \times 10^{-6} (2000 \times 2 - (-1000 \times 1)) \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 10^{-6} \text{ N} = 0.001 \text{ mN}$$

از آنجایی که $\vec{F}$ مثبت به دست آمد جهت آن در جهت مثبت محور z ها است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نیروی محرکه‌ی القایی از رابطه‌ی $|\varepsilon| = Blv$ به دست می‌آید:

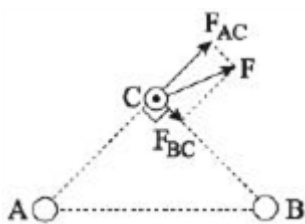
$$|\varepsilon| = Blv = 0.1 \times 0.25 \times v = \frac{1}{40} v$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow 0.5 = \frac{\varepsilon}{0.2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{10} v$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{14} v \Rightarrow v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نیروی F را روی دو امتداد AC و BC تجزیه می‌کنیم تا جهت نیروهای F_{AC} و F_{BC} مشخص شود. سیم A ، سیم C را می‌راند (دفع می‌کند)، بنابراین جریان I_A و I_C ناهمسو هستند و جریان A ، درونسو، اما سیم B ، سیم C را جذب می‌کند، بنابراین جریان B و C ، همسو بوده یعنی I_B برونسو است، چون $F_{AC} > F_{BC}$ است، بنابراین $I_A > I_B$ است.



$$B_1 = 400G$$

$$B_2 = -800G \Rightarrow \Delta B = -1200G$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\varepsilon}}{R} = \frac{\left| -\frac{N\Delta\varphi}{\Delta t} \right|}{R} = \frac{\left| -N_A \cos\theta \times \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|}{R}$$

$$\bar{I} = \frac{200 \times 8 \times 10^{-2} \times 1 \times \frac{1200 \times 10^{-4}}{0.2}}{40} = \frac{4}{10} \times \frac{12 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-1}}$$

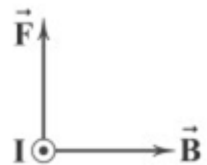
$$= 24 \times 10^{-2} A \Rightarrow \bar{I} = 240mA$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با بستن کلید K جریان گذرنده از سیم AB از A به B است. با توجه به جهت میدان مغناطیسی آهنربا و با استفاده از قاعده‌ی دست راست، جهت نیروی وارد بر سیم AB ($\vec{F}$) به سمت بالا است. طبق قانون سوم نیوتون، سیم به آهنربا نیروی واکنش ($F' = -F$) را به پایین وارد کرده و باعث می‌شود، عدد ترازو افزایش یابد:

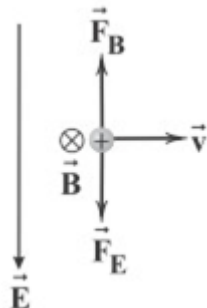
$$F = IlB \sin \alpha \Rightarrow F = 2 \times 0.4 \times 2/5 \times \sin 90^\circ = 2N$$

بنابراین:

$$\text{عدد جدید ترازو} = F' + W_{\text{آهنربا}} \Rightarrow \text{عدد جدید ترازو} = 2 + 5 = 7N$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا نیروهای وارد بر ذره را رسم می‌کنیم:



بزرگی نیروی الکتریکی وارد بر ذره برابر است با:

$$F_E = E|q| = 10^2 \times 100 \times 10^{-6} = 10^{-2} N$$

بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر ذره برابر است با:

$$F_B = |q| vB \sin 90^\circ = 100 \times 10^{-6} \times 10.22 \times 10^{-1} \times 1 = 10^{-3} N$$

بزرگی برابند نیروهای وارد بر این ذره برابر است با:

$$F_T - F_E - F_B = 10^{-2} - 10^{-3} = 10^{-3}(10 - 1)$$

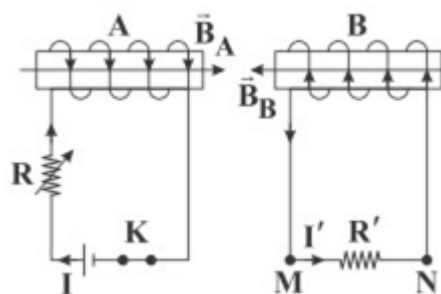
$$\Rightarrow F_T = 9 \times 10^{-3} N = 9mN$$

بنابراین جهت برابند نیروهای وارد بر ذره به سمت پایین است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر قرار است بردار سرعت $\vec{v}$ ثابت بماند، باید دو نیروی مغناطیسی و الکتریکی قرینه‌ی یکدیگر باشند، یعنی از نظر بزرگی یکسان ولی در خلاف جهت یکدیگر باشند، بنابراین:

$$|\vec{F}_B| = |\vec{F}_E| \Rightarrow q|\vec{v}||\vec{B}| = |\vec{E}|q \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای آن که جریان القایی در مقاومت R' از M به N باشد، میدان القایی در سیملوله‌ی B باید به سمت چپ باشد. از طریقی با توجه به این که میدان اصلی در سیملوله‌ی A به سمت راست است، می‌توان نتیجه گرفت که شار مغناطیسی عبوری از سیملوله‌ی B در حال افزایش بوده است، به همین دلیل میدان این سیملوله در خلاف جهت میدان سیملوله‌ی A است تا با افزایش شار مخالفت کند. به شکل زیر دقت کنید.



مطابق توضیحات فوق، اقداماتی می‌توانند باعث ایجاد جریان القایی از M به N شوند که شار مغناطیسی عبوری از سیملوله‌ی B را افزایش دهند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) با افزایش مقاومت R ، جریان سیملوله‌ی A کم شده و میدان آن ضعیف می‌شود، بنابراین شار مغناطیسی عبوری از سیملوله‌ی B کاهش می‌یابد.

ب) با باز کردن کلید K ، جریان سیملوله‌ی A کم شده و میدان آن ضعیف می‌شود، بنابراین شار مغناطیسی عبوری از سیملوله‌ی B کاهش می‌یابد.

ج) با حرکت دادن سیملوله‌ی A به سمت راست، سیملوله‌ها نزدیک می‌شوند و شار مغناطیسی عبوری از سیملوله‌ی B افزایش می‌یابد.

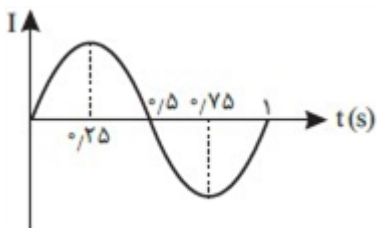
د) با حرکت دادن سیملوله‌ی B به سمت راست، سیملوله‌ها از هم دور می‌شوند و شار مغناطیسی عبوری از سیملوله‌ی B کاهش می‌یابد.

مطابق توضیحات فوق، فقط اقدام «ج» باعث افزایش شار مغناطیسی عبوری از سیملوله‌ی B می‌شود.

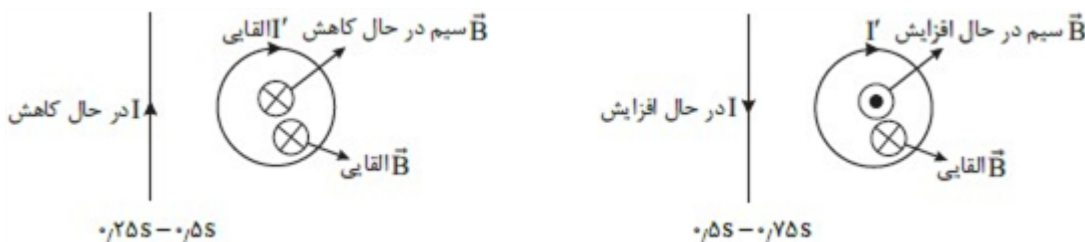
ابتدا نمودار جریان بر حسب زمان را رسم می‌کنیم.

$$\frac{2\pi}{T} = 2\pi \Rightarrow T = 1s$$

چون جریان مثبت رو به بالا است، داریم:



با توجه به شکل‌ها و قانون لنز داریم:



بنابراین در بازه‌ی ۰/۲۵s تا ۰/۷۵s جریان القایی در حلقه‌ی رسانا ساعتگرد است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. محیط هر حلقه برابر $2\pi R$ است. تعداد حلقه‌هایی که از سیمی به طول L ساخته می‌شود، از تقسیم

$$N = \frac{L}{2\pi R}$$

طول سیم بر محیط هر حلقه با صورت زیر به دست می‌آید:

شدت میدان مغناطیسی روی محور سیملوله از رابطه‌ی $B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} I$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$B = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{\frac{L}{2\pi R}}{l} I \Rightarrow 4 \times 10^{-3} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times L}{2\pi \times 5 \times 10^{-2}} \times 4$$

$$\Rightarrow 4 \times 10^{-3} = \frac{6 \times 10^{-7} \times L}{5 \times 15 \times 10^{-5}} \Rightarrow L = \frac{4 \times 10^{-3} \times 5 \times 15 \times 10^{-5}}{6 \times 10^{-7}} \Rightarrow L = 5 \times 10^{-1} = 5m$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون R_1 و R_2 موازی هستند، مقاومت معادل مدار برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2\Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = I = \frac{12}{2 + 1} = 4A$$

حال جریان عبوری از سیملوله را محاسبه می‌کنیم:

در نهایت از رابطه‌ی بزرگی میدان مغناطیسی داخل سیملوله‌ی آرمانی داریم:

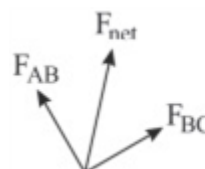
$$B = \mu_0 \cdot \frac{N}{L} I = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{10}{0.1} \times 4 \Rightarrow B = 16\pi \times 10^{-4} T \xrightarrow{T=10^{-4} G} B = 16\pi G$$

با استفاده از رابطه‌ی محاسبه‌ی نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی و قاعده‌ی دست راست برای دو سیم AB و BC می‌توان نوشت:

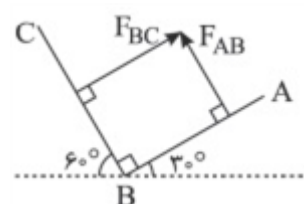
$$F_{AB} = B I_{AB} \sin \alpha = 0.4 \times 10 \times 0.5 = 2 \text{ N}$$

$$F_{BC} = B I_{BC} \sin \alpha = 0.4 \times 10 \times 0.5 = 2 \text{ N}$$

با توجه به شکل، مشخص می‌شود که نیروها بر هم عمود هستند. در این صورت نیروی خالص وارد بر قطعه‌ی سیم ABC برابر است با:



$$F_{\text{net}} = \sqrt{F_{AB}^2 + F_{BC}^2} = 2\sqrt{2} \text{ N}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بزرگی میدان مغناطیسی را در لحظه‌های $t = 2 \text{ s}$ و $t = 4 \text{ s}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} t = 2 \text{ s} \Rightarrow B_1 = 4 + 6 - 1 = 9 \text{ T} \\ t = 4 \text{ s} \Rightarrow B_2 = 16 + 12 - 1 = 27 \text{ T} \end{cases}$$

جریان القایی متوسط در پیچیه برابر است با:

$$I_{\text{av}} = \left| \frac{-N \Delta \Phi}{R \Delta t} \right| = N A \cos \theta \left(\frac{\Delta B}{\Delta t} \right) \Rightarrow I_{\text{av}} = \frac{100 \times 25 \times 10^{-3} \times 1}{5} \times \left(\frac{27 - (9)}{2} \right) = 4/5 \text{ A}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها:

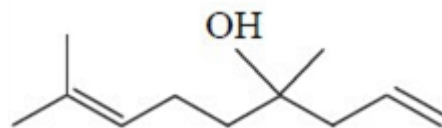
الف) نادرست. رازیانه دارای گروه عاملی اتر است.

ب) نادرست. گلوکوز با فرمول $C_6H_{12}O_6$ دارای ۲۴ پیوند است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

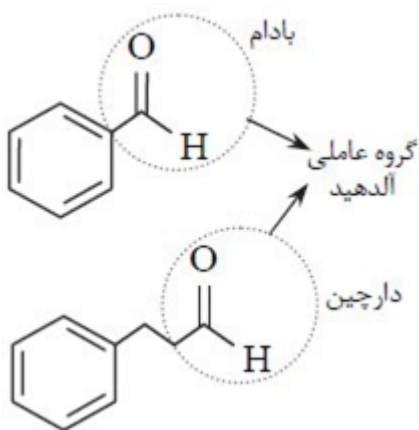
$$\text{تعداد پیوندها} = 24 = \frac{(4 \times 6) + (12) + (2 \times 6)}{2} = \frac{4C + H + 2O + 2N}{2}$$

پ) نادرست. فرمول نفتالن $C_{10}H_8$ است.

ت) درست. با توجه به ساختار مولکول‌های موجود در گشنیز درست است.



ث) درست. ساختار بادام و ساختار دارچین، هر دو دارای این گروه عاملی هستند.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تعداد مول ماده‌ی A در ثانیه‌ی دهم را برابر X فرض می‌کنیم.

$$\bar{R}_{1 \rightarrow 10} = 0.2 \text{ mol} \cdot L^{-1} \cdot s^{-1} \times 1 L = 0.2 \text{ mol} \cdot s^{-1}$$

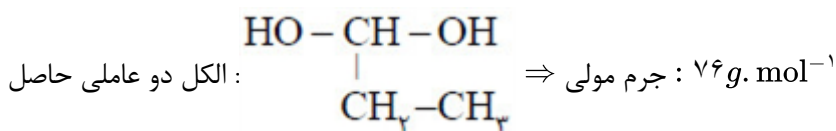
$$\bar{R}_{1 \rightarrow 10} = -\frac{n_{10} - n_1}{\Delta t} \Rightarrow 0.2 = -\frac{x - 4}{10} \Rightarrow 2 = -x + 4 \Rightarrow x = 2 \text{ mol}$$

$$\bar{R}_{10 \rightarrow 20} = 0.2 \text{ mol} \cdot L^{-1} \cdot s^{-1} \times 1 L = 0.2 \text{ mol} \cdot s^{-1}$$

$$\bar{R}_{10 \rightarrow 20} = -\frac{n_{20} - n_{10}}{\Delta t} \Rightarrow 0.2 = -\frac{y - 2}{10} \Rightarrow 0.2 = -y + 2 \Rightarrow y = 1.8 \text{ mol}$$

$$\begin{aligned} n_{10} &= 1.8 \\ n_{20} &= 1.6 \Rightarrow \Delta n = 0.2 \text{ mol} \Rightarrow \bar{R}_{20 \rightarrow 30} = \frac{0.2}{1 \times 10} = 0.02 \text{ mol} \cdot L^{-1} \cdot s^{-1} \end{aligned}$$

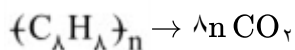
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



جرم مولی یک واحد پلی‌استر: $172 g \cdot \text{mol}^{-1}$

دی‌الکل + دی‌اسید $\rightarrow n H_2O + (2n - 1)$ پلی‌استر

$$\text{دی‌الکل } 22/80 g \times \frac{1 \text{ mol پلی‌استر}}{(172n) g \text{ پلی‌استر}} \times \frac{n \text{ mol دی‌الکل}}{1 \text{ mol پلی‌استر}} \times \frac{76 g \text{ الکل}}{1 \text{ mol الکل}} = 22/80 g$$

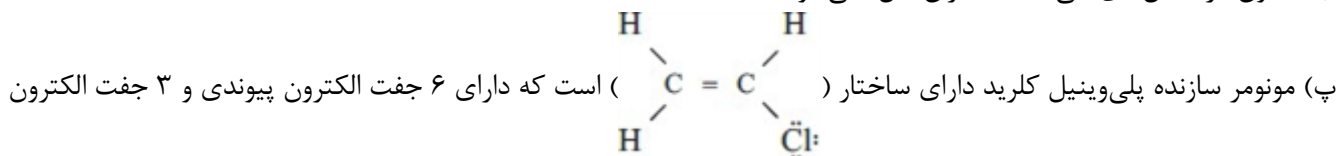


$$\frac{0.5 \text{ mol}}{1} = \frac{10.75/2 \times 1000 \text{ L}}{n \times 22/4} \Rightarrow n = 12000$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت‌های «آ» و «پ» درست هستند. بررسی عبارت‌ها:

(آ) در ساختار پلی‌استیرن پیوندهای دوگانه یافت شده و بنابراین سیر نشده است.

(ب) تفلون در حلال‌های آلی مانند هگزان حل نمی‌شود.



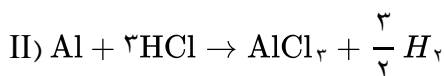
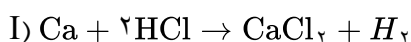
(ت) از پلی‌اتن سنگین می‌توان در ساخت پلاستیک‌های کدر استفاده کرد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به جز عبارت آخر، سایر عبارت‌ها درست هستند. در صورتی که تمام پیوندهای الکلی با ۱۴ اتم کربن،

یگانه باشد فرمول آن به صورت $C_{14}H_{29}OH$ خواهد بود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مخلوط اولیه را شامل a مول فلز قلیایی خاکی Ca و b مول فلز Al در نظر می‌گیریم:

$$40a + 27b = 30 \quad (*)$$



مطابق معادله‌ی واکنش (I) به ازای مصرف a مول فلز Ca، مقدار a مول گاز H_2 و مطابق معادله‌ی واکنش (II) به ازای مصرف b

$$2(a) + 2\left(\frac{3}{2}b\right) = 2/82 \quad (**)$$

مول فلز Al، مقدار $\frac{3}{2}b$ مول گاز H_2 تولید می‌شود.

$$a = 0.21, b = 0.8$$

از حل معادله‌های (*) و (**) مقادیر a و b به دست می‌آید:

$$R_{Ca} = \frac{0.21 \text{ mol}}{\left(\frac{1}{60}\right)h} = 12.6 \text{ mol} \cdot h^{-1}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۸۳

(آ) درست

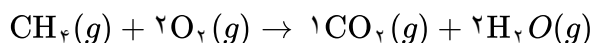
(ب) نادرست

$$\bar{R}_{AB} = \frac{2}{3} \bar{R}_{B_2}$$

(پ) نادرست. نمی‌توان گفت همه‌ی اتم‌های سازنده‌ی رادیکال از قاعده‌ی هشتایی پیروی می‌کنند.

(ت) نادرست. لیکوپن در ساختار خود تعداد زیادی پیوند دوگانه‌ی کربن - کربن وجود دارد.

(ث) نادرست. زیرا ضریب استوکیومتری فراورده‌ها با هم متفاوت است:

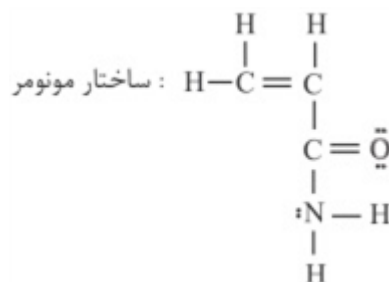


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸۴

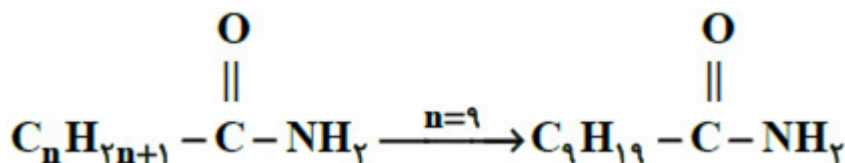
جفت الکترون ناپیوندی $n \times 3 =$

$$500 \times 3 = 1500$$

در هر واحد مونومری این ماده، (۱۱) پیوند اشتراکی وجود دارد.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۵



$$10(12) + 21(1) + 1(14) + 1(16) = 171 \text{ g. mol}^{-1}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۸۶



$$\frac{1 \text{ mol B تولیدی}}{2 \text{ mol A مصرفی}}$$

$$\begin{aligned} & \times 0.2 \text{ mol A مصرفی} = 0.1 \text{ mol B تولیدی} \\ \rightarrow \text{سرعت} &= \frac{\Delta n_B}{\Delta t} = \frac{0.1 \text{ mol}}{10} = 0.01 \frac{\text{mol}}{\text{min}} \end{aligned}$$

از طریق فرمول استوکیومتری به دست می‌آید.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در واکنش‌های غیرگازی، فشار کم‌ترین اثر را بر روی سرعت دارا می‌باشد. ۸۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. انرژی پیوند، مقدار انرژی لازم برای شکستن یک مول پیوند و تبدیل آن به دو مول اتم جدا از هم گازی شکل است. ۸۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دما در حقیقت با میانگین انرژی جنبشی ذرات ماده ارتباط دارد. ۸۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چهره‌ی آشکار ردپای غذا نشان می‌دهد که کم‌تر از ۵۰٪ (۳۰٪) از غذایی که در جهان فراهم می‌شود به مصرف نمی‌رسد. ۹۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اساس کار یخچال صحرایی همانند تجزیه‌ی دی‌نیتروژن تترااکسید و تبدیل آن به گاز قهوه‌ای رنگ NO₂ فرایندی گرماگیر است. این دستگاه ساده و ارزان قیمت به سرعت در مقیاس صنعتی فراگیر شد. ۹۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹۲

فرازش ← جامد به گاز ← f

انجماد ← مایع به جامد ← d

میعان ← گاز به مایع ← b

چگالش ← گاز به جامد ← a

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹۳

مورد اول: متفاوت هستند.

مورد دوم: روغن زیتون کوچک‌تر از پلی‌اتن و انسولین

مورد چهارم: میان کربن فقط نیست. اکسیژن هم هست.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها: ۹۴

(آ) ارزش سوختی، انرژی حاصل از سوختن یک گرم از ماده است.

(ب) اگرچه همه‌ی واکنش‌های سوختن گرماده هستند، اما ارزش سوختی بدون علامت منفی گزارش می‌شود.

(پ) مقایسه‌ی صحیح به صورت: $CH_4 < C_2H_4 < C_2H_6$ است.

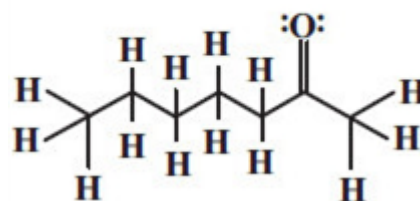
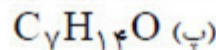
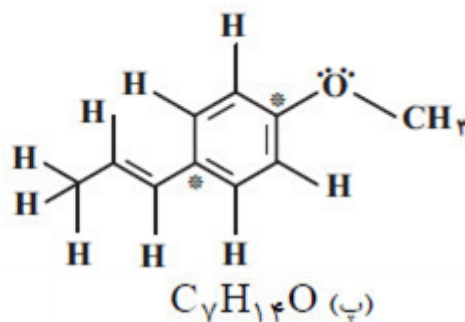
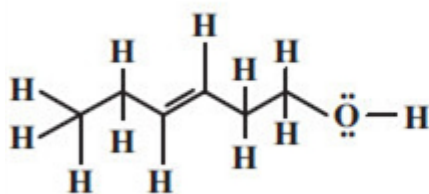
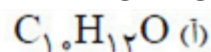
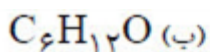
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به جز عبارت آخر، سایر عبارت‌ها درست هستند. ۹۵

گرما را می‌توان هم‌ارز با آن مقدار انرژی گرمایی دانست که به دلیل تفاوت در دما جاری می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت‌های اول و دوم درست هستند. بررسی عبارت‌های نادرست: ۹۶

• سطح انرژی و پایداری دو ترکیبی که با هم ایزومرند، متفاوت است.

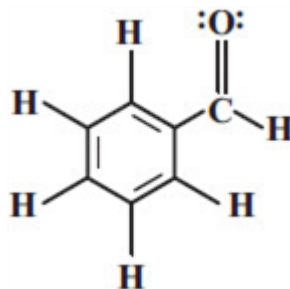
• واکنش تبدیل گرافیت به الماس، برخلاف واکنش تبدیل اوزون به اکسیژن، یک واکنش گرماگیر است.



فقط عبارت پنجم نادرست است. بررسی عبارت‌ها:

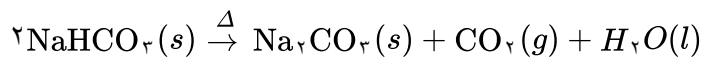
عبارت اول: ترکیب‌های آ و ب دارای ۱۲ اتم هیدروژن در هر واحد فرمولی هستند.

عبارت دوم: ترکیب ب و $(C_6H_{12}O)$ فرمول مولکولی یکسان ولی فرمول ساختاری متفاوت دارند؛ در نتیجه ایزومر (همپار) هم محسوب می‌شوند و به دلیل پیوندها و اتصال اتم‌های مختلف، محتوای انرژی متفاوتی خواهند داشت.



عبارت سوم: ترکیب پ و $(C_7H_{14}O)$ هر دو ۴ الکترون ناپیوندی دارند.

عبارت چهارم: اختلاف تعداد اتم‌های هیدروژن در هر واحد فرمولی ترکیب‌های ب و پ، دو تا می‌باشد ($14 - 12 = 2$) و در ترکیب آ دو اتم کربن نشاندار (*) به هیدروژن متصل نیستند. عبارت پنجم: گروه عاملی مولکول عامل طعم و بوی دارچین، آلدئید است.

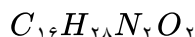
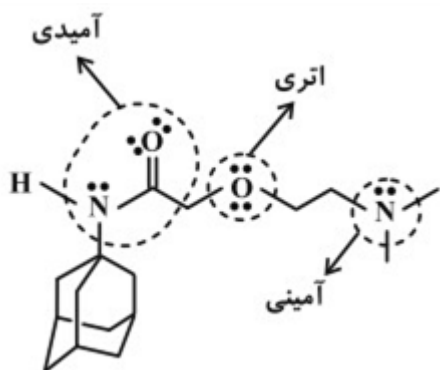


گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به آنکه حالت فیزیکی آب در شرایط STP مایع می‌باشد، حجم گاز تولید شده فقط مربوط به CO_2 می‌باشد:

$$?s = 560 \text{ mL } CO_2 \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{22400 \text{ mL } CO_2} \times \frac{2 \text{ mol } NaHCO_3}{1 \text{ mol } CO_2} \times \frac{1 \text{ min}}{0.2 \text{ mol } NaHCO_3} \times \frac{60s}{1 \text{ min}} = 150s$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. موارد اول و سوم به درستی بیان شده‌اند.



بررسی همه‌ی موارد:

مورد اول: درست،

$$\text{تعداد جفت‌های پیوندی} = \frac{((16 \times 4) + (28 \times 1) + 2 \times 3) + (2 \times 1)}{2} = 50$$

$$\text{تعداد جفت‌های ناپیوندی} = (2 \times 1) + (2 \times 2) = 6$$

اختلاف شمار جفت الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی در آن برابر $50 - 6 = 44$ می‌باشد.

مورد دوم: نادرست:

$$\text{مجموع درصد جرمی } C \text{ و } O = \frac{\text{جرم } C + \text{جرم } O}{\text{جرم کل}} \times 100$$

$$= \frac{(2 \times 16) + (16 \times 12)}{(16 \times 12) + (28 \times 1) + (2 \times 16) + (3 \times 16)} \times 100 = \frac{224}{280} \times 100 = 80\%$$

مورد سوم: درست، به دلیل داشتن اتم هیدروژن متصل به اتم N ، می‌تواند با مولکول‌های خود، پیوند هیدروژنی برقرار کند. ویتامین

C نیز به دلیل داشتن هیدروژن متصل به O ، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارد.

مورد چهارم: نادرست،

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{شمار اتم ها}}{\text{شمار عنصرها}} = \frac{16+28+2+2}{4} = \frac{48}{4} = 12 \\ \text{نفتالن } (C_{10}H_8) : \frac{\text{اتم ها}}{\text{عنصرها}} = \frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9 \end{array} \right. \Rightarrow 2 \times 9 \neq 12$$

مورد پنجم: نادرست، گروه عاملی آلکین در این ترکیب پیوند $N-H$ ندارد. به همین دلیل قابلیت واکنش دادن با کربوکسیلیک

اسیدها و تشکیل گروه عاملی آمید را ندارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۰۰

با توجه به اینکه سرعت متوسط واکنش $\frac{0.04}{s} \text{ mol}$ است، سرعت تولید گاز O_2 را می‌توان تعیین کرد:

$$\frac{R(O_2)}{3} = 0.04 \Rightarrow \bar{R}(O_2) = 0.12 \frac{\text{mol}}{s} = \frac{\frac{53/76}{22/4} \text{ mol}}{\Delta t(s)} \Rightarrow \Delta t = 20s$$

حال می‌توان از حجم گاز O_2 تولید شده به جرم $KClO_3$ مصرف شده رسید:

$$53/76 L O_2 \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{22/4 L O_2} \times \frac{2 \text{ mol } KClO_3}{3 \text{ mol } O_2} \times \frac{122.5 KClO_3}{1 \text{ mol } KClO_3} = 196g KClO_3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۰۱

همه‌ی موارد توصیفی برای کمیت دمای یک ماده هستند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. موارد چهارم و پنجم نادرست هستند.

۱۰۲

تعیین تعداد دقیق مونومرهای شرکت کننده در یک واکنش پلیمری شدن ممکن نیست و تاکنون هیچ قاعده‌ای برای شمار مونومرهای متصل شده به یکدیگر ارائه نشده است. به همین دلیل برای پلیمرها نمی‌توان فرمول مولکولی دقیقی نوشت. (درستی موارد اول، دوم و سوم)

هر ترکیب آلی که در ساختار خود پیوند دوگانه کربن - کربن ($C = C$) در زنجیره اصلی کربنی داشته باشد، می‌تواند در این نوع واکنش پلیمری شدن شرکت کند. (نه هر نوع پیوند دوگانه‌ای!) (نادرستی مورد چهارم)
توجه شود که برخی پلیمرها سیرنشده‌اند و پیوند دو یا سه‌گانه دارند مانند پلی‌استیرن. (نادرستی مورد پنجم)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. موارد الف و پ نادرست هستند. بررسی همه موارد:

۱۰۳

الف) ترکیب ۱ پلی‌استیرن است و بسیار به کار رفته در ساخت پتو، پلی‌سیانواتن است که فاقد حلقه آلی سیرنشده است.
ب) ترکیب ۲ پلی‌تترافلوئورواتن (تفلون) است که در تهیه نخ دندان و اتوی لباس کاربرد دارد و در حلال‌های آلی حل نمی‌شود.
پ) ترکیب ۳ پلی‌پروپن است که در ساخت سرنگ کاربرد دارد. دقت کنید که پلی‌استیرن در ساخت ظروف پلاستیکی یک بار مصرف کاربرد دارد، نه پلی‌پروپن
ت) ترکیب ۴ پلی‌وینیل کلرید است که جزء بسپارهای ماندگار در طبیعت می‌باشد و برخلاف بسپار مورد استفاده در ساخت سطح زباله که همان پلی‌لاکتیک اسید است، زیست تخریب پذیر نمی‌باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هر چهار عبارت پیشنهاد شده نادرست هستند. بررسی عبارت‌ها:

۱۰۴

- مالتوز، قند موجود در جوانه گندم است، نه میوه‌ها!
- چهره آشکار ردپای غذا نشان می‌دهد که سالانه حدود ۳۰٪ غذایی که در جهان فراهم می‌شود به مصرف نمی‌رسد و به زباله تبدیل می‌شود.
- با فرض این که جمعیت جهان ثابت بماند، باز هم تقاضا برای غذا افزایش می‌یابد.
- سهم تولید گاز CO_2 در ردپای غذا به مراتب بیشتر از سوختن سوخت‌ها در خودروها، کارخانه‌ها و ... است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شکل زیر الگویی از ساختار کلی پلی‌استرها را نشان می‌دهد.

۱۰۵

