

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(A \cap B') - (B - A) = (A \cap B') \cap (B \cap A')' = A \cap B' \cap (B' \cup A) = A \cap B' = A - B$$

جذب

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون کلمه‌ی «جهانگردی» شامل ۸ حرف متمایز است، پس $n(s) = 8!$ از طرفی حالت مطلوب به

صورت زیر است:

$$n(A) = \frac{6!}{1!1!1!1!1!1!} = 6!$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6!}{8!} = \frac{6!}{8 \times 7 \times 6!} = \frac{1}{56}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

برای کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه، حالات زیر را داریم:

از میان اعداد ۲ و ۳ باید ۰، ۱، ۲ یا ۳ عضو انتخاب کنیم:

$1, 4 \rightarrow$

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} + \cancel{\binom{2}{3}} = 1 + 2 + 1 = 4$$

غ ق ق

$2, 8 \rightarrow$

از میان اعداد ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ باید ۰، ۱، ۲ یا ۳ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 1 + 5 + 10 + 10 = 26$$

$3, 12 \rightarrow$

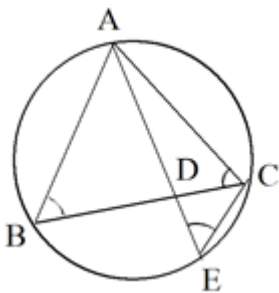
از میان اعداد ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ باید ۰، ۱، ۲ یا ۳ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 1 + 8 + 28 + 56 = 93$$

و تعداد کل زیرمجموعه‌های حداکثر ۵ عضوی برابر است با:

$$4 + 26 + 93 = 123$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\widehat{E} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{A} = \frac{AC}{r}$$

$$\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AEC$$

$$\begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{EAC} \\ \widehat{E} = \widehat{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE}$$

$$AD \times AE = AC^2 \xrightarrow{AC=AB} AD \times AE = AB^2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. AC قطر دایره است، بنابراین هریک از کمان‌های ABC و ADC برابر 180° هستند.

$$\widehat{ACB} = \frac{AB}{r} > 45^\circ \Rightarrow \widehat{AB} > 90^\circ \Rightarrow \widehat{AB} > \widehat{BC} \quad (1)$$

$$\widehat{M} = \frac{BC - AD}{r} > 0 \Rightarrow \widehat{BC} > \widehat{AD} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{BC} < 180^\circ - \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AB} < \widehat{CD} \quad (2)$$

$$\stackrel{1,2}{\Rightarrow} \widehat{CD} > \widehat{AB} > \widehat{BC} \Rightarrow CD > AB > BC \Rightarrow 7a - 1 > 3a + 4 > 5a + 1$$

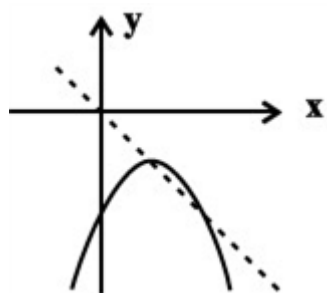
$$7a - 1 > 3a + 4 \Rightarrow 4a > 5 \Rightarrow a > \frac{5}{4} \quad (1)$$

$$3a + 4 > 5a + 1 \Rightarrow 2a < 3 \Rightarrow a < \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \frac{5}{4} < a < \frac{3}{2}$$

در بین گزینه‌ها تنها عدد $\frac{11}{8}$ در این نامساوی صدق می‌کند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل زیر، مختصات رأس سهمی $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ روی خط $y = -x$ قرار دارد؛ یعنی:



عرض رأس سهمی = - طول رأس سهمی

$$-\frac{2-a}{2a} = -\frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow 2a - 4 = \Delta$$

$$\Rightarrow 2a - 4 = (2-a)^2 - 4a\left(-\frac{15}{4}\right) \Rightarrow a^2 + 9a + 8 = 0$$

$$\Rightarrow a = -1 \text{ یا } -8$$

با بررسی هر دو مقدار به دست آمده در ضابطه‌ی تابع، داریم: (در ربع چهارم طول‌ها مثبت و عرض‌ها منفی‌اند.)

$$\begin{cases} a = -1 \Rightarrow y = -x^2 + 3x - \frac{15}{4} \Rightarrow x_{\max} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}, \\ a = -8 \Rightarrow y = -8x^2 + 10x - \frac{15}{4} \Rightarrow x_{\max} = \frac{-10}{-16} = \frac{5}{8}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{\max} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \text{ قابل قبول} \\ y_{\max} = \frac{20}{-32} = -\frac{5}{8} \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1} \circ g(x) = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow g(x) = f\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \xrightarrow{x=3} g(3) = f\left(\frac{2}{1}\right) \Rightarrow g(3) = f(2)$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{x+2} \xrightarrow{x=-3} g^{-1}(-3) = \frac{-3}{-1} \Rightarrow g^{-1}(-3) = 3 \Rightarrow g(3) = -3$$

$$f(2) = g(3) = -3 \Rightarrow f(2) = -3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون α ریشه‌ی معادله است لذا در آن صدق می‌کند. ۸

$$\alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = 3\alpha + 1 \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^4 = 3\alpha^2 + \alpha \xrightarrow{\alpha^3 = 3\alpha + 1}$$

$$\alpha^4 = 3(3\alpha + 1) + \alpha = 9\alpha + 3 + \alpha \Rightarrow \alpha^4 = 10\alpha + 3$$

$$\alpha^3(3 + 10\beta) = (10\alpha + 3)(3 + 10\beta) = 100\alpha\beta + 30(\alpha + \beta) + 9$$

$$\begin{cases} \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -1 \\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3 \end{cases} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\Rightarrow \alpha^3(3 + 10\beta) = 100(-1) + 30(3) + 9 = -100 + 90 + 9 = -100 + 99 = -1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای هر x حقیقی داریم: ۹

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow R_f = [0, 1)$$

برد تابع f ، دامنه‌ی تابع g محسوب می‌شود.

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 1 \leq x + 1 < 2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x+1} < \sqrt{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ زمانی $f(x) = f^{-1}(x)$ است که $a+d=0$ باشد. ۱۰

$$a + a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = f^{-1}(x) = \frac{\frac{1}{2}x + 3}{x - \frac{1}{2}}$$

$$f(2) + f^{-1}(2) = 2f(2) = 2 \times \frac{1+3}{2-\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون دو تابع f و g نسبت به محور y ها قرینه‌اند، پس: ۱۱

$$\frac{a-3}{a-1} = \frac{a-1}{2a+1} \Rightarrow 2a^2 - 5a - 3 = a^2 - 2a + 1 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = +4 \text{ ق ق } (a > 0) \\ a = -1 \text{ غ ق } \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a=4} h(x) = 4^x \Rightarrow h(1) = 4^1 = 4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۲

$$\frac{x}{1+|x|} = -\frac{3}{4} \xrightarrow{x < 0} \frac{x}{1-x} = -\frac{3}{4} \Rightarrow 4x = -3 + 3x \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \Rightarrow g\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{x}{1+|x|} = \frac{5}{9} \xrightarrow{x > 0} \frac{x}{x+1} = \frac{5}{9} \Rightarrow 9x = 5x + 5 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله سهمی را با داشتن سه نقطه $A = (0, 6)$ و $B = (2, 6)$ و $C = (-2, 2)$ می نویسیم.

می توان معادله سهمی را $y = ax^2 + bx + c$ در نظر گرفت و به کمک ۳ معادله ۳ مجهول را نوشت. منظور سؤال یافتن تفاضل

$$|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

برای نوشتن معادله سهمی به روش زیر عمل می کنیم:

$$y = 6 + a(x - 0)(x - 2) \xrightarrow{\text{روی سهمی}} 2 = 6 + a(-2)(-2 - 2) \Rightarrow 2 = 6 + 8a \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

$$y = \frac{-1}{4}x(x - 2) + 6 = \frac{-x^2}{4} + x + 6$$

$$\text{تفاضل ریشه ها} = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{13}}{\left|\frac{-1}{4}\right|} = 4\sqrt{13}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x)) < 0 \Rightarrow \frac{2g(x) - 1}{3g(x) + 1} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < g(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{3} < \sqrt{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{27}} < x < \frac{1}{8}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\log x_1 + \log x_2}{\log(x_1 + x_2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\log(x_1 x_2)}{\log(x_1 + x_2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\log a}{\log 4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log a = \frac{1}{2} \log 4$$

$$= \log 2 \Rightarrow a = 2$$

توجه: اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله $Ax^2 + Bx + C = 0$ باشد، آن گاه داریم:

$$x_1 + x_2 = \frac{-B}{A} = 4$$

$$x_1 x_2 = \frac{C}{A} = \frac{a}{1} = a$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر $A \times B = B \times A$ آن گاه $A = B$ پس:

$$(A \cup A') \cap (A' \cup A) = U \cap U = U$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

چون ارزش گزاره ای مرکب $(p \wedge q \wedge r)$ نادرست است، پس حداقل یکی از سه گزاره، ارزش نادرست دارد. از طرفی q گزاره ای درست است، پس برای نادرست بودن گزاره ای مرکب $(p \wedge q \wedge r)$ برای دو گزاره p و r سه حالت زیر ممکن است.

p	r
د	ن
ن	د
ن	ن

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در معادله $x^2 + x + 3 = 0$ ، $\Delta < 0$ است، پس معادله ریشه ی حقیقی ندارد. ۹۱ هم عدد مرکب

است زیرا بر ۷ بخش پذیر است. پس دو طرف گزاره ی دوشروطی داده شده نادرست هستند؛ پس ارزش کل گزاره ی دوشروطی درست است.

بین دو عدد حقیقی بی شمار عدد گویا وجود دارد. همچنین عدد یک مرکب نیست. پس سمت راست گزاره ی دوشروطی نادرست و سمت چپ آن درست است، پس ارزش کل گزاره ی دوشروطی نادرست است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۹

کافی است دقت کنید مجموعه A یک مجموعه ۳ عضوی است و هر مجموعه ۳ عضوی، ۵ افراز مختلف دارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۰

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = [-1, 3] \\ A_2 = [-2, 4] \\ A_3 = [-3, 5] \\ \vdots \\ A_{14.2} = [-14.2, 14.4] \end{array} \right\} \rightarrow [-1, 3] \Rightarrow \text{طول بازه} = 4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون با دوران شکل می توان اضلاع دو مثلث را به موازات یکدیگر درآورد. زیرا در دو شکل مجانس پاره خط های نظیر موازیند. ۲۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی موارد: ۲۲

الف) درست است.

ب) دوران شیب خط را لزوماً حفظ نمی کند، پس نادرست است.

ج) در تجانس اگر $k < 0$ باشد، تجانس معکوس و اگر $|k| < 1$ باشد، تجانس انقباض است، پس نادرست است.

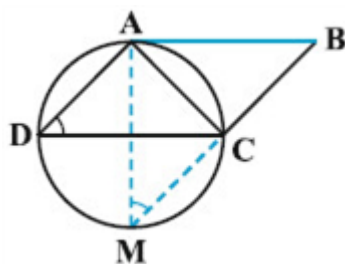
د) درست است.

هـ) در تجانس، خطوطی که هر نقطه را به تصویرش وصل می کنند در مرکز تجانس هم رس اند، پس نادرست است.

و) درست است.

پس موارد (الف)، (د) و (و) درست است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است، پس $\widehat{B} = \widehat{D}$. از طرفی در دایره داریم: ۲۳



$$\widehat{D} = \widehat{M} = \frac{\widehat{AC}}{2} \quad (\text{زاویه محاطی})$$

یعنی $\widehat{B} = \widehat{M}$ و در نتیجه مثلث ABM متساوی الساقین است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۴

(۱) نادرست است، زیرا تصویر یک خط تحت یک تجانس وقتی بر خود خط منطبق است که مرکز تجانس روی خط باشد.

(۲) نادرست است، زیرا بازتاب هیچ گاه یک تبدیل همانی نیست.

(۴) نادرست است، زیرا تجانس به طور کلی شیب خط را حفظ می کند.

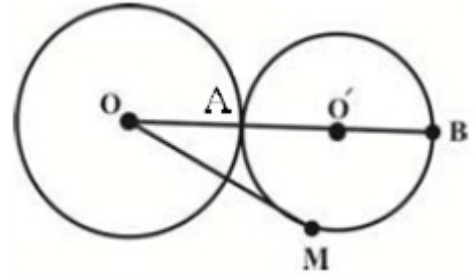
۲۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با توجه به فرض مسئله $OO' = 13 = r + r'$ بنابراین دو دایره مماس بیرون هستند.

با نوشتن روابط طولی نقطه O نسبت به دایره کوچکتر داریم:

$$OM^2 = OA \times OB \Rightarrow OM^2 = 8 \times 18 = 144 \Rightarrow OM = 12$$



۲۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \alpha = 4 + \sqrt{3} \\ \beta = 4 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 4 + \sqrt{3} + 4 - \sqrt{3} = 8 \\ p = \alpha\beta = (4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}) = 16 - 3 = 13 \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + p = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 13 = 0$$

۲۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای آن که دو خط عمود باشند باید شیب آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگر باشند.

$$\begin{cases} y = 4x - 1 \Rightarrow m_1 = 4 \\ y = (2k - 1)x + 1 \Rightarrow m_2 = 2k - 1 \end{cases}$$

$$2k - 1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2k = \frac{3}{4} \Rightarrow k = \frac{3}{8}$$

۲۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون f یک تابع خطی است بنابراین $f(x) = ax + b$:

$$\begin{aligned} f(1) &= a + b = 2 \\ f(2) &= 2a + b = 4 \end{aligned} \Rightarrow a = 2, b = 0 \Rightarrow f(x) = 2x$$

$$y = 2x \xrightarrow{\div 2} x = \frac{y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

۲۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون f یک تابع خطی است بنابراین $f(x) = ax + b$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 7 \Rightarrow a + b = 7 \\ f(5) &= 15 \Rightarrow 5a + b = 15 \end{aligned} \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2, b = 5 \Rightarrow f(x) = 2x + 5 \Rightarrow y = 2x + 5$$

$$\Rightarrow 2x = y - 5 \Rightarrow x = \frac{y - 5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$$

۳۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$|x + 7| > 10 \Rightarrow x + 7 > 10 \text{ یا } x + 7 < -10 \Rightarrow x > 3 \text{ یا } x < -17$$

$$\Rightarrow (-\infty, -17) \cup (3, +\infty)$$

۳۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{5}x + 1) = \text{Log}_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} \Rightarrow \text{Log}_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{5}x + 1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{5}x + 1 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{5}x = -\frac{8}{9} \Rightarrow x = -\frac{40}{9}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{40}{9} \text{ ق ق}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع را به صورت دو ضابطه می نویسیم:

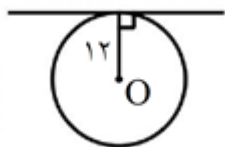
$$f(x) = y = \begin{cases} (a+1)x - 2 & x \geq 2 \\ (a-1)x + 2 & x < 2 \end{cases}$$

به شرطی این تابع پیوسته، یک به یک است که هر دو ضابطه یا اکیداً صعودی باشند و یا اکیداً نزولی. پس شیب دو خط یا هر دو

$$\begin{cases} a+1 > 0, a-1 > 0 \Rightarrow a > 1 \\ a+1 < 0, a-1 < 0 \Rightarrow a < -1 \end{cases}$$

مثبت‌اند یا هر دو منفی. پس به ازای $-1 \leq a \leq 1$ این تابع وارون‌پذیر نیست برای a سه عدد صحیح ۱ و ۰ و -۱ وجود دارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

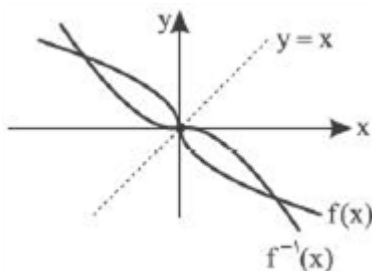


$$\frac{|3k - 8k - k|}{\sqrt{9 + 16}} = 12 \Rightarrow |6k| = 60 \Rightarrow k = \pm 10$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

برای رسم نمودار وارون $f(x)$ باید آن را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم. نمودار دو تابع در سه نقطه با هم برخورد می‌کنند.

به‌علاوه می‌توانید از این نکته مهم استفاده کنید که نمودار $f(x)$ شبیه تابع $y = -\sqrt{x}$ است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به کمک نمودار داریم:

$$f(5) = 4 \Rightarrow f(f(5)) = f(4) = 3$$

$$f(f(f(5))) = f(f(4)) = f(3) = 3$$

۴

$$f(4) = 3 \Rightarrow f(f(4)) = f(3) = 3 \Rightarrow A = 3 + 3 = 6$$

$$f(x) = x^2 \sqrt{x} = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تابع پایینی نزولی است پس باید وارون این قسمت را بیابید. چون دامنه این قسمت $x \leq 0$ است پس برد $y \geq 0$ است. در تابع

وارون جای دامنه و برد باید عوض شود.

$$y = -x^3 \Rightarrow -y = x^3 \Rightarrow -\sqrt[3]{y} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x} \text{ و } x \geq 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مجموع ریشه‌های حقیقی معادله درجه دو از رابطه $\frac{-b}{a}$ به دست می‌آید:

$$\frac{-b}{a} = \frac{-(-9)}{1} = 9$$

$$D_f = \{m, \circ, 3\}$$

$$D_g = \{5, 4, 3\}$$

$$D_{f+g} = \{5, k\} = D_f \cap D_g \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ k = 3 \end{cases}$$

$$(f+g)(5) = l \Rightarrow f(5) + g(5) = l \Rightarrow 5 + 2 = l \Rightarrow l = 7$$

$$(f+g)(3) = 10 \Rightarrow f(3) + g(3) = 10 \Rightarrow 6 + n = 10 \Rightarrow n = 4$$

$$\Rightarrow m + n + l + k = 5 + 4 + 7 + 3 = 19$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$(2f-g)(3) = 2f(3) - g(3) = 2\sqrt{3+1} - \frac{3+1}{3-2} = 4 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow |x_2 - x_1| = \sqrt{4k^2 - 20} = 2\sqrt{k^2 - 5}$$

که باید برابر $\frac{4}{3}k$ قرار دهیم:

$$2\sqrt{k^2 - 5} = \frac{4}{3}k \Rightarrow \sqrt{k^2 - 5} = \frac{2k}{3} \Rightarrow k^2 - 5 = \frac{4k^2}{9} \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow \left[\frac{k^2}{2}\right] = [9/5] = 4$$

$$E_1 = 250 \cdot \frac{N}{C}, r_1 = r, E_2 = 160 \cdot \frac{N}{C}, r_2 = r + 10$$

$$E = \frac{kq}{r^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{250}{160} = \left(\frac{r+10}{r}\right)^2 \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{r+10}{r} \Rightarrow 5r = 4r + 40 \Rightarrow r = 40 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{600} + \frac{1}{1200} \Rightarrow R_T = 400 \Omega, I = \frac{V}{R} = \frac{200}{400} = 0.5 \text{ A}$$

$$U = RI^2t = 400 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 90 \times 60 = 540000 \text{ J}$$

$$540000 \times \frac{1}{1000} \times \frac{1}{3600} = 0.15 \text{ kWh}$$

البته می‌توان از رابطه $U = \frac{V^2 t}{R}$ نیز استفاده کرد. در این حالت نیازی به محاسبه I نیست.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا بازده مولد را به دست می آوریم: ۴۳

$$\begin{cases} I = \frac{\varepsilon}{R+r} \\ R_a = \frac{\varepsilon I - r I^2}{\varepsilon I} = \frac{\varepsilon - r I}{\varepsilon} = \frac{R}{R+r} \end{cases}$$

$$R_a = 50\% = 0.5 \Rightarrow \frac{R}{R+r} = 0.5 \Rightarrow R = r$$

با افزایش R ، بازده مولد افزایش می یابد و با کاهش R ، بازده کاهش می یابد. بنابراین ابتدا $R > r$ باشد سپس R را کاهش داد تا بازده $R = r$ به ۵۰ درصد برسد.

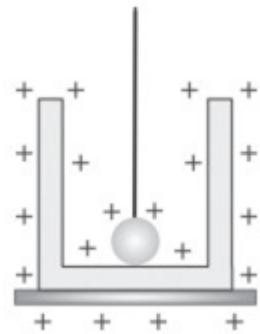
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴۴

دو سر مقاومت ۱۰۰ به باتری وصل است و چون باتری آرمانی بوده، پس اختلاف پتانسیل دو سر باتری و مقاومت ۱۰۰ برابر ۲۰V است:

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow P = \frac{20 \times 20}{10} = 40 \text{ W}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در شکل (۱) گلوله و جعبه ای که در آن بسته است، جسم واحدی را تشکیل می دهند که گلوله در داخل ۴۵

جسم رسانا قرار گرفته، بنابراین تمام بار آن به سطح خارجی جعبه منتقل می شود و در نتیجه گلوله ی باردار خنثی می شود، اما در شکل (۲) گلوله قسمتی از سطح خارجی جسم رسانا محسوب می شود و لذا گلوله ی باردار خنثی نشده و مقداری بار خواهد داشت.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه ی $V = Ed$ می توانیم بنویسیم: ۴۶

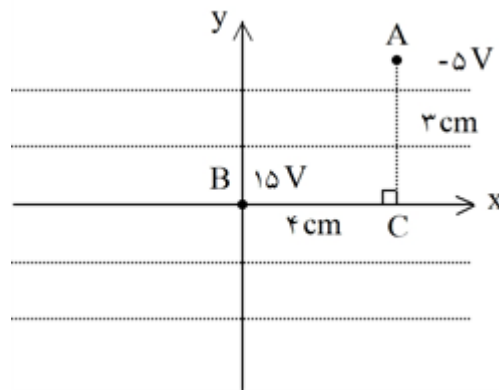
$$e = \frac{V}{d} \xrightarrow{V = \frac{Q}{C}} E = \frac{\frac{Q}{C}}{d} = \frac{Q}{C \times d}$$

$$\xrightarrow{C = \kappa \varepsilon \cdot \frac{A}{d} \times d} = \frac{Q}{\kappa \varepsilon \cdot A}$$

۴۷

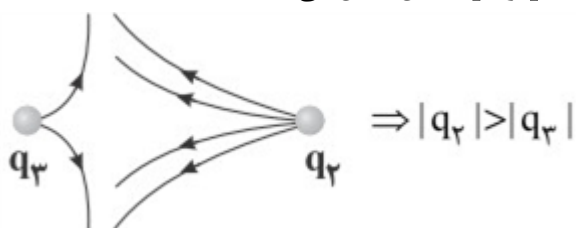
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این که با حرکت عبور بر خط های میدان، پتانسیل الکتریکی نقاط تغییری نمی کند، بنابراین پتانسیل الکتریکی نقاط A و C یکسان است. از طرف دیگر، جهت خطوط میدان همواره از پتانسیل بیش تر به پتانسیل کمتر است، بنابراین جهت خط های میدان در جهت محور x است. برای محاسبه اندازه میدان داریم:

$$E = \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{|15 - (-5)|}{4 \times 10^{-2}} \Rightarrow E = 500 \frac{N}{C}$$

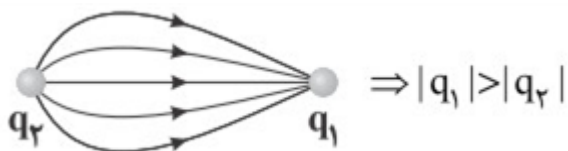


۴۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا علامت بارها را مشخص می کنیم. با توجه به جهت خطوط میدان الکتریکی خارج شده از بارهای q_1 و q_2 ، این دو بار، مثبت و با توجه به خطوط میدان الکتریکی وارد شده به بار q_1 ، علامت این بار، منفی است. بار q_1 به علت منفی بودن، خطوط میدان را به سمت خود جذب می کند. اگر بار q_1 نبود، خطوط q_2 و q_3 به این شکل می شد:



بار q_3 مثبت است و خطوط میدان را از خود دفع می کند، اگر بار q_3 نبود، خطوط q_1 و q_2 به این شکل می شد:



۴۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q} \Rightarrow V_B - V_A = \frac{(U_E)_B - (U_E)_A}{q} \Rightarrow V_B - V_A = \frac{0.6 \times 10^{-3} - 0.4 \times 10^{-3}}{-2 \times 10^{-6}} = -100 V$$

$$\Rightarrow V_B - 20 = -100 \Rightarrow V_B = -80 V$$

۵۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. یک خازن تا وقتی شارژ می شود که اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه ی آن با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر شود.

۵۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای پاسخ دادن به این سؤال، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta U_E = q_1(V_B - V_A) \Rightarrow \begin{cases} \Delta U_E = +8.0 \text{ J} \\ q_1 = +2 \mu\text{C} \end{cases} \Rightarrow (V_B - V_A) = \frac{8.0}{2 \times 10^{-6}} = 4 \times 10^6 \text{ V}$$

حال برای بار q_2 داریم:

$$\Delta U_E = q_2(V_B - V_A) = (-4 \times 10^{-6}) \times (4 \times 10^6) = -16.0 \text{ J}$$

بنابراین با انتقال بار q_2 از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B ، ۱۶۰ ژول انرژی آزاد می‌شود.

۵۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. موارد «الف»، «ب» و «د» منشأ الکتریکی دارند، ولی مورد «ج» می‌تواند نیروی ربایشی الکتریکی یا مغناطیسی یا گرانشی باشد و با موارد دیگر متفاوت است.

۵۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طبق رابطه‌ی چگالی داریم:

$$\rho' = \frac{m}{V} \Rightarrow \rho' = \frac{m}{AL} \Rightarrow A = \frac{m}{\rho' L} \quad (1)$$

$$\text{از طرفی طبق رابطه‌ی مقاومت الکتریکی داریم:} \quad R = \rho_{\text{ویژه}} \frac{L}{A} \quad (2) \quad \text{با جای گذاری رابطه ۱ در رابطه ۲ خواهیم داشت:}$$

$$\xrightarrow{1,2} R = \rho_{\text{ویژه}} \frac{L}{A} = \rho_{\text{ویژه}} \frac{L}{\frac{m}{\rho' L}} \Rightarrow R = \frac{\rho_{\text{ویژه}} \times \rho' \times L^2}{m} \xrightarrow{R=\frac{V}{I}} \frac{V}{I} = \frac{\rho_{\text{ویژه}} \times \rho' \times L^2}{m}$$

در نهایت به کمک رابطه‌ی به دست آمده، اختلاف پتانسیل مورد نیاز را به دست می‌آوریم:

$$\frac{V}{3} = \frac{1/8 \times 10^{-8} \times 10 \times 10^{-3} \times (50)^2}{150 \times 10^{-3}} \Rightarrow V = 9 \text{ V}$$

۵۴

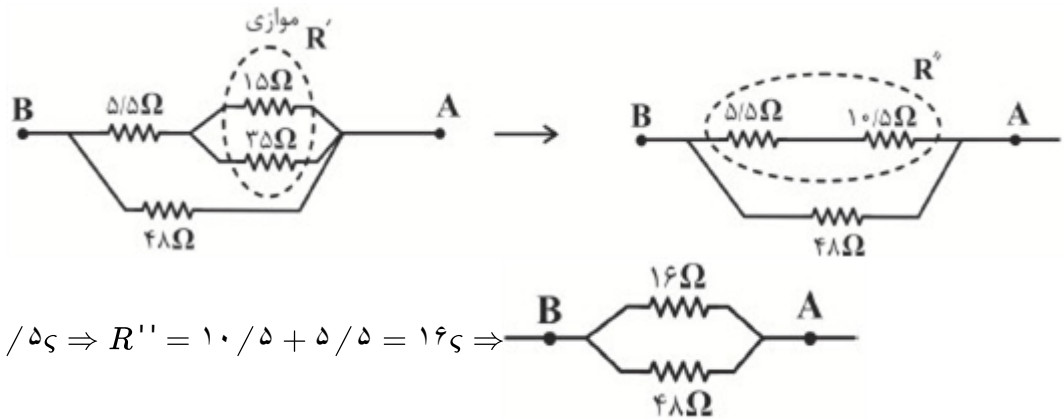
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون تغییرات در اختلاف پتانسیل و مشخصات فیزیکی خازن رخ داده است، می‌توان نوشت:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1} \times \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 \xrightarrow{C=\kappa\epsilon \cdot \frac{A}{d}} \frac{U_2}{U_1} = \frac{d_1}{d_2} \times \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2$$

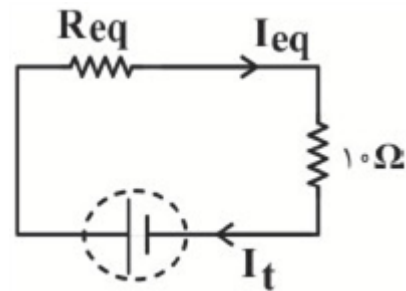
با توجه به این که انرژی خازن ۶۴ درصد کاهش یافته یعنی ۳۶ درصد حالت قبل شده است، پس داریم:

$$\Rightarrow \frac{36}{100} = \left(\frac{120}{100} \right)^2 \times \frac{d}{d+D} \Rightarrow \frac{d+D}{d} = 4 \Rightarrow \frac{D}{d} = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مقاومت معادل بین دو نقطه A و B را به دست می‌آوریم: ۵۵



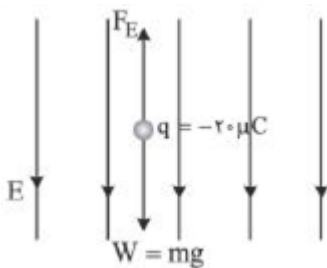
$$R' = \frac{15 \times 35}{15 + 35} = 10/5 \Rightarrow R'' = 10/5 + 5/5 = 16 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{16 \times 48}{48 + 16} = 12 \Rightarrow R_{eq} = \frac{V_{eq}}{I_{eq}} \Rightarrow 12 = \frac{V}{I_{eq}} \Rightarrow I_{eq} = I_t = 6 A$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۶

جهت نیروی وزن رو به پایین است، بنابراین برای آن که ذره ساکن بماند باید نیروی الکتریکی وارد بر آن رو به بالا باشد. از این رو میدان الکتریکی باید در راستای قائم و رو به پایین باشد.



$$F_E = W \Rightarrow qE = mg \Rightarrow 2.0 \times 10^{-6} \times E = 2 \times 10^{-3} \times 10 \Rightarrow E = 10^3 \frac{N}{C}$$

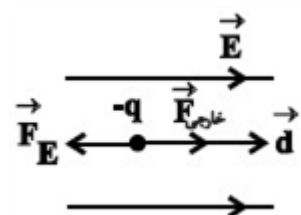
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون با جابه‌جایی بار در جهت خط‌های میدان الکتریکی، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش یافته ۵۷

است، پس نتیجه می‌گیریم بار در جهت غیردخواه جابه‌جا شده است، در نتیجه بار الکتریکی ذره منفی است. یا می‌توان چنین استدلال کرد که چون $\Delta U > 0$ است، پس با توجه به رابطه $W_E = -\Delta U$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $W_E < 0$ است، یعنی نیروی الکتریکی وارد بر ذره در خلاف جهت جابه‌جایی آن یعنی خلاف جهت میدان الکتریکی است، پس بار ذره منفی است و داریم:

$$W_E = -\Delta U = -5 \times 10^{-5} J$$

$$W_E = |q| E d \cos \theta \Rightarrow |q| = \frac{-5 \times 10^{-5}}{2 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-2} \times (-1)} \Rightarrow |q| = \frac{1}{2} \times 10^{-6} C = 0.5 \mu C$$

$$\Rightarrow q = -0.5 \mu C$$



اختلاف پتانسیل دو سر LDR، ۲۵ ولت است بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۱۰۰۰ اهمی برابر $۲۵ - ۴۵ = ۲۰V$ خواهد بود:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow I = \frac{۲۰}{۱۰۰۰} = ۰/۰۲A$$

اختلاف پتانسیل دو سر LDR، ۲۵ ولت است و جریان عبوری از آن $۰/۰۲A$ است:

$$P_{LDR} = \frac{V}{I} \Rightarrow R_{LDR} = \frac{۲۵}{۰/۰۲} = ۱۲۵۰\Omega \Rightarrow P_{LDR} = ۱/۲۵k\Omega$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. براساس فرمول قانون کولن می توان نوشت:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \Rightarrow F = 9 \times 10^9 \times \frac{1/6 \times 10^{-19} \times 1/6 \times 10^{-19}}{(2 \times 10^{-15})^2} = 5/76 \times 10 = 57/6 N$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به بررسی تک تک گزینه ها می پردازیم:

گزینه ۱: نادرست - در فضای بین دو خط میدان، میدان الکتریکی صفر نیست.

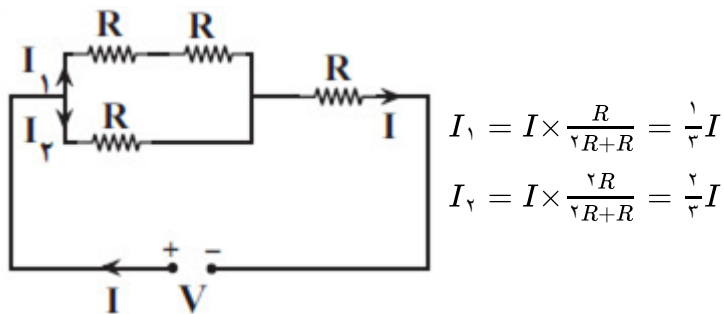
گزینه ۲: نادرست - اگر بار منفی را در نقطه B قرار دهیم، جهت نیروی وارد بر آن مماس بر خط میدانی است که از آن نقطه می گذرد و در خلاف جهت خطوط میدان است.

گزینه ۳: نادرست - خطوط میدان یکدیگر را قطع نمی کنند، لذا از نقطه A تنها یک خط میدان می گذرد.

گزینه ۴: درست - تراکم خطوط میدان نشان دهنده قوی یا ضعیف بودن میدان است. چون خطوط میدان در نقطه A متراکم تر است، لذا میدان در این نقطه قوی تر از نقطه B است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر میله ای با بار منفی را به کلاهک الکتروسکوپی خنثی نزدیک کنیم، بار ورقه های الکتروسکوپ منفی و بار کلاهک آن مثبت می شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به یکسان بودن لامپ ها، به جای آن ها مقاومت R قرار می دهیم:



با توجه به مقادیر جریان ها، بیشترین توان را لامپ L_4 مصرف می کند. پس توان L_4 را برابر $۱۵۰W$ می گذرد.

$$P_{(L_4)} = R \times I^2 = ۱۵۰W$$

$$R_{eq} = R + \frac{R \times 2R}{R + 2R} = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R$$

مقاومت معادل مجموعه:

$$P_T = \left(\frac{5}{3}R\right) \times I^2 = \frac{5}{3} \times P_{(L_4)} = \frac{5}{3} \times ۱۵۰ = ۲۵۰W$$

توان کل:

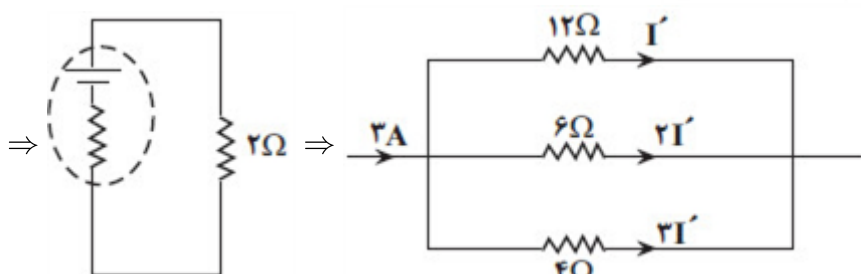
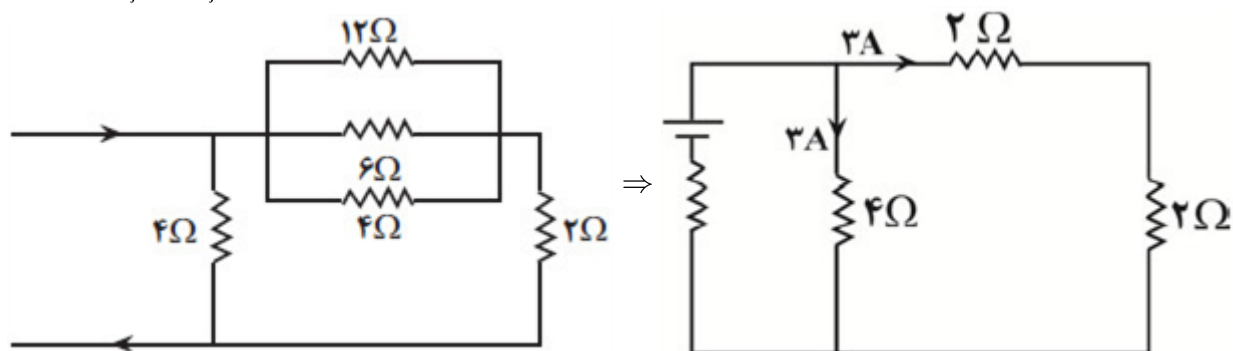
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. آمپرسنج ایده‌آل مانند سیم بدون مقاومت و ولت‌سنج ایده‌آل دارای مقاومت بی‌نهایت است. مدار را ساده می‌کنیم و جریان عبوری از مدار را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow I = \frac{18}{2 + 1} = 6A$$

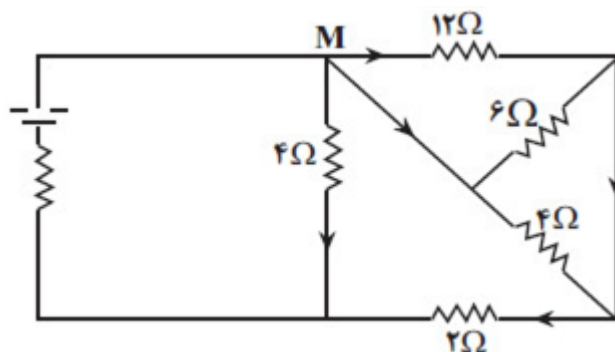
مطابق مدار نشان داده شده جریان عبوری از آمپرسنجهای A_1 و A_2 برابر است با:

$$I_1 = I_{\epsilon_s} + I_{\epsilon_s} \Rightarrow I_1 - I_2 = I_{\epsilon_s} - I_{1\epsilon_s}$$

$$I_2 = I_{1\epsilon_s} + I_{\epsilon_s}$$

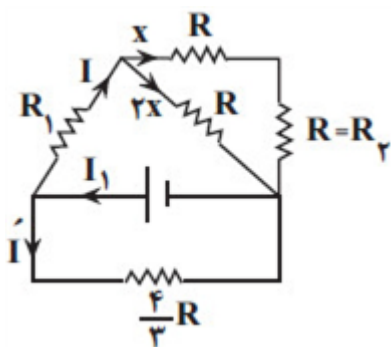


$$I' + 2I' + 3I' = 3A \Rightarrow I' = \frac{1}{2}A \begin{cases} I_{1\epsilon_s} = \frac{1}{2}A \\ I_{\epsilon_s} = \frac{3}{2}A \end{cases} \Rightarrow I_1 - I_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1A$$



۶۴

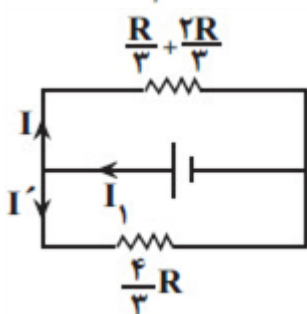
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا مقاومت معادل شاخه پایین مدار را به دست می آوریم که برابر با $\left(\frac{2}{3}R + \frac{2}{3}R\right)$ می شود و اگر جریان گذرنده از R_1 را برابر I فرض کنیم، با تقسیم جریان متوجه می شود که جریان شاخه R_2 برابر I_2 می شود.



$$I = x + 2x \Rightarrow x = \frac{I}{3}, P = RI^2$$

$$\left. \begin{aligned} R_{\text{توان}} &= R_1 I^2 \\ R_2 \text{ توان} &= R_2 \left(\frac{I}{3}\right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{R}{2}$$



$$\Rightarrow \frac{I'}{I} = \frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{توان شاخه بالا} &= R \times I^2 = RI^2 \\ \text{توان شاخه پایین} &= \frac{2}{3}R \times \left(\frac{2}{3}I\right)^2 = \frac{2}{3}RI^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{توان کل مصرفی} = \text{توان خروجی از باتری} = \frac{2}{3}RI^2$$

$$\frac{P_{\text{کل}}}{P_1} = \frac{\frac{2}{3}RI^2}{\frac{R}{2}I^2} = \frac{21}{4} = 5.25$$

۶۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق رابطه انرژی ذخیره شده در خازن داریم:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \xrightarrow{C=\text{ثابت}} \Delta U = \frac{1}{2}C(V_2^2 - V_1^2) \xrightarrow[\begin{smallmatrix} \Delta U = 16 \mu J \\ C = 4 \mu F \end{smallmatrix}]{}$$

$$16 = \frac{1}{2} \times 4 \times (V_2 - V_1)(V_2 + V_1) \Rightarrow 8 = (V_2 - V_1)(V_2 + V_1) \xrightarrow{V_2 - V_1 = 2V}$$

$$V_1 + V_2 = 4$$

$$\begin{cases} V_1 = 1V \\ V_2 = 3V \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هنگامی که کلید باز است ولتسنج نیروی محرکه‌ی مولد ($V_1 = \mathcal{E}$) را نشان می دهد. در هنگام

بسته بودن کلید K جریان در مدار برقرار است و عددی که ولتسنج نشان می دهد از رابطه‌ی زیر به دست

$$V_2 = RI = R \frac{\mathcal{E}}{R+r} \rightarrow V_2 = \mathcal{E} \frac{1}{1 + \frac{r}{R}}$$

می آید:

همان طور که ملاحظه می کنید برای آن که با باز و بسته کردن کلید K تغییری قابل ملاحظه در آن چه ولتسنج نشان می دهد

حاصل نشود باید مقاومت درونی باتری در مقایسه با R ناچیز باشد ($r < R$)

۶۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ولت سنج ۱ دو سر باتری تولیدکننده (ε_1) و ولت سنج ۲ دو سر باتری مصرف کننده (ε_2) بسته شده است.

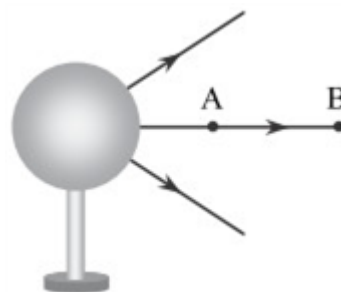
$$I = \frac{\Sigma \varepsilon}{\Sigma R + \Sigma r} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2} = \frac{10 - 8}{4 + 3 + 1 + 2} = 0.2 A \quad (\varepsilon_1 > \varepsilon_2)$$

$$\left. \begin{aligned} V_1 = \varepsilon_1 - r_1 I = 10 - 1 \times 0.2 = 9.8 V \quad (\text{تولیدکننده}) \\ V_2 = \varepsilon_2 + r_2 I = 8 + 2 \times 0.2 = 8.4 V \quad (\text{مصرف کننده}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{9.8}{8.4} = \frac{7}{6}$$

۶۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل میدان رسم شده می دانیم میدان الکتریکی در نقطه‌ی A قوی تر است، سپس اندازه‌ی نیروی وارد بر بار در این نقطه بیش تر است.

هم چنین می دانیم با جابه جایی در جهت خط های میدان الکتریکی پتانسیل الکتریکی کاهش می یابد. $(V_A > V_B)$ اما در مورد انرژی پتانسیل الکتریکی بار منفی تمایل دارد در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کند و اگر بار در جهت تمایل خود حرکت کند انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می یابد اما در این شکل در جهت میدان الکتریکی حرکت می کند و انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می یابد.



۶۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بزرگ ترین میدان برابند زمانی رخ می دهد که میدان $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ هم جهت باشند، یعنی زمانی که $-3q$ در نقطه‌ی A قرار دارد.

$$\begin{array}{c} -3q \quad E_2 \quad E_1 \quad o \quad +q \\ \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \end{array} \quad E_{\max} = E_1 + E_2 = \frac{kq}{a^2} + \frac{3kq}{a^2} = \frac{4kq}{a^2}$$

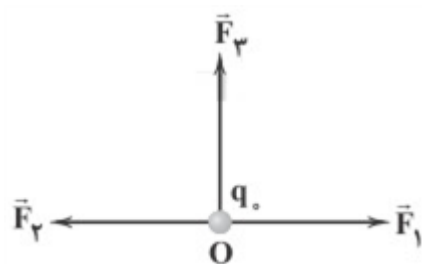
کوچک ترین میدان هم زمانی رخ می دهد که $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ بر هم عمود باشند، یعنی زمانی که $-3q$ در نقطه‌ی B باشد.

$$E_{\min} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{kq}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{3kq}{a^2}\right)^2} = E_{\min} = \sqrt{10} \frac{kq}{a^2}$$

$$\frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بردارها در نقطه‌ی O را رسم می‌کنیم:



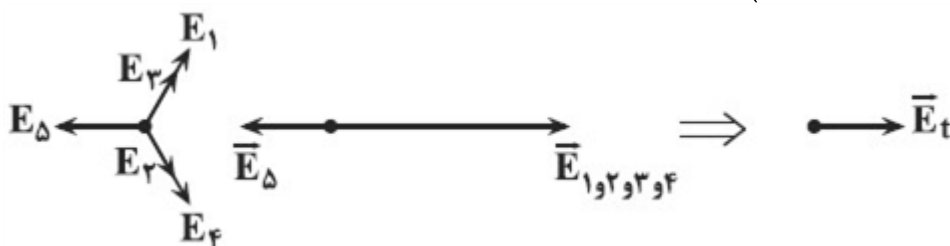
$$\vec{F}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_3$$

$$F_3 = k \frac{|q_1| |q_2|}{r_3^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^{-6}}{(10 \times 10^{-2})^2} = 9 \text{ N}$$

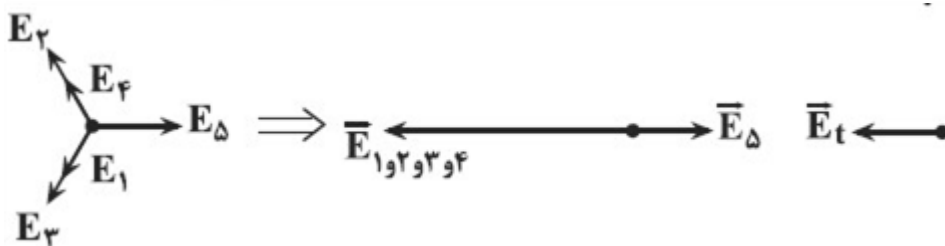
$$\Rightarrow \vec{F}_O = \vec{F}_3 = 9 \vec{j} (\text{N})$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون اندازه‌ی هریک از بارهای q_1 تا q_4 و فاصله‌ی آن‌ها تا مرکز مربع یکسان است، اندازه‌ی میدان الکتریکی هریک از این بارها در مرکز مربع یکسان و برابر با نصف اندازه‌ی میدان الکتریکی بار q_5 است.

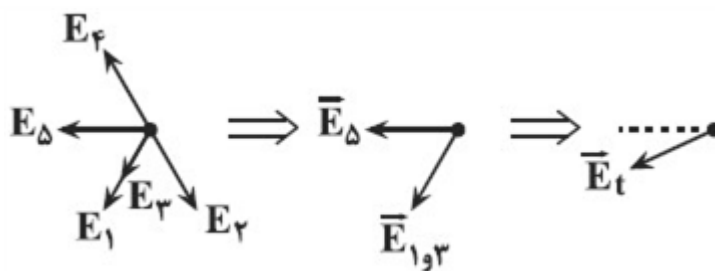
$$\left(|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = \frac{|\vec{E}_5|}{2} \right)$$



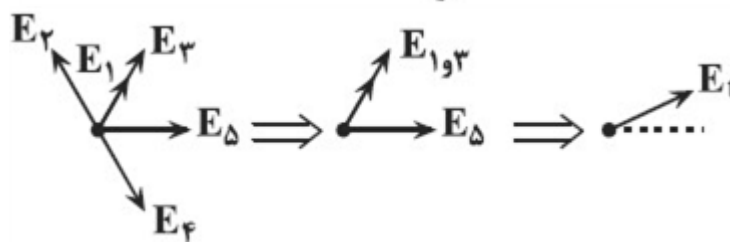
گزینه‌ی ۱:



گزینه‌ی ۲:



گزینه‌ی ۳:



گزینه‌ی ۴:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. وقتی کلید را از حالت a به b تغییر دهیم دو سر لامپ ۲ هم پتانسیل می‌شوند (اتصال کوتاه رخ می‌دهد)، در نتیجه هیچ جریانی از آن عبور نمی‌کند، لذا این لامپ خاموش خواهد شد. از طرف دیگر در وضعیت a، مقاومت کل مدار برابر است با $R_a = \frac{2}{3}R + R = \frac{5}{3}R$ و در وضعیت b، مقاومت کل مدار برابر $R_b = R + R = 2R$ است. بنابراین در وضعیت b مقاومت کل افزایش یافته و بنا به رابطه‌ی $I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r}$ جریان کل کاهش خواهد یافت، در نتیجه لامپ ۱ کم‌نورتر می‌شود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی ذره‌ی باردار را به کمک قانون پایستگی انرژی مکانیکی محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta U_E = -\Delta K = -(K_2 - K_1) = K_1 - K_2 = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_2^2)$$

$$\Rightarrow \Delta U_E = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-6} \times (0 - 10^2) \Rightarrow \Delta U_E = -10^{-4} J$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه‌ی A و B برابر است با:

$$\Delta V_{BA} = \frac{\Delta U_E}{q} = \frac{-10^{-4}}{10^{-6}} = -10^2 = -100 V \Rightarrow \Delta V_{AB} = +100 V$$

با استفاده از رابطه‌ی $|\Delta V| = Ed$ و با توجه به یکنواخت بودن میدان الکتریکی میان صفحات خازن، اختلاف پتانسیل الکتریکی و شدت میدا میان صفحات خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$|\Delta V| = Ed \xrightarrow{\text{میدان یکنواخت}} \frac{\Delta V_{AB}}{\Delta V_{\text{کل}}} = \frac{d_{AB}}{d_{\text{کل}}} \Rightarrow \frac{100}{\Delta V_{\text{کل}}} = \frac{4}{10} \Rightarrow \Delta V_{\text{کل}} = 250 V$$

$$\Rightarrow \Delta V_{\text{کل}} = Ed_{\text{کل}} \Rightarrow E = \frac{250}{10 \times 10^{-2}} = 2/5 \times 10^2 \frac{N}{C}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی $U = \frac{1}{2} CV^2$ و با توجه به این‌که $U = U_1 + 4 \times 10^{-5} J$ و $V_2 = V_1 + 1$ است، ابتدا V_1 را به صورت زیر می‌یابیم:

$$U_2 - U_1 = 4 \times 10^{-5} \xrightarrow{U = \frac{1}{2} CV^2} \frac{1}{2} CV_2^2 - \frac{1}{2} CV_1^2 = 4 \times 10^{-5}$$

$$\frac{1}{2} C (V_2^2 - V_1^2) = 4 \times 10^{-5} \xrightarrow{C = 4 \times 10^{-6} F} \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-6} \times (V_2^2 - V_1^2) = 4 \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow V_2^2 - V_1^2 = 20 \xrightarrow{V_2 = V_1 + 1} (V_1 + 1)^2 - V_1^2 = 20 \Rightarrow V_1^2 + 2V_1 + 1 - V_1^2 = 20$$

$$\Rightarrow 2V_1 + 1 = 20 \Rightarrow V_1 = 9/5 V$$

اکنون با داشتن V_1 و C، بار الکتریکی اولیه‌ی خازن را پیدا می‌کنیم:

$$Q_1 = CV_1 \xrightarrow{C_1 = 4 \mu F, V_1 = 9/5 V} Q_1 = 4 \times 9/5 = 3.8 \mu C$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ظرفیت جدید خازن (C') نسبت به ظرفیت قبل از تغییرات برابر است با:

$$\frac{C'}{C} = \frac{\kappa'}{\kappa} \times \frac{A'}{A} \times \frac{d}{d'} = 4 \times 1 \times \frac{d}{2d} = 2$$

چون خازن از باتری جدا است، بار خازن ثابت است.

$$\frac{U'}{U} = \frac{\frac{q'}{2C'}}{\frac{q}{2C}} = \frac{C}{C'} = \frac{1}{2}$$

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow \frac{E'}{E} = \frac{V'}{V} \times \frac{d}{d'} = \frac{\frac{q}{C'}}{\frac{q}{C}} \times \frac{d}{d'} = \frac{C}{C'} \times \frac{d}{d'} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۶



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷۷

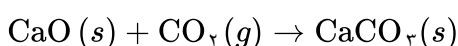
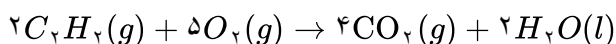
$$? \text{ mol KNO}_3 = 50.5 \text{ g KNO}_3 \times \frac{1 \text{ mol KNO}_3}{101 \text{ g KNO}_3} \times \frac{80}{100} = 4 \text{ mol KNO}_3$$

$$? \text{ mol O}_2 = 4 \text{ mol KNO}_3 \times \frac{5 \text{ mol O}_2}{4 \text{ mol KNO}_3} \times \frac{60}{100} = 3 \text{ mol O}_2$$

با توجه به سرعت تولید N_2 که $0/2$ مول بر ثانیه است، می‌توان نتیجه گرفت که سرعت تولید O_2 ، $0/5 \frac{\text{mol}}{\text{s}}$ است و با توجه به این که حداکثر ۳ مول O_2 تولید می‌شود می‌توان گفت واکنش در ثانیه‌ی ششم پایان یافته است و مول O_2 در ثانیه‌ی دوازدهم همان ۳ مول خواهد بود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عبارت‌های اول تا چهارم به ترتیب توضیحات مربوط به عنصرهای Fe، Au، Ti، Si است که در میان آن‌ها فقط Si جزو عنصرهای اصلی جدول دوره‌ای است. ۷۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معادله‌ی موازنه شده‌ی واکنش‌های انجام شده به صورت زیر است: ۷۹

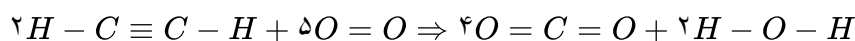


$$? \text{ mol CO}_2 = 320 \text{ g CaCO}_3 \times \frac{1 \text{ mol CaCO}_3}{100 \text{ g CaCO}_3} \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{1 \text{ mol CaCO}_3} = 3/2 \text{ mol CO}_2$$

$$4 \text{ mol CO}_2 = \text{مقدار نظری} = \frac{3/2}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Rightarrow 80 = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Rightarrow \text{بازده درصدی}$$

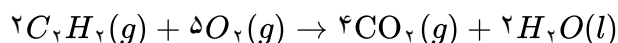
$$? \text{ LC}_2\text{H}_2 = 4 \text{ mol CO}_2 \times \frac{2 \text{ mol C}_2\text{H}_2}{4 \text{ mol CO}_2} \times \frac{22/4 \text{ LC}_2\text{H}_2}{1 \text{ mol C}_2\text{H}_2} = 44/8 \text{ LC}_2\text{H}_2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ΔH واکنش زیر که در آن آب حالت گازی دارد را محاسبه می‌کنیم.



$$\Delta H = [(4 \times 415) + (2 \times 839) + (5 \times 495)] - [(8 \times 799) + (4 \times 463)] = -2431 \text{ kJ}$$

به ازای تبخیر هر مول آب 44 kJ گرما مصرف شده است. بنابراین:



$$\Delta H = -2519 \text{ kJ}$$

آنتالپی سوختن یک ماده هم‌ارز با آنتالپی واکنشی است که در آن یک مول ماده در اکسیژن کافی به طور کامل می‌سوزد، پس آنتالپی سوختن اتین برابر با $1259/5$ کیلوژول بر مول می‌باشد. (دقت کنید که در آنتالپی سوختن هیدروکربن‌ها آب در حالت مایع است.)

$$\text{ارزش سوختن} = \frac{|\Delta H_{\text{سوختن}}|}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \begin{cases} \text{ارزش سوختن } C_2H_2 = \frac{|1259/5|}{26} \simeq 48/44 \text{ kJ.g}^{-1} \\ \text{ارزش سوختن } C_2H_6 = \frac{|1560|}{30} = 52 \text{ kJ.g}^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 52 - 48/44 \simeq 3/56 \text{ kJ.g}^{-1}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گزینه ۱: مواد موجود در خاک باغچه به عنوان یک کاتالیزگر عمل کرده و سبب می‌شود تا حبه‌قند آغشته به آن سریعتر بسوزد.
گزینه ۲: بنزوئیک اسید یک نگه‌دارنده است که سرعت برخی از واکنش‌هایی که منجر به فساد مواد غذایی می‌شوند را کاهش می‌دهد.
گزینه ۳: در واکنش‌هایی که غلظت واکنش‌دهنده‌ها در طول واکنش ثابت باشد (مانند مواد جامد یا مایع خالص) با گذشت زمان، سرعت واکنش تغییری نمی‌کند.

گزینه ۴: لیکوپن در هندوانه و گوجه‌فرنگی یافت می‌شود که فعالیت رادیکال‌ها را کاهش می‌دهد. لیکوپن گونه رادیکال نیست!

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عبارت‌های ب و پ نادرست است. بررسی عبارت‌ها:

الف) ششمین عنصر واسطه دوره چهارم جدول تناوبی، آهن (Fe) می‌باشد که دارای دو اکسید طبیعی FeO و Fe_2O_3 است.
ب) در میان عنصرهای دوره چهارم، Cu و Zn از دسته d و 6 عنصر از دسته p که شامل Ga ، Ge ، As ، Se ، Br و Kr هستند که زیرلایه $3d$ کاملاً پر دارند (در مجموع ۸ عنصر) و 2 عنصر Cr و Mn زیرلایه $3d$ نیمه‌پر دارند.
($8 - 2 = 6$)

پ) اولین فلز واسطه‌ای که زیرلایه $3d$ آن پر می‌شود، عنصر Cu ۲۹ است.



$$29Cu \text{ ظرفیت } (n+l) \text{ الکترون های ظرفیت } = 10(3+2) + 1(4+0) = 54$$

ت) اسکندیم Sc ۲۱ نخستین عنصر واسطه دوره چهارم است که در ساخت وسایل خانه مانند تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها کاربرد دارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. موارد دوم، سوم و چهارم درست هستند.

با توجه به اطلاعات سؤال، زیرلایه‌ی $3d$ در این عنصر که متعلق به دوره‌ی چهارم جدول تناوبی است، دارای ۱۰ الکترون است، نخستین عنصر این دوره که دارای این ویژگی است، $3d^1 4s^1$ $Cu = [Ar]_{18}$ است و در نتیجه سایر عناصر دوره‌ی چهارم که بعد از این عنصر در جدول قرار می‌گیرند، دارای این ویژگی هستند. بررسی موارد:

مورد اول: عناصر Cu و Zn ۳ فلزات واسطه دارای ۱۰ الکترون در زیرلایه‌ی $3d$ هستند.

عنصری که شمار الکترون‌های زیرلایه‌های $3p$ و $3d$ در آن برابر است، $3d^6 3p^6 4s^2$ / $3s^2 3p^6 4s^2$ / $1s^2$ Fe ۲۶ است.

فلز Cu با $FeSO_4$ به طور طبیعی واکنش نمی‌دهد، زیرا واکنش‌پذیری Cu از Fe کمتر است. مورد دوم: فلز Cu به حالت آزاد در طبیعت یافت می‌شود.

مورد سوم: واکنش‌پذیری Cu و Zn از K ۱۹ کمتر است و در نتیجه تأمین شرایط نگهداری آنها آسان‌تر است.

مورد چهارم: این عنصر می‌تواند فلز واسطه (Cu و Zn)، فلز اصلی (Ga)، شبه‌فلز (Ge) و یا نافلز (Br) باشد. مورد پنجم: واکنش $Br_2(l) + KCl \rightarrow$ به طور طبیعی انجام نمی‌شود، زیرا واکنش‌پذیری عنصر برم از کلر کمتر است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left\{ \begin{array}{l} X^- : 4P^6 \\ X : 4P^5 \left\{ \begin{array}{l} \text{دوره} = 4 \\ \text{گروه} = 17 \end{array} \right. \Rightarrow Br \\ X^{2-} : 4P^6 \\ X : 4P^4 \left\{ \begin{array}{l} \text{دوره} = 4 \\ \text{گروه} = 16 \end{array} \right. \Rightarrow Se \\ X^{3-} : 4P^6 \\ X : 4P^3 \left\{ \begin{array}{l} \text{دوره} = 4 \\ \text{گروه} = 15 \end{array} \right. \Rightarrow As \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X^+ : 4P^6 \rightarrow X : 37 Rb \\ X^{2+} : 4P^6 \rightarrow X : 38 Sr \\ X^{3+} : 4P^6 \rightarrow X : 39 Y^{3+} \end{array} \right.$$

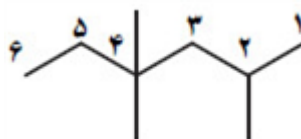
بررسی عبارت‌ها:

(۱) غلط. گاز نجیب یون ندارد.

(۲) صحیح. می‌تواند Se باشد.

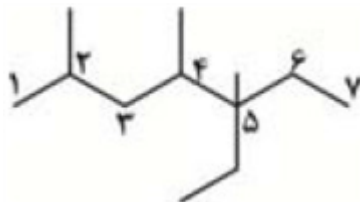
(۳) صحیح. می‌تواند Br ۳۵ باشد. $4s^2 4p^5$ لایه‌ی فلز ظرفیت

(۴) صحیح. می‌تواند Br باشد. $Br < Cl < F$: واکنش‌پذیری



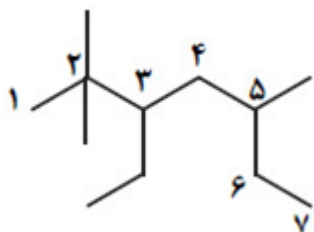
مورد اول:

شماره گذاری کربن زنجیره اصلی از سمت نادرست انجام شده است. ×
 ۲، ۴، ۴- تری متیل هگزان ✓ (در این حالت مجموع ارقام به کار رفته کمتر است.)



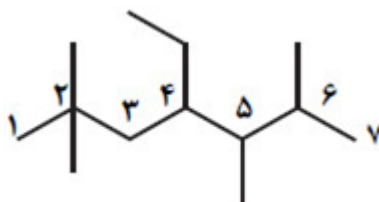
مورد دوم:

از سمتی شماره گذاری می کنیم که زودتر به شاخه فرعی برسیم.



مورد سوم:

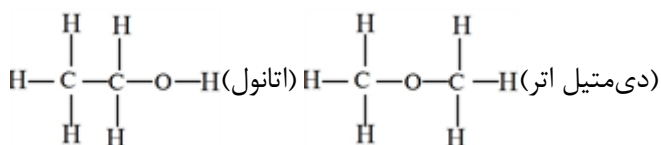
انتخاب زنجیره اصلی نادرست انجام شده است. ×
 ۳- اتیل - ۲، ۲، ۵- تری متیل هپتان ✓



مورد چهارم:

ترتیب ذکر نام شاخه های فرعی نادرست است. ×
 ۴- اتیل - ۲، ۲، ۵، ۶- تترا متیل هپتان ✓

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اتانول و دی متیل اتر هر دو دارای فرمول مولکولی (C_2H_6O) هستند ولی ساختار گسترده و خواص فیزیکی و شیمیایی متفاوتی دارند و ایزومر ساختاری به شمار می روند.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بیشتر عنصرهای جدول دوره ای را فلزها تشکیل می دهند که به طور عمده در سمت چپ و مرکز جدول قرار دارند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. موارد «الف، ب، ج» درست هستند.

هرچه شمار اتم های کربن در آلکان ها بیش تر باشد، نیروهای بین مولکولی آن ها قوی تر بوده و در نتیجه نقطه جوش، چسبندگی و گرانروی و مقاومت در برابر جاری شدن، افزایش می یابد، اما فراریت آلکان کاهش می یابد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۹

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): درست، کم‌تر از ده درصد از نفت خام مصرفی در دنیا (روزانه کم‌تر از ۸ میلیون بشکه) برای تولید الیاف و پارچه،

شوینده‌ها، مواد آرایشی و بهداشتی، رنگ، لاستیک و ... به کار می‌رود.

گزینه (۲): نادرست، تقریباً ۴۰ درصد از نفت خام استخراج شده (حدود ۳۲ میلیون بشکه) روزانه صرف تأمین گرما و انرژی می‌شود.

گزینه (۳): درست، هر بشکه نفت خام هم‌ارز با ۱۵۹ لیتر است، بنابراین:

$$\text{لیتر نفت خام} = 10^6 \times 159 = 159 \times 10^6$$

گزینه (۴): درست، امروزه نفت خام در دنیای کنونی دو نقش اساسی ایفا می‌کند. نقش نخست آن، منبع تأمین انرژی بوده و در نقش

دوم، ماده اولیه برای تهیه بسیاری از مواد و کالاهایی است که در منابع گوناگون از آن‌ها استفاده می‌شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹۰

روغن و چربی از جمله ترکیب‌های آلی هستند که به دلیل تفاوت در ساختار رفتارهای فیزیکی و شیمیایی متفاوتی دارند. روغن

دارای حالت فیزیکی مایع بوده اما چربی جامد است. از دیدگاه شیمیایی در ساختار مولکول‌های روغن، پیوندهای دوگانه بیش‌تری

وجود داشته و واکنش‌پذیری بیش‌تری نیز دارد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها: ۹۱

گزینه ۱: اسکاندیم فلزی واسطه و برم از عناصر اصلی جدول دوره‌ای است.

گزینه ۲: هر دو متعلق به دوره‌ی چهارم جدول تناوبی هستند اما اسکاندیم فلز و برم نافلز است.

گزینه ۳: Sc با از دست دادن ۳ الکترون و برم با گرفتن ۱ الکترون به آرایش الکترونی هشت‌تایی پایدار گازهای نجیب می‌رسند.

گزینه ۴: شمار الکترون‌های لایه‌ی آخر Sc و Br با هم برابر نیست زیرا:



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تمامی موارد درست هستند. ۹۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی سایر گزینه‌ها: ۹۳

گزینه ۱: پاک‌کننده‌های خورنده ممکن است اسیدی یا بازی باشند.

گزینه ۲: در جرم‌گیری لوله‌ها، فراورده‌های محلول در آب تولید می‌شود.

گزینه ۳: یکی از فراورده‌های حاصل از این واکنش آب می‌باشد که یک ماده‌ی آلی نیست.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت نادرست: ۹۴

عبارت پ: جرم کل مواد موجود در کره‌ی زمین تقریباً ثابت است. زیرا وقتی یک ماده یا محصول با استفاده از منابع طبیعی گوناگون

ساخته می‌شود، پس از مدتی تقریباً به طور کامل به طبیعت بازمی‌گردد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. انرژی حاصل از سوختن یک گرم ماکارونی، کم‌تر از سوختن یک گرم گردو است. ۹۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹۶

ردپای غذا همانند ردپای آب و کربن دی‌اکسید دارای دو چهره‌ی پنهان و آشکار می‌باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹۷

بررسی گزینه‌ها:

(۱) درست، از میان دو جسم مختلف با جرم یکسان، به‌ازای دادن گرمای یکسان آن ماده‌ای که ظرفیت گرمایی ویژه‌ی بیشتری دارد، افزایش دمای کمتری پیدا می‌کند.

$$Q = mC_{ویژه} \Delta\theta \rightarrow \uparrow C_{ویژه} = \frac{Q}{m\Delta\theta \downarrow}$$

(۲) نادرست، افزایش دما سرعت واکنش‌های گرماگیر و گرماده را افزایش می‌دهد.

(۳) نادرست، گرما هم‌ارز با آن مقدار انرژی گرمایی است که به دلیل تفاوت در دما جاری می‌شود.

(۴) نادرست، هر واکنش شیمیایی ممکن است با تغییررنگ، تولید رسوب آزاد شدن گاز و ایجاد نور و صدا همراه باشد، اما ویژگی بنیادی در همه‌ی آنها دادوستد گرما با محیط پیرامون است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها: ۹۸

(۱) نادرست، میزان انرژی مورد نیاز بدن هر فرد به وزن، سن و میزان فعالیت‌های روزانه‌ی او بستگی دارد.

(۲) نادرست، متان (CH_4) ساده‌ترین هیدروکربن و نخستین عضو آلکان‌ها است و بخش عمده‌ی گاز طبیعی را تشکیل می‌دهد و از تجزیه‌ی گیاهان به وسیله‌ی باکتری‌های بی‌هوازی نیز در زیر آب تولید می‌شود.

(۳) نادرست، کربوهیدرات، چربی و پروتئین افزون بر تأمین مواد اولیه برای سوخت و ساز یاخته‌ها، منابعی برای تأمین انرژی آن‌ها نیز می‌باشند.

(۴) درست

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌های نادرست: ۹۹

گزینه ۱: میزان استخراج بیشتر، الزاماً به معنای توسعه‌یافتگی بیشتر نیست، بلکه میزان استفاده‌ی درست از منابع است که باعث توسعه‌یافتگی می‌شود.

گزینه ۲: بنیادی‌ترین ویژگی عنصرها، عدد اتمی Z آن‌هاست.

گزینه ۳: دوره‌ی اول جدول تناوبی این ویژگی را ندارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌های نادرست: ۱۰۰

(۱) هیدروژن و هلیم از عناصر دسته‌ی S ، نافلز هستند.

(۲) برخی فلزات همانند Pb و Sn در دسته‌ی p قرار دارند.

(۳) هالوژن‌ها واکنش‌پذیرترین نافلزات می‌باشند، نه واکنش‌پذیرترین عناصر.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گزینه ۲ برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است. بررسی گزینه‌ها: ۱۰۱

(۱) فلز طلا تنها فلزی است که به شکل رگه‌های زرد لابه‌لای خاک یافت می‌شود.

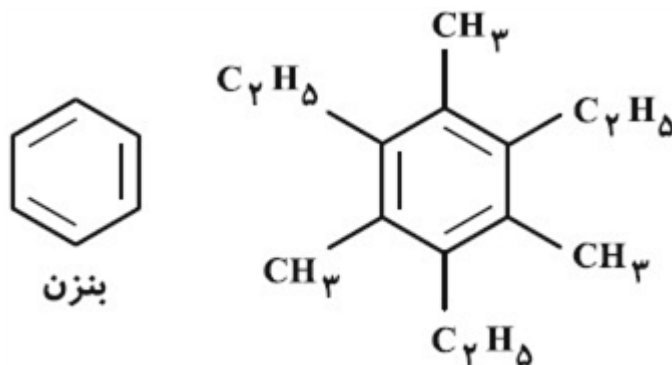
(۲) فلز آهن اغلب در طبیعت به شکل اکسید یافت می‌شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) حلقه بنزن در ساختار حفظ شده پس خاصیت آروماتیکی را داراست.

(۲) قطبیت C و H تفاوت خاصی با یکدیگر ندارد، پس گشتاور دوقطبی تغییر خاصی نخواهد کرد.

(۳) فرمول مولکولی نفتالن $C_{10}H_8$ است ولی فرمول مولکولی ترکیب جدید $C_{15}H_{24}$ است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $2NaHCO_3(s) \xrightarrow{\Delta} Na_2CO_3(s) + CO_2(g) + H_2O(l)$

با توجه به آنکه حالت فیزیکی آب در شرایط STP مایع می‌باشد، حجم گاز تولید شده فقط مربوط به CO_2 می‌باشد:

$$?s = 560 \text{ mL } CO_2 \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{22400 \text{ mL } CO_2} \times \frac{2 \text{ mol } NaHCO_3}{1 \text{ mol } CO_2} \times \frac{1 \text{ min}}{60/0.2 \text{ mol } NaHCO_3} \times \frac{60s}{1 \text{ min}} = 150s$$

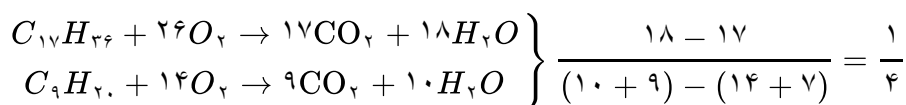
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

سنگین‌ترین آلکانی که طول‌ترین زنجیره‌ی کربنی آن ۵ کربن داشته باشد، به شکل مقابل است:

فرمول این ترکیب $C_{17}H_{36}$ است.

بررسی موارد:

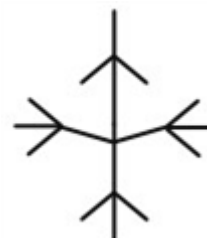
مورد اول: درست



مورد دوم: نادرست، با توجه به این که در واکنش هیدروژن‌دار کردن آلکن‌ها، یک پیوند $C = C$ را باید به $C - C$ تبدیل کنیم، از هیدروژن‌دار کردن هیچ آلکنی نمی‌توان به آلکان مد نظر رسید. چرا که هیچ دو کربنی در این ترکیب امکان برقراری پیوند دو گانه را نداشته‌اند.

مورد سوم: نادرست، آلکان‌ها با هر ساختاری غیرقطبی هستند.

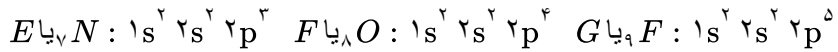
مورد چهارم: درست، $C_{17}H_{36}$ ، ۱۶ پیوند $C - C$ و ۳۶ پیوند $C - H$ دارد که اختلاف این دو برابر ۲۰ است، ساختار ذکر شده دارای ۲۰ پیوند $C - H$ است.



گزینه ی «۱»: خصلت فلزی و تمایل به از دست دادن الکترون $(Mg)A$ بیشتر از $(Al)B$ است.

گزینه ی «۲»: تفاوت شعاع اتمی $(Al)B$ و $(Si)C$ از این تفاوت بین $(P)D$ با $(Si)C$ بیشتر است.

گزینه ی «۳»: تعداد زیرلایه های الکترونی اشغال شده در هر ۳ عنصر یکسان است.



گزینه ی «۴»: با افزایش عدد اتمی در یک دوره، میزان نیروی جاذبه ی هسته بر الکترون های ظرفیتی افزایش می یابد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱

$$(A \cap B') - (B - A) = (A \cap B') \cap (B \cap A')' = A \cap B' \cap (B' \cup A) = A \cap B' = A - B$$

جذب

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون کلمه‌ی «جهانگردی» شامل ۸ حرف متمایز است، پس $n(s) = 8!$ از طرفی حالت مطلوب به صورت زیر است: ۲

$$n(A) = \underline{\text{ج}} \underline{۱} \underline{۲} \underline{۳} \underline{۴} \underline{۵} \underline{۶} \underline{\text{ی}} = 6!$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6!}{8!} = \frac{6!}{8 \times 7 \times 6!} = \frac{1}{56}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳

برای کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه، حالات زیر را داریم:

$$1, 4 \rightarrow$$

از میان اعداد ۲ و ۳ باید ۰، ۱، ۲ یا ۳ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} + \cancel{\binom{2}{3}} = 1 + 2 + 1 = 4$$

غ ق ق

$$2, 8 \rightarrow$$

از میان اعداد ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ باید ۰، ۱، ۲ یا ۳ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 1 + 5 + 10 + 10 = 26$$

$$3, 12 \rightarrow$$

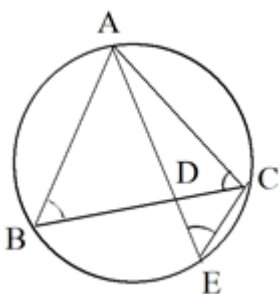
از میان اعداد ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ باید ۰، ۱، ۲ یا ۳ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 1 + 8 + 28 + 56 = 93$$

و تعداد کل زیرمجموعه‌های حداکثر ۵ عضوی برابر است با:

$$4 + 26 + 93 = 123$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴



$$\widehat{E} = \widehat{B} = \text{رو به روی یک کمان} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AEC$$

$$\begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{EAC} \\ \widehat{E} = \widehat{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE}$$

$$AD \times AE = AC^2 \xrightarrow{AC=AB} AD \times AE = AB^2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. AC قطر دایره است، بنابراین هریک از کمان‌های ABC و ADC برابر 180° هستند. ۵

$$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} > 45^\circ \Rightarrow \widehat{AB} > 90^\circ \Rightarrow \widehat{AB} > \widehat{BC} \quad (1)$$

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2} > 0 \Rightarrow \widehat{BC} > \widehat{AD} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{BC} < 180^\circ - \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AB} < \widehat{CD} \quad (2)$$

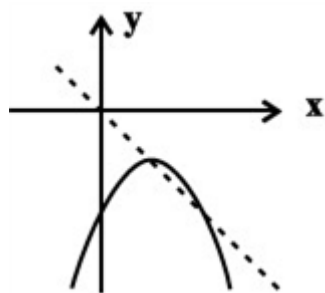
$$\xrightarrow{1, 2} \widehat{CD} > \widehat{AB} > \widehat{BC} \Rightarrow CD > AB > BC \Rightarrow 7a - 1 > 3a + 4 > 5a + 1$$

$$7a - 1 > 3a + 4 \Rightarrow 4a > 5 \Rightarrow a > \frac{5}{4} \quad (1)$$

$$3a + 4 > 5a + 1 \Rightarrow 2a < 3 \Rightarrow a < \frac{3}{2} \quad (2)$$

در بین گزینه‌ها تنها عدد $\frac{11}{8}$ در این نامساوی صدق می‌کند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل زیر، مختصات رأس سهمی $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ روی خط $y = -x$ قرار دارد؛ یعنی:



عرض رأس سهمی = - طول رأس سهمی

$$-\frac{2-a}{2a} = -\frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow 2a - 4 = \Delta$$

$$\Rightarrow 2a - 4 = (2 - a)^2 - 4a\left(-\frac{15}{4}\right) \Rightarrow a^2 + 9a + 8 = 0$$

$$\Rightarrow a = -1 \text{ یا } -8$$

با بررسی هر دو مقدار به دست آمده در ضابطه‌ی تابع، داریم: (در ربع چهارم طول‌ها مثبت و عرض‌ها منفی‌اند).

$$\begin{cases} a = -1 \Rightarrow y = -x^2 + 3x - \frac{15}{4} \Rightarrow x_{\max} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}, \\ a = -8 \Rightarrow y = -8x^2 + 10x - \frac{15}{4} \Rightarrow x_{\max} = \frac{-10}{-16} = \frac{5}{8}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{\max} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \text{ قابل قبول} \\ y_{\max} = \frac{20}{-32} = -\frac{5}{8} \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1} \circ g(x) = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow g(x) = f\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \xrightarrow{x=3} g(3) = f\left(\frac{2}{1}\right) \Rightarrow g(3) = f(2)$$