

۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اضلاع دو مثلث مشابه، متناسبند پس:

$$\text{حالت اول: } \frac{x}{y} = \frac{5}{3} = \frac{4}{2} \Rightarrow y = \frac{15}{4} = 3/75, x = \frac{28}{3} \approx 9/3$$

غیرقابل قبول، زیرا مقادیر ۹/۳ و ۵ و ۴ تشکیل مثلث نمی‌دهند.

$$\text{حالت دوم: } \frac{x}{3} = \frac{5}{y} = \frac{4}{7} \Rightarrow y = \frac{35}{4} = 8/75, x = \frac{12}{7} \approx 1/7$$

$$\text{حالت سوم: } \frac{x}{3} = \frac{5}{y} = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{28}{5} = 5/6, x = \frac{15}{6} \approx 2/1$$

$$\text{حالت چهارم: } \frac{x}{y} = \frac{5}{3} = \frac{4}{2} \Rightarrow y = \frac{12}{5} = 2/4, x = \frac{35}{3} \approx 11/6$$

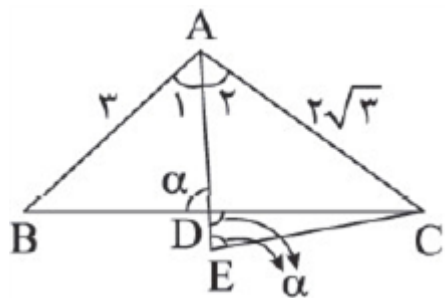
غیرقابل قبول زیرا مقادیر ۴ و ۵ و ۱۱/۶ تشکیل مثلث نمی‌دهند.

بنابراین بیشترین مقدار y برابر $\frac{35}{4}$ و کمترین آن برابر $\frac{28}{5}$ است.

$$\text{اختلاف} = \frac{35}{4} - \frac{28}{5} = 8/75 - 5/6 = 3/15$$

۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم زاویه $\widehat{E}$ برابر α باشد، داریم:



$$\left. \begin{array}{l} EC = DC \Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{E} = \alpha \\ \widehat{ADB} = \widehat{EDC} = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{E} = \alpha$$

بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADB} = \widehat{E} = \alpha \\ AD \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \end{array} \right\} \xrightarrow{(I)} \triangle ABD \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AEC}} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2$$

$$\xrightarrow{S_{\triangle ABD} = 6} \frac{6}{S_{\triangle AEC}} = \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} \right)^2 \Rightarrow \frac{6}{S_{\triangle AEC}} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{\triangle AEC} = 8$$

۳

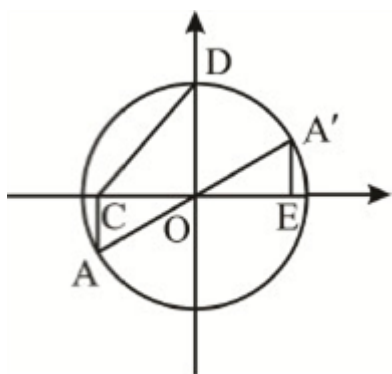
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به $x + \frac{1}{x+1} = 3 + 4\sqrt{2}$ پس (I) $x + \frac{1}{x+1} = 4 + 4\sqrt{2}$ از طرفی اگر

$$A = \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = A > 0 \text{ با توجه به اینکه } A > 0 \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{x+1 + \frac{1}{x+1}}_{\text{جایگذاری I}} + 2 = A^2 \Rightarrow A^2 = 6 + 4\sqrt{2} \Rightarrow A = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2}$$

$$= 2 + \sqrt{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با رسم امتداد نقطه A ، به مقدار A' می‌رسیم که طبق روابط مثلثاتی $A' = -(A)$ است که در آن A' با محور مثبت X زاویه 30° درجه می‌سازد. بنابراین:



$$\cos 30^\circ = \frac{OE}{OA'} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OE}{8} \Rightarrow OE = 4\sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{A'E}{OA'} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{A'E}{8} \Rightarrow A'E = 4$$

$$A' = (4\sqrt{3}, 4) \Rightarrow A = (-4\sqrt{3}, -4)$$

زیرا مختصات A قرینه A' است؛ بنابراین قاعده‌های دوزنقه موردنظر برابر ۴ و ۸ است و ارتفاع آن برابر $OC = 4\sqrt{3}$ است. در

$$S = \frac{4+8}{2} \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

نتیجه مساحت به صورت زیر است:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌توانید صورت و مخرج کسر دوم را در $\tan \alpha$ ضرب کنید.

$$\frac{1}{1+\tan \alpha} + \frac{1}{1+\frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{1}{1+\tan \alpha} + \frac{1}{\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha}} = \frac{1}{1+\tan \alpha} + \frac{\tan \alpha}{1+\tan \alpha} = \frac{1+\tan \alpha}{1+\tan \alpha} = 1$$

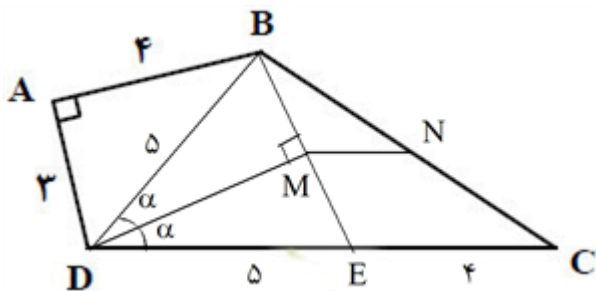
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا دو طرف معادله‌ی داده شده را بر x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 - 6 + \frac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{x^2} = 6 \xrightarrow{\text{به توان } 2} x^4 + \frac{9}{x^2} + 6 = 36$$

$$x^4 + \frac{9}{x^2} = 30 \xrightarrow{\text{به توان } 2} x^8 + \frac{81}{x^4} + 18 = 900 \xrightarrow{+100} x^8 + \frac{81}{x^4} + 118 = 1000$$

$$\Rightarrow \frac{x^{16} + 118x^4 + 81}{x^4} = 1000 \Rightarrow \frac{x^4}{x^{16} + 118x^4 + 81} = 0.001$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. BM را امتداد می‌دهیم تا ضلع DC را در E قطع کند. بنابر فرض سؤال DM نیمساز زاویه $\widehat{BDE}$ است. پس در مثلث BDE پاره خط DM هم نیمساز و هم ارتفاع است. در نتیجه مثلث BDE متساوی الساقین است.



$$\triangle ABD : BD^2 = AB^2 + AD^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \\ \Rightarrow BD = 5$$

$$\triangle BDE \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow BD = DE \\ \xrightarrow{BD=5} DE = 5$$

$$EC = DC - DE = 9 - 5 = 4$$

اکنون N را وسط ضلع BC در نظر می‌گیریم. طول پاره خط MN مورد سؤال است. از طرف دیگر در مثلث متساوی الساقین BDE ارتفاع DM میانه هم هست پس: بنابراین:

$$\triangle BEC : \frac{BM}{ME} = \frac{BN}{NC} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel EC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{EC} = \frac{BM}{BE} \Rightarrow \frac{MN}{4} = \frac{3}{5} \Rightarrow MN = \frac{12}{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر $a < -1$ و m و n اعدادی فرد و $m < n$ آنگاه $a^m > a^n$. این شرایط فقط در گزینه ۳ صدق

$$a^5 < \sqrt{a} \Rightarrow a^5 < a^{\frac{1}{2}}$$

می‌کند. چون $\frac{1}{3} > 5$ رابطه مذکور صحیح است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو طرف تساوی را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2k \sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 \tan^2 x + 2k \tan x = 1 \Rightarrow 8 + 4k = 1 \Rightarrow k = -\frac{7}{4}$$

۱۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC ارتفاع وارد بر وتر AB را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا بر ضلع EF نیز در نقطه K عمود شود. حالا طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه و رابطه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB = 10$$

$$\Rightarrow AD = 3/6 \Rightarrow BD = 6/4$$

$$\triangle ABC : AC^2 = AD \times AB$$

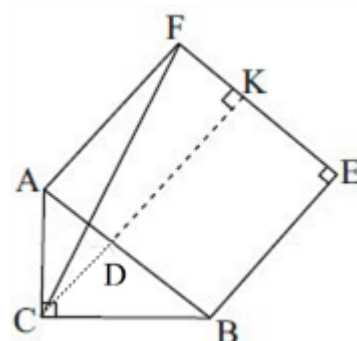
$$\triangle ABC : CD^2 = AD \times BD \Rightarrow CD^2 = 3/6 \times 6/4$$

$$\Rightarrow CD = 6 \times 0/8 = 4/8$$

در ضمن چهارضلعی $AFKD$ مستطیل است، پس $FK = AD = 3/6$ از طرفی طول DK با هر یک از اضلاع مربع یا همان وتر مثلث برابر است. پس در مثلث قائم‌الزاویه CFK داریم:

$$CF^2 = FK^2 + CK^2 \Rightarrow CF^2 = AD^2 + (CD + DK)^2 \Rightarrow CF^2 = 3/6^2 + (4/8 + 10)^2$$

$$\Rightarrow CF = 2\sqrt{58}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۱

$$\triangle BEF : AD \parallel EF \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{BD}{BF} = \frac{AD}{EF} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}}$$

$$\frac{BD}{BF - BD} = \frac{2}{3 - 2} \Rightarrow \frac{BD}{DF} = 2 \quad (1)$$

$$\triangle CAD : MF \parallel AD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{CD}{DF} = \frac{AC}{AM} = \frac{2}{1} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{\frac{BD}{DF}}{\frac{CD}{DF}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = 1$$

$$a(3 - a) = 1 \Rightarrow a^2 - 3a = -1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۲

$$P = (a - 1)(a - 2)(a + 2)(a - 5) = (a^2 - 3a + 2)(a^2 - 3a - 10) = (-1 + 2)(-1 - 10) = -11$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون $0 < a < 1$ است؛ بنابراین $\sqrt[5]{a} < a^3 < a < \sqrt{a}$ است، پس:

۱۳

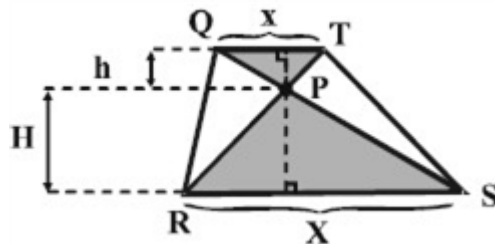
$$\sqrt{a} - a^3 > 0 \Rightarrow |\sqrt{a} - a^3| = \sqrt{a} - a^3$$

$$a^5 - a^3 < 0 \Rightarrow |a^5 - a^3| = a^3 - a^5$$

$$1 - \sqrt{a} > 0 \Rightarrow |1 - \sqrt{a}| = 1 - \sqrt{a}$$

$$|a^5 - a^3| + |\sqrt{a} - a^3| + |1 - \sqrt{a}| = a^3 - a^5 + \sqrt{a} - a^3 + 1 - \sqrt{a} = 1 - a^5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. توجه کنید که دو مثلث سایه خورده، به حالت تساوی زاویه‌ها با هم متشابهند و چون نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر ۴ است، پس نسبت تشابه آن‌ها $\sqrt{4} = 2$ است.



نسبت اضلاع و ارتفاع‌های نظیر در مثلث‌های متشابه، برابر با نسبت تشابه است، پس مطابق شکل:

$$\begin{cases} \frac{H}{h} = 2 \Rightarrow H = 2h \\ \frac{X}{x} = 2 \Rightarrow X = 2x \end{cases}$$

$$\frac{S(\triangle PQR)}{S(\triangle QRT)} = \frac{S(\triangle QRT) - S(\triangle PQT)}{S(\triangle QRT)} = \frac{\frac{1}{2}(h+H)x - \frac{1}{2}hx}{\frac{1}{2}(x+X)(h+H)} = \frac{(h+H)x - hx}{(x+X)(h+H)}$$

$$= \frac{(h+2h)x - hx}{(x+2x)(h+2h)} = \frac{2hx}{9hx} = \frac{2}{9}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(0.25)^{1-x} = 64 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{1-x} = 2^6 \Rightarrow (2^{-2})^{1-x} = 2^6 \Rightarrow 2^{-2+2x} = 2^6 \Rightarrow -2 + 2x = 6 \Rightarrow x = 4$$

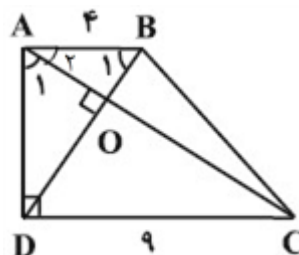
$$(2x+1)^{\frac{1}{x}} = (2 \times 4 + 1)^{\frac{1}{4}} = (9)^{\frac{1}{4}} = (3^2)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{2x-2}{3} = \frac{2y+2}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{(2x-2) + (2y+2)}{3+5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{2(x+y)}{8} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x+y}{4} = \frac{z}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{z} = \frac{4}{4} = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثلث‌های ABD و ACD با هم متشابه‌اند:



$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \hat{D} = 90^\circ \\ \hat{B}_1 &= \hat{A}_1 \text{ (هر دو متمم هستند)} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(ز.ز)} \triangle ABD \sim \triangle ACD$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB \times DC \Rightarrow AD^2$$

$$= 4 \times 9 = 36 \Rightarrow AD = 6 \text{ (ارتفاع دوزنقه)}$$

از طرفی مثلث‌های OAB و OCD نیز متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها همان نسبت دو ضلع متناظر یعنی $\frac{4}{9}$ می‌باشد. پس نسبت

دو ارتفاع متناظر آن نیز $\frac{4}{9}$ است. اگر h و h' ارتفاع (وارد بر وتر) در این دو مثلث باشند، آنگاه:

$$\frac{h}{h'} = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{h}{h+h'} = \frac{4}{13} \xrightarrow{h+h'=AD=6} h = \frac{24}{13}$$

$$\Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \times h = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{24}{13} = \frac{48}{13}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم $CD = x$ در این صورت $BD = x$ و $DE = ۴ - x$

اکنون به کمک قضیه فیثاغورس می‌نویسیم:

$$\triangle DCE : DC^2 = DE^2 + CE^2 \Rightarrow x^2 = (4 - x)^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 16 + x^2 - 8x + 9 \Rightarrow 8x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{8}$$

$$\triangle BCE : BC^2 = BE^2 + CE^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

چون $DC = DB$ پس D روی عمودمنصف BC است پس:

$$BF = FC = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\triangle DFC : DF^2 = DC^2 - FC^2 = \left(\frac{25}{8}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{25}{16} - 1\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{9}{16}\right)$$

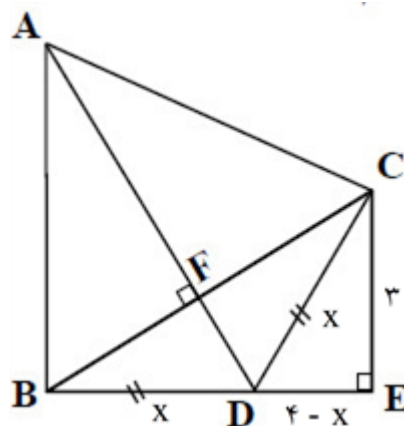
$$\Rightarrow DF = \frac{5}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$$

اکنون به کمک رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

$$\triangle ABD : BF^2 = AF \times FD \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^2 = AF \times \frac{15}{8} \Rightarrow AF = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{15}{8}} = \frac{10}{3}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AF \times FC = \frac{1}{2} \left(\frac{10}{3}\right) \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{6}$$

بنابراین:



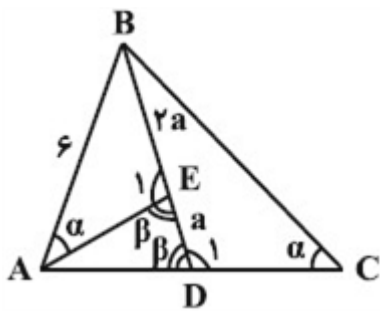
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + 1 + \frac{10}{x^2 + 1} = 10 \Rightarrow t + \frac{10}{t} = 10 \quad (I)$$

$$\text{خواسته سؤال} = t^2 + \frac{100}{t^2}$$

$$t^2 + \frac{100}{t^2} + 20 = 100 \Rightarrow t^2 + \frac{100}{t^2} = 80$$

طرفین رابطه (I) را به توان ۲ می‌رسانیم:



$$\begin{cases} \widehat{E}_1 = 180^\circ - \beta \\ \widehat{D}_1 = 180^\circ - \beta \end{cases} \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{D}_1$$

دو مثلث ABE و CBD به حالت تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند و در نتیجه داریم:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow \frac{6}{BC} = \frac{2a}{3a} \Rightarrow BC = 9$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا مقدار حاصل $\sqrt{5 + \sqrt{21}}$ را ساده‌تر می‌کنیم: ۲۱

$$\begin{aligned} \sqrt{5 + \sqrt{21}} &= \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{21}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{2}} \\ \sqrt{\frac{(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2}{2}} &= \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد $\sqrt{5 - \sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ، پس:

$$A = \left(\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) \times \left(2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \times (\sqrt{2}) = 2\sqrt{7}$$

مقدار B را نیز به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} B &= \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{14}}{4\sqrt{2} + \sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{2}(1 + \sqrt{7})}{\sqrt{2}(4 + \sqrt{7})} = \frac{3(1 + \sqrt{7})}{4 + \sqrt{7}} \times \frac{4 - \sqrt{7}}{4 - \sqrt{7}} = \frac{3(-3 + 3\sqrt{7})}{16 - 7} \\ &= \sqrt{7} - 1 \Rightarrow \frac{A}{B+1} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 2 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. معادله خط ۱ را ساده می‌کنیم: ۲۲

$$\sqrt{2}y = \sqrt{2}x + 3$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \tan \alpha = 3$$

می‌دانیم که شیب خط ۱ برابر $\tan \alpha$ می‌باشد که:

حال صورت و مخرج عبارت خواسته شده را بر $\cos^3 \alpha$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\tan^3 \alpha + \tan \alpha \times \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^3 \alpha + \tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha)}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = 3 \rightarrow \frac{5}{18}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون در مستطیل قطرهای مساوی و منصفاند پس مثلث $\triangle OCD$ متساوی‌الساقین است، در نتیجه نقطه H وسط ضلع CD قرار دارد. ۲۳

از طرف دیگر دو مثلث $\triangle AMB$ و $\triangle MDH$ با نسبت ۲ به ۱ متشابهند، پس نسبت ارتفاع‌های آنها نیز به همین صورت خواهد بود.

یعنی اگر $BC = 12x$ باشد، آنگاه $MH' = 4x$ است و در نتیجه از تشابه دو مثلث $\triangle DMH'$ و $\triangle DBC$ خواهیم

$$\frac{MH'}{BC} = \frac{DH'}{DC} \Rightarrow \frac{4x}{12x} = \frac{DH'}{20} \Rightarrow DH' = \frac{20}{3}$$

داشت:

به همین ترتیب از برابری نسبت ارتفاع‌های دو مثلث $\triangle ANB$ و $\triangle DNH'$ با نسبت تشابه آنها نتیجه می‌گیریم $NH'' = 3x$. حال

می‌توانیم بنویسیم $\frac{NH''}{BC} = \frac{DH''}{CD}$ که خواهیم داشت:

$$\frac{3x}{12x} = \frac{DH''}{CD} \Rightarrow DH'' = \frac{1}{4}CD = \frac{20}{4} = 5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید $a = \sqrt{\frac{2}{5}}$ و $b = \sqrt{\frac{3}{5}}$. در این صورت $a^2 + b^2 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$ و عبارت مورد نظر ۲۴

به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \sqrt{2(1+a)(1+b)} &= \sqrt{2(1+a+b+ab)} = \sqrt{2+2a+2b+2ab} \\ &= \sqrt{1+1+2a+2b+2ab} = \sqrt{a^2+b^2+1+2a+2b+2ab} = \sqrt{(a+b+1)^2} \\ &= a+b+1 = \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{3}{5}} + 1 \end{aligned}$$

$$۱۳ + ۴\sqrt{۳} = (۲\sqrt{۳} + ۱)^۲$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. داریم: ۲۵

$$\sqrt{۱۳ + ۴\sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۳} + ۱$$

پس:

$$۳ + \sqrt{۱۳ + ۴\sqrt{۳}} = ۴ + ۲\sqrt{۳} = (\sqrt{۳} + ۱)^۲$$

بنابراین:

$$\sqrt{۴ + ۲\sqrt{۳}} = \sqrt{۳} + ۱ \Rightarrow a + b = ۴$$

که جذر آن می‌شود:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خواهیم داشت: ۲۶

$$\underbrace{(۱ + \tan \theta)(۱ + \operatorname{Cotg} \theta)}_a \cdot \underbrace{\frac{\tan \theta}{۱ + \tan^2 \theta}}_b \Rightarrow a = (۱ + \operatorname{Cotg} \theta + \tan \theta + ۱) = ۲ + \operatorname{Cotg} \theta + \tan \theta$$

$$= ۲ + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = ۲ + \frac{۱}{\sin \theta \cos \theta} \Rightarrow b = \frac{\tan \theta}{۱ + \tan^2 \theta}$$

$$\frac{۱ + \tan^2 \theta = \frac{۱}{\cos^2 \theta}}{\rightarrow} b = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \cos^2 \theta = \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow a \times b = \left(۲ + \frac{۱}{\sin \theta \cos \theta} \right) \sin \theta \cos \theta = ۲ \sin \theta \cos \theta + ۱$$

$$= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + ۲ \sin \theta \cos \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^2 \xrightarrow{\sin \theta + \cos \theta = \frac{۱}{۲}}$$

$$\left(\frac{۱}{۲} \right)^2 = \frac{۱}{۱۶}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چهارضلعی BCDK دوزنقه قائم‌الزاویه است، پس $DK \parallel BC$ و طبق قضیه خطوط موازی و مورب، ۲۷

نتیجه می‌شود $\widehat{D}_1 = ۴۵^\circ$ و لذا مثلث BDK قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

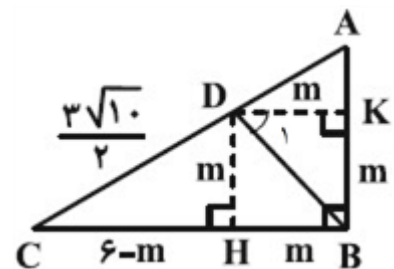
فرض می‌کنیم $DK = KB = m$ ؛ ارتفاع DH را رسم می‌کنیم. مطابق شکل داریم:

$$m^2 + (۶ - m)^2 = \left(\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۲} \right)^2 \Rightarrow ۲m^2 - ۱۲m + ۳۶ = ۲۲/۵ \Rightarrow ۲m^2 - ۱۲m + ۱۳/۵ = ۰$$

$$m = \frac{۱۲ \pm \sqrt{۱۴۴ - ۸ \times ۱۳/۵}}{۴} = \frac{۱۲ \pm ۶}{۴} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = ۴/۵ \\ m_2 = ۱/۵ \end{cases}$$

$$DH = ۱/۵$$

طبق فرض $BC > AB$ ، پس $CH > DH$ و در نتیجه:



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مؤلفه اول نقطه P , $\cos \alpha$ و مؤلفه دوم آن $\sin \alpha$ است.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + (3x)^2 = 1 \Rightarrow 10x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(5x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ ق ق} \\ x=\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{5} - 1 = \frac{-4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$A = \frac{\tan \alpha}{x+1} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{x+1} = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{-20}{18} = \frac{-10}{9}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث ABE و BCF بنا به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند. بنابراین $BF = 2$ است و مثلث BEF متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\widehat{EFB} = 75^\circ$. پس در مثلث BEF داریم: $\widehat{B} = 30^\circ$. مساحت مثلث BEF برابر است:

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \times BF \times \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 30^\circ = 1$$

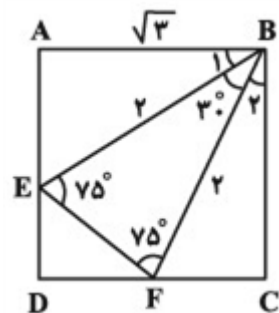
از طرفی از هم‌نهشتی مثلث‌های ABE و BFC داریم:

$$\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = 30^\circ$$

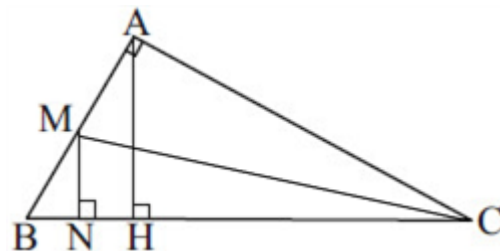
و در نتیجه $AB = 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}$ به دست می‌آید. در نتیجه مساحت مربع $ABCD$ برابر 3 است و مساحت

$$S = S_{ABCD} - S_{\triangle BEF} = 3 - 1 = 2$$

قسمت رنگی برابر است با:



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



توجه: بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $AC > AB$ باشد:

حال قضیه فیثاغورس را در مثلث‌های MNB و MNC می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} NC^2 &= MC^2 - MN^2 \\ NB^2 &= MB^2 - MN^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} \xrightarrow{AM=MB} NC^2 - NB^2 = (AC^2 + AM^2) - (AM^2) = AC^2$$

$$AC^2 = CH \times BC$$

از طرفی طبق روابط طولی معرفی شده داریم:

$$\text{پس عملاً خواسته سؤال برابر } 1 = \frac{|NC^2 - NB^2|}{CH \cdot BC} \text{ خواهد بود.}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای ساده‌سازی عبارت باید رادیکال‌ها هم‌فرجه باشند ولی در نظر داریم که رادیکال اول عددی منفی است پس داریم:

$$A = -\sqrt[5]{2^3} \times \sqrt[5]{2} \times 1 = -\sqrt[5]{2^6} \times \sqrt[5]{2} = -\sqrt[5]{2^7} = -\sqrt[5]{128}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $0 \leq \sin^2 \theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{5 \sin^2 \theta}{3} \leq \frac{5}{3}$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq \frac{4 \cos \alpha}{3} \leq \frac{4}{3}$$

اگر دو نامساوی را با هم جمع کنیم، داریم:

$$-\frac{4}{3} \leq \frac{5 \sin^2 \theta + 4 \cos \alpha}{3} \leq 3 \Rightarrow \underbrace{-\frac{4}{3}}_{\min} \leq A \leq \underbrace{3}_{\max}$$

$$\max(A) - \min(A) = 3 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{3}$$

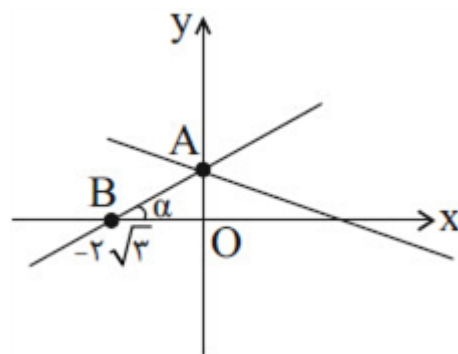
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل، محل برخورد دو خط عرض از مبدأ خط $x + 2y - 4 = 0$ است. یعنی:

$$x = 0 \Rightarrow 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2$$

در مثلث OAB تانژانت زاویه α برابر است با:

$$\tan \alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

در نتیجه α برابر 30° است.



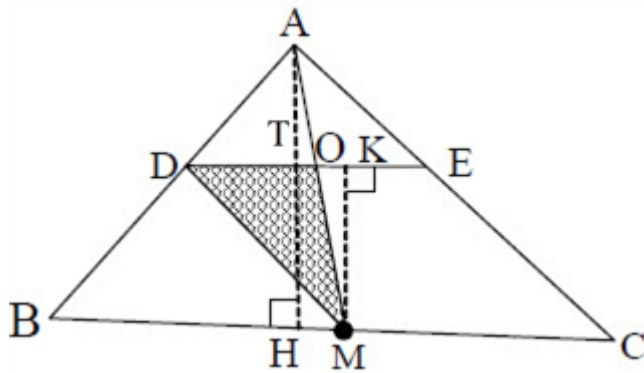
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = m \quad (1)$

$$-\left(\sqrt[3]{b}\right) = -\sqrt[3]{a} - n \Rightarrow \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} = n \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$\underbrace{(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a})}_m = n \Rightarrow \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} = \frac{n}{m} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{1, 2} \begin{cases} \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = m \\ \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} = \frac{n}{m} \end{cases}$$

$$2\sqrt[3]{b} = m + \frac{n}{m} \Rightarrow \sqrt[3]{b} = \frac{m^3 + n}{2m} \Rightarrow \sqrt[3]{b} = \frac{m^3 + n}{2m} \Rightarrow b^3 = \left(\frac{m^3 + n}{2m}\right)^3$$



$$\text{میانۀ } AM \Rightarrow MB = MC$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{2}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{AT}{AH} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{5} \Rightarrow AT = \frac{2}{5}AH \quad (۲)$$

$$MK = HT = AH - AT = \frac{3}{5}AH \quad (۳)$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow DE = \frac{2}{5}BC \Rightarrow OD = \frac{1}{5}DE = \frac{1}{5} \times \frac{2}{5}BC = \frac{1}{5}BC \quad (۴)$$

$$۱, ۲ \Rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{5}DE \times AT}{\frac{1}{5}BC \times AH} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25} \Rightarrow \frac{S_{BCED}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{21}{25} \quad (۵)$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MOD}} = \frac{\frac{1}{5}BC \times AH}{\frac{1}{5}OD \times MK} = \frac{BC \times AH}{\frac{1}{5}BC \times \frac{3}{5}AH} = \frac{25}{3} \quad (۶)$$

$$۵, ۶ \Rightarrow \frac{S_{BCED}}{S_{\triangle MOD}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MOD}} \times \frac{S_{BCED}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{25}{3} \times \frac{21}{25} = ۷$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض مسئله را کمی ساده‌تر می‌کنیم: ۳۶

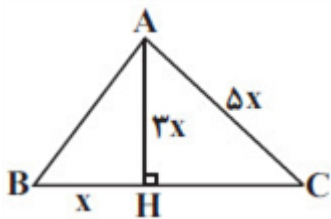
$$\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \sqrt{\frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x}} = \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| = \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \tan x$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} - \tan x = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \sqrt{5} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

به کمک یک مثلث می‌توان تمامی نسبت‌های مثلثاتی را محاسبه کرد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan x = 2 \Rightarrow \tan^2 x = 4 \\ \cotg x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cotg^2 x = \frac{1}{4} \\ \tan^2 x + \cotg^2 x = \frac{17}{4} \end{array} \right.$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا یک شکل فرضی می‌کشیم، سپس اضلاع مجهول را می‌یابیم: ۳۷



$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = (5x)^2 - (3x)^2 = 16x^2 \Rightarrow CH = 4x$$

$$\Rightarrow BC = 5x$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = (3x)^2 + x^2 = 10x^2$$

$$\frac{AB^2}{BC \times AC} = \frac{10x^2}{5x \times 5x} = \frac{10}{25} = 0.4$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2} \times \sqrt[3]{10 - 2\sqrt{21}} &\Rightarrow \sqrt[3]{7 + 2\sqrt{21} + 3} \times \sqrt[3]{10 - 2\sqrt{21}} \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{10 + 2\sqrt{21}} \times \sqrt[3]{10 - 2\sqrt{21}} \Rightarrow \sqrt[3]{(10 + 2\sqrt{21})(10 - 2\sqrt{21})} \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{100 - 4(21)} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون α در ربع سوم قرار دارد، می‌توان گفت که $0 < \sin \alpha < 1$ و هر عبارتی که در بازه $(-1, 0)$ قرار دارد، هرچه بیشتر به توان فرد برسد به صفر نزدیک‌تر و هر چه فرجه فرد بیشتر از آن گرفته شود به -1 نزدیک‌تر می‌شود. اگر $\sin \alpha = t$ در نظر بگیریم، آنگاه:

$$\begin{aligned} -1 < \sqrt[3]{t} < t < t^3 < 0 &\Rightarrow \underbrace{|t^3 - \sqrt[3]{t}|}_{+} - \underbrace{|t - t^3|}_{-} - \underbrace{|t - \sqrt[3]{t}|}_{+} \\ t^3 - \sqrt[3]{t} + t - t^3 - t + \sqrt[3]{t} &= 0 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون نقطه $A(x-1, x)$ روی دایره مثلثاتی قرار دارد، پس:

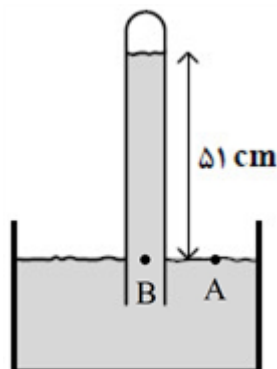
$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin \alpha = x - 1 \\ \cos \alpha = x \end{cases}, \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \Rightarrow (x-1)^2 + x^2 = 1 &\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(2x - 2) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x = 1 & \text{ق ق ق} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{5} - 1 = -\frac{4}{5} = -0.8 \\ \cos \alpha = 2\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} = 0.4 \end{cases} \\ \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{2}{5} - (-\frac{4}{5})}{-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{6}{5}}{-\frac{2}{5}} = -3 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. رابطه انرژی جنبشی برای این جسم را در هر دو حالت می‌نویسیم و آن‌ها را از هم کم می‌کنیم تا v_1 به دست آید:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \xrightarrow{K_2 = K_1 + 15} K_1 + 15 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \\ \xrightarrow{v_2 = v_1 + 3} 15 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left[(v_1 + 3)^2 - v_1^2 \right] \Rightarrow 60 = v_1^2 + 6v_1 + 9 - v_1^2 \\ m = 50, g = \frac{1}{2} \text{ kg} &\Rightarrow 60 = 6v_1 + 9 \Rightarrow 51 = 6v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{51}{6} = 8.5 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴۲

$$\begin{aligned} P_A &= P_B \Rightarrow P_G + P_{\text{مایع}} = P. \\ P_G &= 1360 \times 9.8 / 5 - 2800 \times 10 \times \frac{51}{100} = 88400 \text{ Pa} \end{aligned}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۳

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 0.36$$

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m (V_2^2 - V_1^2) = 10 \times 600 = 6000 J = 6 kJ$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۴۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها: ۴۵

الف) درست، با افزایش قطر لوله تندی آن کاهش می‌یابد و فشار شاره زیاد می‌شود.

$$r_A v_A = r_B v_B \Rightarrow 10^2 \times 10 = 20^2 \times v_B \Rightarrow v_B = 2.5 \frac{m}{s}$$

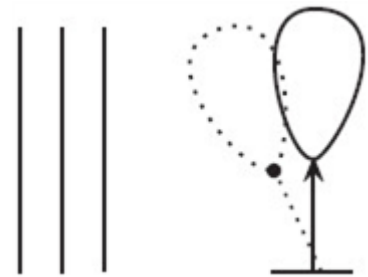
ب) نادرست

ج) نادرست - آهنگ جریان شاره در همه قسمت‌های لوله یکسان است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل جریان هوای تندی در سمت چپ بادکنک برقرار است. می‌خواهیم جهت انحراف بادکنک را ۴۶

تعیین کنیم. به طور کلی طبق اصل برنولی برای یک شاره، تندی بیشتر، فشار کمتر را در بر دارد در اینجا تندی بیشتر جریان هوا در سمت چپ باعث کمتر شدن فشار نسبت به سمت راست بادکنک شده و این اختلاف فشار باعث اعمال نیرویی از راست به چپ شده و بادکنک را به سمت چپ منحرف می‌کند.

دقت کنید جهت جریان شاره اهمیت ندارد. تندی بیشتر جریان شاره، فشار کمتر را ایجاد می‌کند خواه جریان هوا به سمت بالا باشد خواه پایین، خواه درون سو باشد، خواه برون سو. لذا گزاره‌های ب و پ و ت درست بیان شده‌اند.



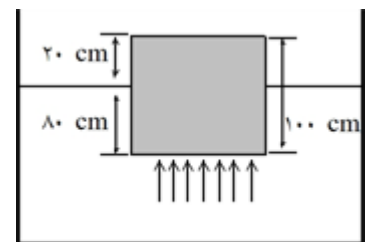
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نیرویی که آب به مکعب وارد می‌کند بر اثر فشار P است. فشار سیال در عمق h برابر ۴۷

$P = P_0 + \rho gh$ می‌باشد. در این رابطه P_0 فشار بر سطح سیال و در این جا برابر فشار جو است. ρ و g نیز به ترتیب چگالی سیال و شتاب ثقل هستند. برآیند نیروهای وارد بر سطوح کناری مکعب در آب برابر صفر است. زیرا نیرویی که در هر عمقی از سیال به دو سطح روبه‌روی هم وارد می‌شود هم‌اندازه و در خلاف جهت یک‌دیگر است. هرگاه فشار بر سطح زیرین مکعب را با P نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$P = P_0 + \rho gh = 10^5 + (1000 \times 10 \times 0.8) = 108000 \text{ Pa}$$

با توجه به این که طول ضلع مکعب برابر یک متر می‌باشد، این فشار بر سطح یک متر مربع وارد می‌شود:

$$F = PA = 108000 \times 1 = 108000 \text{ N}$$

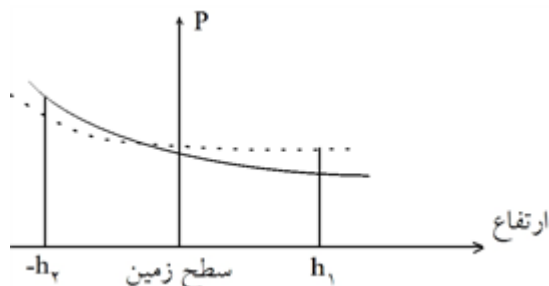


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با افزایش دما هوا منبسط می شود یعنی در حجم ثابتی از هوا تعداد مولکول ها و در نتیجه جرم کاهش می یابد پس با افزایش دما، چگالی هوا کاهش می یابد. با توجه به رابطه ی $\Delta P = \rho g(\Delta h)$ نتیجه می گیریم که با افزایش دما، اختلاف فشار بین دو نقطه ی مشخص کاهش می یابد. هرگاه فشار هوا در سطح زمین، در ارتفاع h_1 و در عمق h_2 را پس از گرم شدن هوا با P_0 ، P_1 و P_2 نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$P_0 - P_1 < P_0 - P_2 \rightarrow -P_1 < -P_2 \rightarrow P_1 > P_2$$

$$P_1 - P_0 < P_2 - P_0 \rightarrow P_1 < P_2$$

بنابراین با افزایش دما، P_1 زیاد شده و P_2 کم می شود. در واقع نمودار کیفی فشار بر حسب ارتفاع به صورت روبرو است. منحنی مذکور پس از افزایش دما با نقطه چین مشخص شده است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر چگالی مایع را ρ_0 و چگالی اجسام را با شماره خودشان مشخص کنیم خواهیم داشت:

جسم ۱ شناور است پس: $\rho_1 < \rho_0$

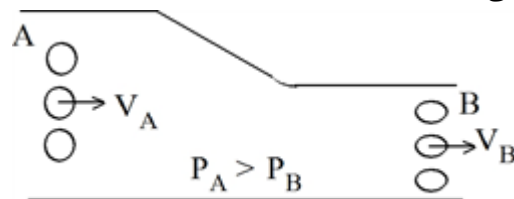
جسم ۲ غوطه ور است پس: $\rho_2 = \rho_0$

جسم ۳ به طرف بالا می رود پس: $\rho_3 < \rho_0 \xrightarrow{\rho_3 = \rho_0} \rho_3 < \rho_2$

جسم ۴ به طرف بالا می رود پس: $\rho_4 < \rho_0 \xrightarrow{\rho_4 = \rho_0} \rho_4 < \rho_2$

اما الزامی برای $\rho_3 = \rho_4$ وجود ندارد.

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. روش اول: با توجه به شکل زیر هنگامی که ذرات از ناحیه‌ی پهن A به ناحیه‌ی تنگ B می‌روند، سرعت شارش آب و حرکت ذرات آن افزایش می‌یابد، بنابراین ذرات به عقب فشرده می‌شوند، زیرا برای این امر ذرات باید حرکت شتابدار در جهت جریان آب پیدا کنند و طبق قانون دوم نیوتن باید نیروی بیشتری از قسمت عقب به ذرات وارد شود. در این حالت که ذرات به عقب فشرده می‌شوند، متراکم می‌شوند و در نتیجه فشار در قسمت A از فشار در قسمت B بیش‌تر می‌باشد.



روش دوم: برای مقایسه‌ی فشار بین نقطه‌های A و B می‌توانیم از معادله‌ی برنولی استفاده کنیم. طبق این معادله مقدار عبارت زیر

$$P + \rho gy + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{عدد ثابت}$$

در عبارت بالا P فشار در نقطه‌ی مورد نظر از سیال در حال شارش، y ارتفاع لوله در آن نقطه از سطح مبنا و V سرعت جریان سیال در آن نقطه است. مقدارهای ρ و g نیز چگالی سیال و شتاب ثقل هستند که ثابت می‌باشند.

بنابراین معادله‌ی برنولی را برای دو نقطه‌ی A و B می‌توانیم به کار ببریم و با هم برابر قرار دهیم. یعنی:

$$P_A + \rho gy_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2 = P_B + \rho gy_B + \frac{1}{2} \rho V_B^2$$

ارتفاع لوله در نقاط A و B با هم برابر است، پس $y_A = y_B$ می‌باشد و رابطه‌ی بالا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$y_A = y_B \rightarrow P_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho V_B^2$$

آهنگ حجمی جریان آب (دبی) در نقطه‌های A و B نیز با هم برابر هستند، اگر سطح لوله در نقاط A و B به ترتیب S_A و S_B باشد، داریم:

$$d_A = d_B \rightarrow V_A \times S_A = V_B \times S_B, S_A > S_B \rightarrow V_A < V_B$$

باتوجه به این که سرعت جریان آب در نقطه‌ی A از سرعت جریان آب در نقطه‌ی B بزرگ‌تر است و با استفاده از نتیجه‌ی معادله‌ی برنولی برای نقاط A و B فشار در نقطه‌ی A از فشار در نقطه‌ی B بیش‌تر خواهد شد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای اینکه چوب به زیر آب فرو نرود، می‌بایست نیروی ارشمیدس بالاسوی وارد بر چوب از وزن شخص و تخته بیش‌تر باشد. در حالت حدی برای تعیین حداقل سطح تخته، فرض می‌کنیم تمامی ضخامت ۳۰ سانتی متری چوب در آب فرو رفته است. اگر نیروی ارشمیدس وارد بر چوب از سوی آب را F_{Ar} ، نیروی وزن شخص را W_1 و نیروی وزن تخته را W_2 در نظر بگیریم، در حالت تعادل باید برآیند این سه نیرو برابر صفر شود. فرض می‌کنیم که سطح تخته‌ی چوبی برابر A است.

$$W_1 = m_1 g = 60 \times 10 = 600 \text{ N}$$

$$W_2 = m_2 g = \rho_2 V \times g = \rho_2 \times Ah \times g \text{ و } \rho_2 = 0.6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

$$\rightarrow W_2 = 600 \times A \times 0.6 \times 10 = 360A$$

$$F_{Ar} = \rho_1 V g' = \rho_1 V g$$

در رابطه‌ی نیروی ارشمیدس V' حجم بخشی از تخته است که در آب قرار گرفته است، در حالت حد این مسئله، V' با حجم تخته

$$(V) \text{ برابر است. } \rho_1 = 1 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{ نیز چگالی آب است.}$$

$$F_{Ar} = 1000 \times Ah \times g = 1000 \times A \times 0.3 \times 10 = 300A$$

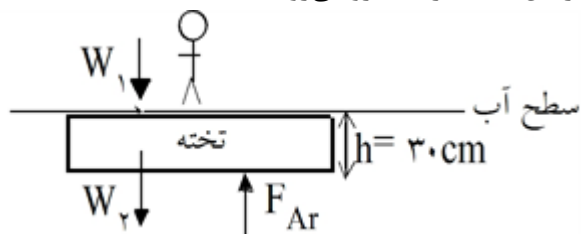
بنابراین مقدار نیروی ارشمیدس برابر است با: $300A$

برای تعادل این نیروها داریم:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow F_{Ar} = W_1 + W_2$$

$$\rightarrow 300A = 600 + 360A \rightarrow 120A = 600 \rightarrow A = \frac{600}{120} = 0.5 \text{ m}^2$$

این مقدار حداقل مساحت تخته‌ی مورد نظر است، چنان‌چه مساحت تخته از این مقدار بیش‌تر باشد، ضخامت کم‌تر از ۳۰ سانتی متر از این تخته در آب فرو می‌رود.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از قضیه کار و انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم. روی این جسم، دو نیرو، یکی وزن و دیگری نیروی مقاومت هوا کار انجام می‌دهند:

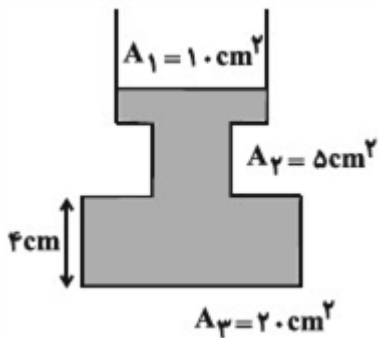
$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_{fd} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

چون جسم به طرف بالا جابه‌جا شده است، کار نیروی وزن منفی است.

$$-mgh + W_{fd} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow W_{fd} = \frac{1}{2} \times 2(2^2 - 10^2) + 2 \times 10 \times 2 = -96 + 40$$

$$\Rightarrow W_{fd} = -56 \text{ J}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چگالی جیوه بیشتر از آب است. بنابراین جیوه به کف ظرف می‌رسد و آب را به طرف بالا می‌راند. بخشی از افزایش فشار وارد بر کف ظرف ناشی از وزن جیوه است.



$$V_{\text{جیوه}} = \frac{m}{\rho} = \frac{544}{13/6} = 40 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{جیوه}} = A_2 h_2 \Rightarrow 40 = 20 h_2 \Rightarrow h_2 = 2 \text{ cm}$$

بنابراین جیوه وارد قسمت باریک لوله نمی‌شود.

$$\Delta P_1 = \rho_{\text{Hg}} \times g \times h_2 = 13600 \times 10 \times 2 \times 10^{-2} = 2720 \text{ Pa}$$

$A_1 = \frac{A_2}{4}$ است، بنابراین وقتی ارتفاع آب در قسمت پایین ظرف ۲ cm کاهش می‌یابد در قسمت بالای ظرف ارتفاع آب ۴ cm افزایش پیدا می‌کند. در نتیجه ارتفاع آب در مجموع ۲ cm بیشتر می‌شود. بخشی از افزایش فشار وارد بر کف ظرف، ناشی از همین موضوع است.

$$\Delta P_2 = \rho_{\text{آب}} g \Delta h = 1000 \times 10 \times 2 \times 10^{-2} = 200 \text{ Pa}$$

$$\Delta P_1 + \Delta P_2 = 2720 + 200 = 2920 \text{ Pa}$$

بنابراین افزایش فشار برابر است با:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا چند برابر شدن انرژی جنبشی را می‌یابیم:

$$K_2 = K_1 - \frac{51}{100} K_1 = \frac{49}{100} K_1$$

از طرفی جرم جسم $\frac{1}{4}$ برابر شده و تندی آن به اندازه $5 \frac{m}{s}$ افزایش یافته است.

$$m_2 = \frac{1}{4} m_1, v_2 = v + 5$$

از رابطه مقایسه‌ای داریم:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{49}{100} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{v+5}{v} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{v+5}{v} \right)^2 = \frac{49}{25} \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}}$$

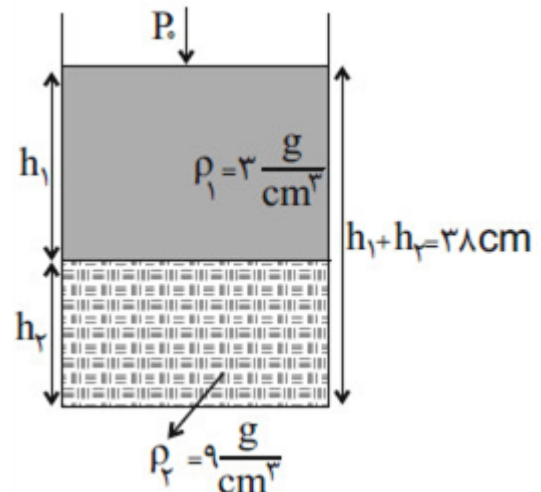
$$\frac{v+5}{v} = \frac{7}{5} \Rightarrow 5v = 7v + 25 \Rightarrow 2v = 25 \Rightarrow v = 12.5 \frac{m}{s} \Rightarrow v_2 = v + 5 = 17.5 \frac{m}{s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به چگالی مایعات، شکل آن‌ها داخل ظرف استوانه‌ای به صورت زیر خواهد بود. در ابتدا فشار ناشی از مایعات را به دست می‌آوریم.

$$P = P_0 + P_{\text{مایعات}} \Rightarrow 90 = 75 + P_{\text{مایعات}} \\ \Rightarrow P_{\text{مایعات}} = 15 \text{ cmHg}$$

حال با توجه به رابطه مربوط به فشار مایعات بر کف ظرف داریم:

$$P_{\text{مایعات}} = P_1 + P_2 \Rightarrow \rho_{\text{جیوه}} h_{\text{جیوه}} = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 \\ \Rightarrow (13/6)(15) = 3h_1 + 9h_2 \Rightarrow 68 = h_1 + 3h_2 \\ \Rightarrow \begin{cases} h_1 + 3h_2 = 68 \\ h_1 + h_2 = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 23 \text{ cm} \\ h_2 = 15 \text{ cm} \end{cases}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حجم کل گلوله برابر است با:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times (5)^3 = 500 \text{ cm}^3$$

حجم آب بالا آمده در ظرف برابر با ۸۰٪ حجم گلوله است:

$$V' = \frac{80}{100} \times 500 = 400 \text{ cm}^3$$

(حجمی از گلوله که داخل آب قرار گرفته است).

$$\Delta h_{\text{آب}} = \frac{V'}{A} = \frac{400}{50} = 8 \text{ cm}$$

بنابراین ارتفاع آب بالا آمده برابر است با:

افزایش فشار ناشی از این میزان آب بالا آمده برابر است با:

$$\Delta P = \rho_{\text{آب}} \Delta h_{\text{آب}} \xrightarrow{\Delta h_{\text{آب}} = 0.08 \text{ m}} \Delta P = 1000 \times 10 \times 0.08 = 800 \text{ Pa}$$

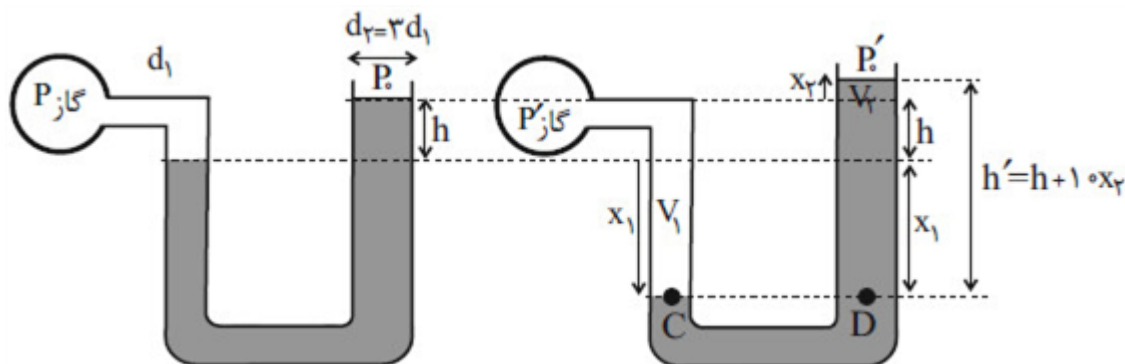
و در نهایت افزایش نیرو در کف ظرف برابر می‌شود با:

$$\Delta F = \Delta P \times A_{\text{کف ظرف}} \xrightarrow{A_{\text{کف ظرف}} = 100 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \Delta F = 800 \times 100 \times 10^{-4} = 8 \text{ N}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا قبل از اعمال تغییرات در فشار، از مرز مشترک گاز درون مخزن با جیوه خط افقی رسم می‌کنیم. نقاط A و B را بر روی این خط در دو شاخه مشخص می‌کنیم. می‌دانیم به دلیل اینکه این دو نقطه بر روی یک خط تراز و در درون یک نوع مایع هستند، بنابراین فشار این دو نقطه با هم برابر است:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} = h + P. \quad (I)$$

حال با توجه تغییرات اعمال شده، شکل جدیدی از وضعیت مایع در درون لوله را رسم می‌کنیم. با افزایش فشار گاز درون مخزن و کاهش فشار هوای محیط، مایع در شاخه سمت چپ پایین می‌آید و در شاخه سمت راست بالا می‌رود. حجم مایعات جابه‌جا شده در شاخه‌ها با هم برابر هستند.



$$d_2 = 3d_1 \xrightarrow{A=\pi r^2} A_2 = 9A_1$$

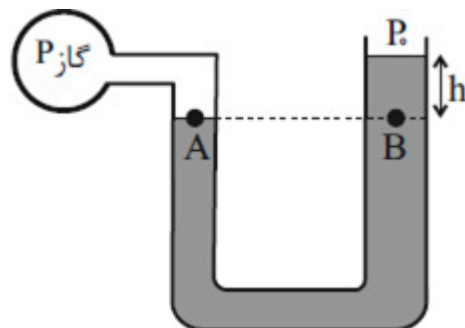
$$V_1 = V_2 \Rightarrow A_1 x_1 = A_2 x_2 \Rightarrow A_1 x_1 = 9A_1 x_2 \Rightarrow x_1 = 9x_2$$

$$P_{\text{گاز}} = h + P. \quad \text{حالت اول:}$$

حالت دوم:

$$P_{\text{گاز}} + 9 = H + P' = x_1 + h + x_2 + P. \quad - 2 \Rightarrow 8 = x_1 + x_2 \Rightarrow 8 = 9x_2 + x_2$$

$$\Rightarrow 8 = 10x_2 \Rightarrow x_2 = 0.8 \text{ cmHg}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

۱ و ۲) با توجه به شکل $A_1 > A_2$ است. طبق معادله پیوستگی، $A_1 v_1 = A_2 v_2$ که از آن نتیجه می‌شود با کاهش سطح مقطع، تندی شاره افزایش می‌یابد، لذا $v_1 < v_2$ می‌باشد. (درستی گزینه ۲). از طرف دیگر، طبق اصل برنولی، در مسیر حرکت شاره با افزایش تندی شاره فشار آن کاهش می‌یابد، پس $v_2 > v_1$ نتیجه می‌شود $P_1 > P_2$ (درستی گزینه ۱).
۳) درست. با توجه به شکل، فشار در سطح مقطع‌های A_1 و A_2 از روابط زیر به دست می‌آید:

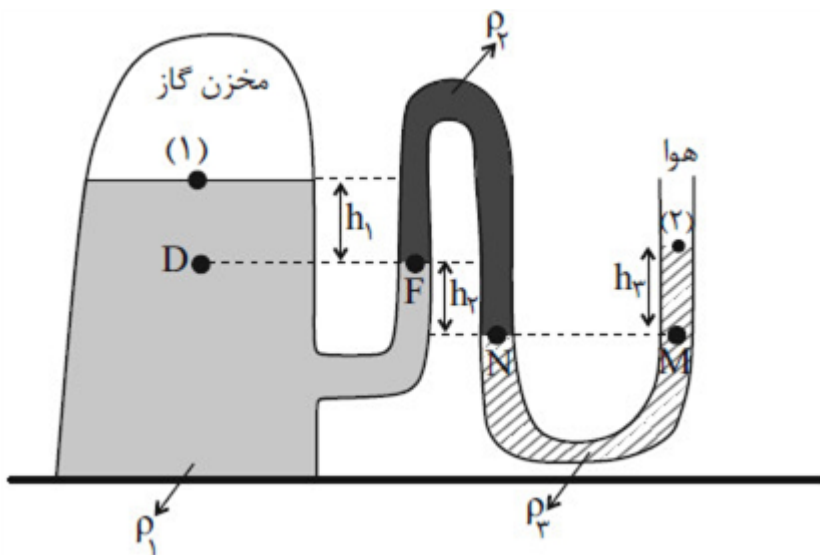
$$\begin{cases} A_1 \text{ سطح مقطع} : P_1 = P. + \rho_1 g h_1 \\ A_2 \text{ سطح مقطع} : P_2 = P. + \rho_2 g h_2 \end{cases}$$

$$|P_2 - P_1| = |P. + \rho_2 g h_2 - P. - \rho_1 g h_1| = |\rho g (h_2 - h_1)|$$

$$|h_2 - h_1| = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$|P_2 - P_1| = (1000)(10)(0.2) = 2000 \text{ Pa}$$

۴) آهنگ جریان (شارش) شاره تراکم‌ناپذیر، در تمام لوله یکسان است. از این رو گزینه ۴ نادرست است.



$$P_D = \rho_1 g h_1 + P_1, P_D = P_F$$

$$P_N = \rho_2 g h_2 + P_F \Rightarrow P_N = \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1 + P_1$$

$$\left. \begin{array}{l} P_M = P_N \\ P_M = \rho_2 g h_2 + P_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_2 g h_2 + P_2 = \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1 + P_1$$

$$\Rightarrow P_2 - P_1 = \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2 \Rightarrow P_2 - P_1 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 - \rho_2 h_2)g$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فشاری که جسم به سطح افقی وارد می کند برابر با فشار مایع به علاوه فشار ناشی از وزن خود جسم

$$P_{\text{سطح}} = \rho g h_{\text{مایع}} + \left(\frac{mg}{A} \right)_{\text{جسم}}$$

$$P = 4000 \times 10 \times \frac{125}{100} + \left(\frac{440 \times 10^{-2} \times 10}{10 \times 10^{-4}} \right) = 50000 + 4400 = 54400 \text{ Pa}$$

این فشار باید به cmHg تبدیل شود:

$$P = \rho g h \Rightarrow 54400 = 13600 \times 10 \times h \Rightarrow h = 0.4 \text{ m یا } 40 \text{ cmHg}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فشار کل در کف ظرف در ۲ حالت یکسان است. زیرا از رابطه $P = \frac{(m_1 + m_2)g}{A} + P_0$ می آید که در ۲ حالت وزن کل مایع ثابت است.

$$\rho_T = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2} \Rightarrow \rho = \frac{(1 \times Ah_1) + (0.8 \times A \times (4h_1))}{Ah_1 + A \times 4h_1}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{4/2 h_1}{5h - 1} = 0.8 \frac{g}{\text{cm}^3}$$

اگر P فشار کل در کف ظرف باشد، داریم:

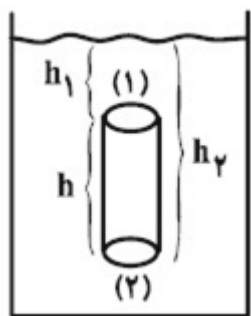
$$P = P_A + \rho_1 g h \quad \text{حالت اول:}$$

$$P = P'_A + \rho_T g h \quad \text{حالت دوم:}$$

$$P_A + \rho_1 g h = P'_A + \rho_T g h \Rightarrow P'_A - P_A = g h (\rho_1 - \rho_T)$$

$$\Rightarrow P'_A - P_A = 10 \times 0.1 (1 - 0.8) \times 10^3 = 0.2 \times 10^3 = 200 \text{ Pa}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل زیر می توان نوشت:



$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = PA \Rightarrow \begin{cases} F_1 = P_1 A \xrightarrow{P_1 = \rho g h_1} \\ F_1 = A(\rho g h_1) \quad (1) \\ F_2 = P_2 A \xrightarrow{P_2 = \rho g h_2} \\ F_2 = A(\rho g h_2) \quad (2) \end{cases}$$

$$\Delta F = F_2 - F_1 \xrightarrow{(1),(2)} A(\rho g h_2 - \rho g h_1) = A\rho g(h_2 - h_1) = A\rho g\Delta h$$

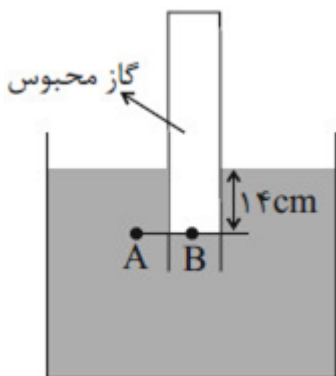
بنابراین $\Delta F = A\rho g\Delta h$. همچنین Δh همان ارتفاع استوانه است ($h = \Delta h$). لذا می توان نوشت:

$$\Delta F = \rho g h A \xrightarrow{\Delta F = 60 N, A = 0.01 m^2} 60 = 1200 \times 10 \times h \times 0.01$$

$$\rho = 1/2 \frac{g}{cm^3} = 1200 \frac{kg}{m^3}$$

$$\Rightarrow h = 0.5 m = 50 cm$$

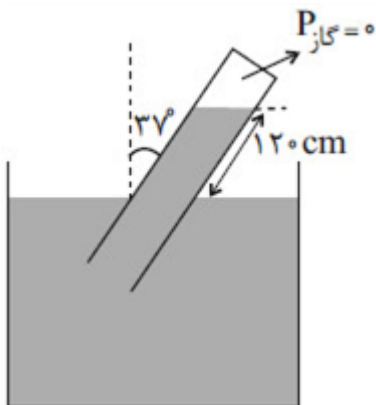
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در حالت اول با توجه به هم تراز بودن نقاط A و B می توان نوشت:



$$P_B = P_A \Rightarrow P_{\text{گاز محبوس}} = P_0 + \rho_{\text{مایع}} \times 10 \times 0.14$$

$$= P_0 + 1/4 \rho_{\text{مایع}} \quad (1)$$

وقتی لوله منحرف شود وضعیت به شکل زیر خواهد شد:



$$h = 120 cm \times \cos 37^\circ = 96 cm$$

چون بالای لوله خلأ است پس ارتفاع ستون مایع برابر است با:

$$P_0 = \rho_{\text{مایع}} \times 10 \times 0.96 = 9/6 \rho_{\text{مایع}} \quad (2)$$

فشار هوا برابر است با:

از روابط ۱ و ۲ می توان نتیجه گرفت:

$$P_{\text{گاز محبوس}} = 1/4 \rho_{\text{مایع}} + 9/6 \rho_{\text{مایع}} = 13200 Pa \Rightarrow 13200 = \rho_{\text{مایع}} \times 11 \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} = 1200 \frac{kg}{m^3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا فشار پیمانه‌ای ناشی از آب به ارتفاع ۲۰ cm را پیدا می‌کنیم.

$$P_g = \rho gh \xrightarrow{\rho = 1 \frac{g}{cm^3} = 10^3 \frac{kg}{m^3}, g = 10 \frac{N}{kg}, h = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}} P_g = 1000 \times 10 \times 0.2 = 2000 \text{ Pa}$$

اکنون فشار پیمانه‌ای ناشی از آب و روغن را به دست می‌آوریم:

$$P'_g = P_g + P_{\text{روغن}} = P_g + \frac{mg}{A} \xrightarrow{P_g = 2000 \text{ Pa}, g = 10 \frac{N}{kg}, m = 36g = 36 \times 10^{-3} \text{ kg}, A = 30 \text{ cm}^2 = 30 \times 10^{-4} \text{ m}^2}$$

$$P'_g = 2000 + \frac{36 \times 10^{-3} \times 10}{30 \times 10^{-4}} = 2000 + 120 = 2120 \text{ Pa}$$

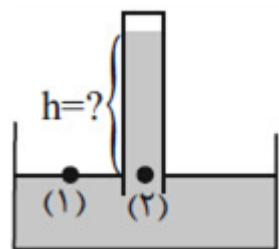
در پایان، درصد تغییر فشار را حساب می‌کنیم:

$$\frac{P'_g - P_g}{P_g} \times 100 = \frac{2120 - 2000}{2000} \times 100 = \frac{120 \times 100}{2000} = 6\%$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا باید فشار مطلق مخزن را به دست آوریم تا سپس بتوانیم به وسیله آن ارتفاع مایع بارومتر را به دست آوریم. چون فشار هوای محیط بر حسب سانتی‌متر جیوه داده شده است، پس با یکای cmHg در حل سؤال پیش می‌رویم. مایع درون لوله U شکل مانومتر جیوه است.

$$P_{\text{مایع درون لوله مانومتر}} = P_{\text{هوای مخزن}} + P_{\text{هوای محیط}} = 68 + 4 = 72 \text{ cmHg}$$

پس فشار هوای مخزن ۷۲ سانتی‌متر جیوه است. حال به سراغ بارومتر می‌رویم:



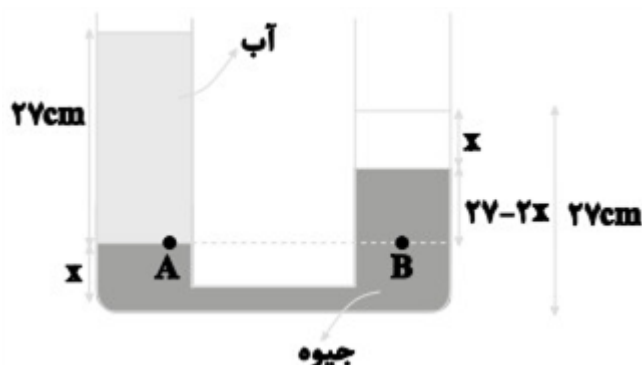
$$P_1 = P_2$$

$$P_{\text{مایع برومتر}} = P_{\text{هوای مخزن}}$$

$$\rho_{\text{Hg}} gh = \rho_A gh \Rightarrow 13600 \times g \times 0.72 = 10200 \times g \times \frac{h}{100} \Rightarrow h = 96 \text{ cm}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با باز شدن شیر ارتباطی، با توجه به این که چگالی جیوه بزرگ‌تر از چگالی آب است، جیوه در شاخه‌ی سمت راست پایین می‌آید و آب در شاخه‌ی سمت چپ بالا می‌رود. با توجه به این که سطح مقطع دو لوله یکسان است و حجم لوله‌ی ارتباطی ناچیز است، کاهش ارتفاع جیوه در لوله‌ی سمت راست برابر با افزایش ارتفاع جیوه در لوله‌ی سمت چپ است. اختلاف ارتفاع جیوه در دو شاخه‌ی برابر با (۲۷ - ۲x) سانتی‌متر است. با توجه به شکل و با نوشتن رابطه‌ی فشار در نقاط هم‌تراز A و B داریم:



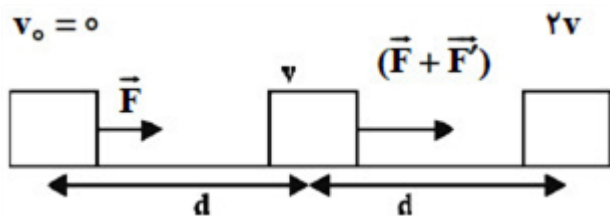
$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_{\text{آب}} gh_{\text{آب}} + p. = \rho_{\text{جیوه}} gh_{\text{جیوه}} + P.$$

$$\rho_{\text{جیوه}} = 13/5 \frac{g}{cm^3}; \rho_{\text{آب}} = 1 \frac{g}{cm^3}$$

$$h_{\text{آب}} = 27 \text{ cm}, h_{\text{جیوه}} = (27 - 2x) \text{ cm}$$

$$1 \times 27 = 13/5 \times (27 - 2x) \Rightarrow 25 = 2x$$

$$\Rightarrow x = 12/5 \text{ cm}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۷

$$W_t = \Delta K \Rightarrow Fd \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(0)^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

در مرحله اول:

در مرحله دوم:

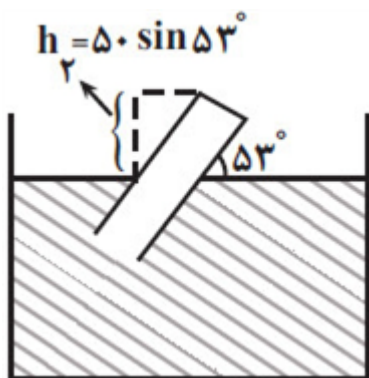
$$W'_t = \Delta K' \Rightarrow (F + F')d = \frac{1}{2}m(v')^2 - \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow (F + F')d = \frac{1}{2}m(v'^2 - v^2)$$

$$= \frac{1}{2}m(v'^2) \quad (2)$$

$$\frac{(F + F')d}{Fd} = \frac{\frac{1}{2}m(v'^2)}{\frac{1}{2}mv^2} \Rightarrow \frac{F + F'}{F} = \frac{v'^2}{v^2} \Rightarrow F + F' = \frac{v'^2}{v^2}F \Rightarrow F' = \frac{v'^2}{v^2}F \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{v'^2}{v^2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اختلاف فشار انتهای لوله در دو حالت را به دست می‌آوریم. در حالتی که لوله چرخیده است، ارتفاع قائم

لوله را در نظر می‌گیریم: ۶۸



$$\begin{cases} P_1 = P_0 + \rho gh_1 \\ P_2 = P_0 - \rho gh_2 \end{cases} \Rightarrow P_2 - P_1 = \rho g(h_1 - h_2)$$

$$h_2 = 50 \sin 53^\circ \times 10^{-2} m, g = 10 \frac{N}{kg}$$

$$\rho = 13600 \frac{kg}{m^3}, h_1 = 50 \times 10^{-2} m$$

$$\Delta P = 3400 \times 100$$

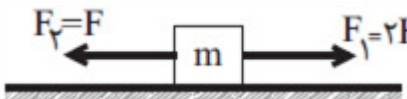
$$(50 - 50 \times 0.8) \times 10^{-2} \Rightarrow \Delta P = 3400 \times 10 = 34000 Pa \Rightarrow \Delta F = \Delta P \times A$$

$$\frac{\Delta P = 34000 Pa}{A = 6 cm^2 = 6 \times 10^{-4} m^2} \rightarrow \Delta P = 34000 \times 6 \times 10^{-4} = 2 / 0.4 N$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در حالت اول که دو نیرو در جهت مخالف یکدیگر به جسم وارد می‌شوند، قضیه کار - انرژی جنبشی را

می‌نویسیم:

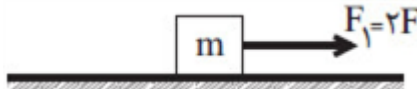
$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{F_1} + W_{F_2} = \frac{1}{2} m (v'' - v')$$



$$\Rightarrow 2Fd \cos 0^\circ + Fd \cos 180^\circ = \frac{1}{2} m (v'' - v') \Rightarrow Fd = \frac{1}{2} m (v'' - v') \quad (1)$$

در حالت دوم که نیروی $\vec{F}_2$ حذف می‌شود، فقط نیروی $\vec{F}_1$ بر جسم اثر می‌کند:

$$W'_t = \Delta K' \Rightarrow W'_{F_1} = \frac{1}{2} m ((v')^2 - v'')$$



$$\Rightarrow 2F \times 2d \cos 0^\circ = \frac{1}{2} m (16v'^2 - v'') \Rightarrow 4Fd = \frac{1}{2} m (16v'^2 - v'') \quad (2)$$

$$\xrightarrow{2, 1} \frac{4Fd}{Fd} = \frac{\frac{1}{2} m (16v'^2 - v'')}{\frac{1}{2} m (v'' - v')} \Rightarrow 4 = \frac{16v'^2 - v''}{v'' - v'} \Rightarrow 16v'^2 - v'' = 4v'' - 4v'$$

$$\Rightarrow 5v'' = 20v' \Rightarrow v'' = 4v' \Rightarrow v' = 2v$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم با اضافه کردن مایع ۲، سطح مایع ۱ در لوله سمت راست به اندازه x پایین رفته و در لوله چپ به اندازه y بالا می‌رود. چون تغییر حجم مایع ۱ در دو طرف یکسان است، داریم:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow A_1 y = A_2 x$$

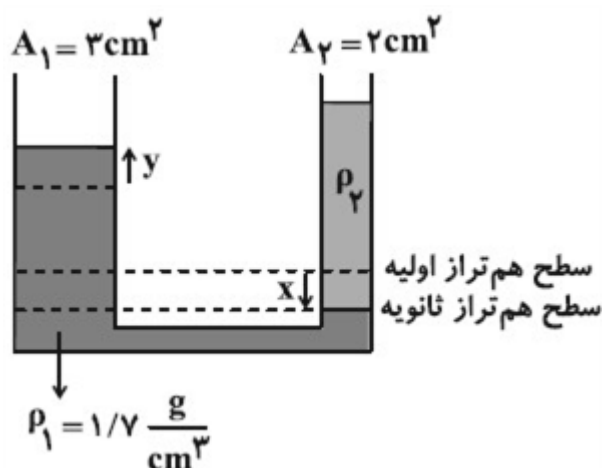
$$\xrightarrow{A_1 = 3 \text{ cm}^2, A_2 = 2 \text{ cm}^2} 3 \times y = 2 \times x$$

$$\Rightarrow x = 1.5 \text{ cm}$$

از طرفی تغییر فشار در دو شاخه برابر است و داریم:

$$\rho_1 g(x + y) = \frac{m_2 g}{A_2} \Rightarrow \rho_1 (x + y) = \frac{m_2}{A_2} \xrightarrow{\rho_1 = 1/7 \frac{g}{\text{cm}^3}, x+y=1.5 \text{ cm}} \frac{m_2}{A_2 = 2 \text{ cm}^2}$$

$$1/7 \times 1.5 = \frac{m_2}{2} \Rightarrow m_2 = 3.4 \text{ g}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه $K = \frac{1}{2}mv^2$ برای انرژی جنبشی، داریم:

۷۱

$$K_1 = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{\text{تندی جسم } \frac{m}{s} \text{ افزایش یابد}} K_2 = \frac{1}{2}m(v+4)^2$$

$$\xrightarrow{\text{تندی جسم } \frac{m}{s} \text{ کاهش یابد}} K_3 = \frac{1}{2}m(v-4)^2$$

$$K_1 = \sqrt{K_2 \times K_3} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \sqrt{\frac{1}{2}m(v+4)^2 \times \frac{1}{2}m(v-4)^2} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m(v+4)|v-4| \Rightarrow v^2 = (v+4)|v-4|$$

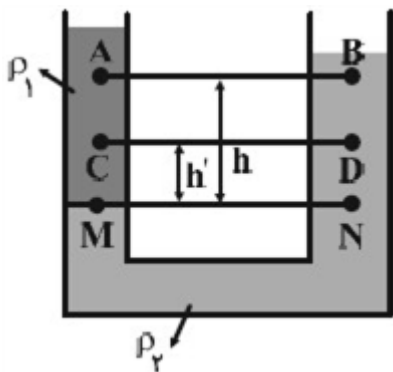
$$0 \leq v \leq 4 \frac{m}{s} : v^2 = -v^2 + 2v + 24 \Rightarrow v^2 - v - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (v-4)(v+3) = 0 \Rightarrow v = 4 \frac{m}{s}, v = -3 \frac{m}{s}$$

$$v > 4 \frac{m}{s} : v^2 = v^2 - 2v - 24 \Rightarrow v = -12 \frac{m}{s}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فشار در نقاط هم‌تراز یک مایع ساکن برابر است. بنابراین داریم:

۷۲



$$P_M = P_N$$

$$\Delta P_1 = P_A - P_B = (P_M - \rho_1 gh) - (P_N - \rho_2 gh)$$

$$= gh(\rho_2 - \rho_1)$$

$$\Delta P_2 = P_C - P_D = (P_M - \rho_1 gh') - (P_N - \rho_2 gh')$$

$$= gh'(\rho_2 - \rho_1)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P_1}{\Delta P_2} = \frac{gh(\rho_2 - \rho_1)}{gh'(\rho_2 - \rho_1)} \xrightarrow{h=8 \text{ cm}} \frac{\Delta P_1}{\Delta P_2} = \frac{8}{4} = 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل مقابل، در طول حرکت چترباز، دو نیروی وزن و مقاومت هوا به او وارد می‌شود. نیروی وزن در جهت جابه‌جایی و نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت جابه‌جایی است. با توجه به قضیه کار - انرژی جنبشی، کار کل انجام شده بر روی چترباز برابر با تغییر انرژی جنبشی آن است. بنابراین به صورت زیر جرم چترباز را پیدا می‌کنیم:

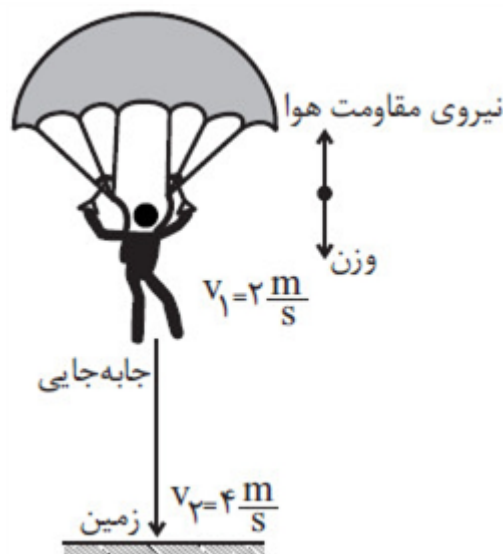
$$W_t = K_2 - K_1 \xrightarrow{W_t = W_{\text{وزن}} + W_{\text{مقاومت هوا}}} K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$W_{\text{وزن}} + W_{\text{مقاومت هوا}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \xrightarrow{W_{\text{وزن}} = mgh}$$

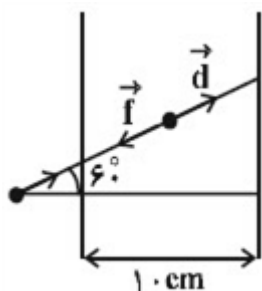
$$mgh + W_{\text{مقاومت هوا}} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \xrightarrow{h=800m, W_{\text{مقاومت هوا}} = -6 \times 10^5 J}$$

$$m \times 10 \times 800 - 6 \times 10^5 = \frac{m}{2} \times (16 - 4) \Rightarrow 8000m - 6m = 6 \times 10^5$$

$$\Rightarrow 7994m = 6 \times 10^5 \xrightarrow{7994 \approx 8000} 8000m = 6 \times 10^5 \Rightarrow m \approx 75 \text{ kg}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:



$$W_t = \Delta K \Rightarrow -fd = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$d = \frac{1.0}{\cos 60^\circ} = 2.0 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}$$

$$m = 20 \text{ g} = 20 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

$$-f \times 0.02 = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-3} ((0.5 \times 10^3)^2 - (1/5 - 10^3)^2)$$

$$\Rightarrow -0.02f = 10^{-2} \times (0.25 \times 10^6 - 2/25 \times 10^6) \Rightarrow -0.02f = 10^{-2} \times (-2 \times 10^4)$$

$$\Rightarrow -0.02f = -2 \times 10^2 \Rightarrow f = 10^4 \text{ N}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نیروی عمودی سطح، در هر لحظه بر جابه‌جایی جسم عمود است. بنابراین $\theta = 90^\circ$ بوده و خواهیم داشت:

$$W = Fd \cos \theta \xrightarrow{\theta=90^\circ} W = Fd \cos 90^\circ = Fd \times 0 = 0$$

داشت:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷۶

(آ) درست

(ب) درست، از نیتروژن برای این منظور استفاده می‌شود.

(پ) نادرست، کربن دی‌اکسید (CO_2) گازی سه اتمی است!

(ت) درست

(ث) نادرست، فراوان‌ترین گاز نجیب در هواکره، آرگون (Ar) می‌باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فقط مورد آ درست است. ۷۷

مورد آ: نقطه جوش گازهای اکسیژن، آرگون و نیتروژن برحسب درجه سلسیوس، به ترتیب برابر -183 ، -186 و -196 است.

بنابراین طی کاهش دما، ابتدا اکسیژن، سپس آرگون و در نهایت گاز نیتروژن به حالت مایع تبدیل می‌شود.

بررسی موارد نادرست:

مورد ب: در حالت ۳ آرگون به صورت گاز از هوای مایع خارج می‌شود. اما گاز اکسیژن همچنان به صورت مایع در ظرف وجود دارد

که در هواکره درصد حجمی بالایی (حدود ۲۰٪) دارد.

مورد پ: گاز خارج شده در حالت ۲ نیتروژن است ولی از هلیوم برای خنک کردن قطعات الکترونیکی در دستگاه‌های تصویربرداری

مانند MRI استفاده می‌شود.

مورد ت: تهیه اکسیژن صد در صد خالص در این فرایند دشوار است. زیرا نقطه جوش آن نزدیک به آرگون است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. یون H^+ در بین این یون‌ها وجود ندارد. این یون‌ها عبارتند از: N^+ ، O^+ ، O^+ ، H^+ و He^+ . ۷۸

بررسی عبارت‌های درست:

(۱) البته این مقدار از جایی به جای دیگر، از روزی به روز دیگر و حتی از ساعتی به ساعت دیگر تغییر می‌کند.

(۲) به دلیل تفاوت اندک نقطه جوش آرگون و اکسیژن، تهیه آرگون خالص در این روش مقدور نیست.

(۳) با دور شدن از سطح زمین فشار هوا کاهش می‌یابد و میزان این کاهش با افزایش ارتفاع کمتر است. نمودار تغییرات فشار هوا

برحسب ارتفاع به صورت منحنی می‌باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا هر دو دما را برحسب واحد کلوین می‌نویسیم: ۷۹

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = -53 + 273 = 220\text{K} \\ T_2 = 280\text{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta T = T_2 - T_1 = 280 - 220 = 60 \text{ کلوین}$$

$$\text{کلوین } 1/5\text{K} = \frac{\Delta T}{\text{ارتفاع لایه}} = \frac{60}{40} = \text{تغییرات دما به ازای یک کیلومتر افزایش ارتفاع}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تنها عبارت الف صحیح است. بررسی عبارت‌های نادرست: ۸۰

(ب) به عنوان مثال گاز آرگون واکنش‌پذیری ناچیزی دارد.

(پ) در آن دما هنوز نیتروژن به شکل گاز است.

(ت) سومین گاز نجیب فراوان هواکره هلیوم است که عنصری از دسته S جدول تناوبی است.

(ث) از هلیوم در کپسول غواصی استفاده می‌شود نه آرگون

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی موارد:

الف) در لایه تروپوسفر دما و فشار هوا هر دو به تدریج کاهش می‌یابند.

ب) در لایه تروپوسفر و لایه بالایی هواکره هر دو گاز O_2 و N_2 وجود دارند.

پ) دما در لایه تروپوسفر با افزایش ارتفاع به ازای هر کیلومتر، در حدود $6^\circ C$ افت می‌کند:

$$\theta_2 (^\circ C) = \theta_1 (^\circ C) - h \rightarrow h = \text{ارتفاع (km)}$$

$$\theta_1 = 300 - 273 = 27^\circ C \rightarrow \theta_2 (^\circ C) = 27 - 6(11/5) = -42^\circ C$$

ت) از گاز N_2 در صنعت سرماسازی برای انجماد مواد غذایی استفاده می‌شود (نه گاز هلیوم).

ث) گیاهان با جذب CO_2 و مواد نیتروژن‌دار از خاک، گاز O_2 وارد هواکره می‌کنند (نه جانوران).

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا، داریم:

$$t = -15 + \left(\frac{-150 - (-15)}{120 - 0} \right) h \Rightarrow t = -15 - 1/125 h \Rightarrow t = -15 - 1/125 \times 80 = -10.5^\circ C$$

$$T = 273 + \theta = 273 - 10.5 = 162.5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. موارد آ، پ و ت درست هستند.

با توجه به شکل‌های صورت سؤال و نقطه‌ی جوش گازهای O_2 ، N_2 و Ar می‌توان دریافت که گونه‌های A، B و C به ترتیب گازهای N_2 ، O_2 و Ar هستند. بررسی عبارت‌ها:

آ) همان گاز نیتروژن (N_2) است که از آن برای نگهداری نمونه‌های بیولوژیک در پزشکی استفاده می‌شود.

ب) همان گاز اکسیژن (O_2) است که از نظر درصد فراوانی در هواکره در رتبه‌ی دوم قرار دارد و اکسیژن گازی است دو اتمی نه تک‌اتمی.

پ) همان آرگون است که از آن در ساخت لامپ‌های رشته‌ای استفاده می‌شود.

ت) نقطه‌ی جوش هلیوم از A، B و C کمتر است.

ث) گازهای A و C به ترتیب N_2 و Ar هستند که ساختار الکترون - نقطه‌ای آن‌ها به صورت زیر می‌باشد:



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. هر چهار عبارت پیشنهادشده در ارتباط با گازهای نجیب درست هستند.

گازهای نجیب عبارتند از: He , Ne , Ar , Kr , Xe , Rn , Og

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. A گاز اکسیژن، B گاز آرگون و C گاز هلیوم است. بررسی همه‌ی موارد:

مورد آ: آرگون سومین گاز فراوان هواکره است. آرگون و هلیوم هر دو در جوشکاری به کار می‌روند.

مورد ب: گاز اکسیژن علاوه بر تروپوسفر در لایه‌های بالاتر هواکره نیز وجود دارد.

مورد پ: هلیوم گازی بی‌رنگ و بی‌بو بوده که مهم‌ترین کاربرد آن خنک کردن قطعات الکترونیکی دستگاه‌های تصویربرداری مانند MRI است.

مورد ت: گاز نیتروژن فراوان‌ترین گاز هواکره است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هلیوم از واکنش‌های هسته‌ای در ژرفای زمین تولید می‌شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. همه‌ی موارد صحیح‌اند.

باید توجه داشت که دما در تروپوسفر با افزایش ارتفاع کاهش می‌یابد اما در کل اتمسفر متغیر است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مقایسه درصد حجمی گازهای نجیب موجود در هواکره به صورت زیر است:

زنون > کریپتون > هلیم > نئون > آرگون

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در بازه الف رابطه $\theta = -2h + 14$ حاکم است. ضریب -2 از $\frac{-1^\circ C}{0.5 Km}$ به دست آمده است. در

ارتفاع ۱۱ کیلومتری دمای هوا $\theta_{11 Km} = -2 \times 11 + 14 = -8^\circ C$ است.

تا ارتفاع ۲۵ کیلومتری دمای هوا به

$\theta_{25 Km} = -2 \times 25 + 14 = -36^\circ C$ می‌رسد.

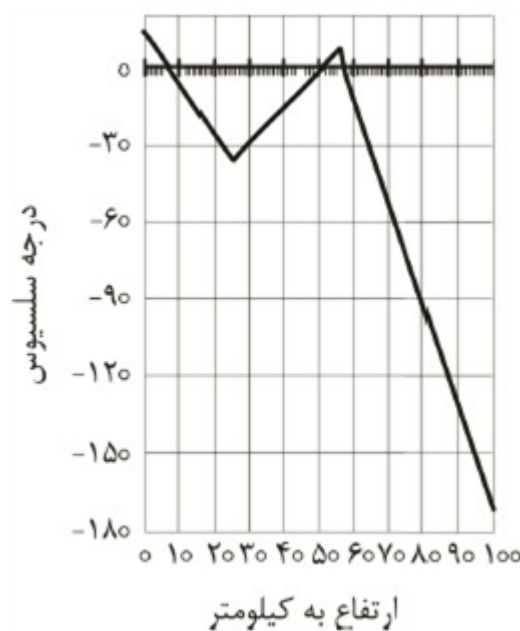
در بازه ب رابطه $\theta = 1/4 h - 36$ حاکم است.

در ارتفاع ۴۵ کیلومتری دمای هوا

$\theta_{45 Km} = 1/4 \times (45 - 25) - 36 = -8^\circ C$ است.

بنابراین اختلاف دما بین این دو ارتفاع صفر است.

اما دمای هوا را در ارتفاع ۹۵ کیلومتری محاسبه کنید.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در میان گازهای هواکره، واکنش‌های شیمیایی گوناگونی رخ می‌دهد که اغلب آن‌ها برای ساکنان زمین مناسب‌اند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر چهار عبارت درست هستند. بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در میان گازهای نجیب، مقدار گاز آرگون از سایر گازهای نجیب موجود در هواکره بیشتر است و $928/0$ درصد حجمی هوای پاک و خشک را گاز آرگون تشکیل می‌دهد.

عبارت دوم: نقطه جوش گازهای نیتروژن، آرگون و اکسیژن بر حسب درجه سلسیوس به ترتیب برابر $196^\circ C$ ، $186^\circ C$ و $183^\circ C$ است؛ بنابراین نقطه جوش آرگون از نیتروژن بالاتر و از اکسیژن پایین‌تر است.

عبارت سوم: گاز آرگون به دلیل واکنش‌پذیری بسیار ناچیزی که دارد به عنوان محیط بی‌اثر در جوشکاری، برش فلزها و همچنین در ساخت لامپ‌های رشته‌ای به کار می‌رود.

عبارت چهارم: گازهای آرگون و کربن مونوکسید هر دو بی‌رنگ و بی‌بو هستند، با این تفاوت که گاز آرگون غیرسمی ولی گاز کربن مونوکسید سمی است.

۹۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در همه‌ی لایه‌های هواکره با افزایش ارتفاع، فشار هوا کم می‌شود.
 CO_2 و H_2O در تروپوسفر وجود دارد و دمای هوا هم در لایه‌های مختلف هواکره یک در میان افزایشی و کاهش‌ی است.

۹۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. موارد (آ) و (پ) صحیح می‌باشند. بررسی موارد:
مورد آ) دومین گاز خارج شده از ستون تقطیر (آرگون) بی‌رنگ بوده و در ساخت لامپ‌های رشته‌ای به کار می‌رود.
مورد ب) هلیوم در هوای مایع وجود ندارد.
مورد پ) به دلیل نزدیک بودن نقطه‌ی جوش Ar و O_2 به یکدیگر، تهیه‌ی اکسیژن صددرصد خالص در فرایند تقطیر هوای مایع، دشوار است.
مورد ت) جرم مولی آخرین گاز خروجی از ستون تقطیر (گاز اکسیژن) 32 گرم بر مول کمتر از جرم مولی عنصر آهن می‌باشد. (عدد اتمی عنصر آهن 56 ست و نه جرم مولی آن)

۹۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا، انرژی گرمایی مولکول‌ها سبب می‌شود تا پیوسته آن‌ها در حال جنبش باشند و در سرتاسر هواکره توزیع شوند.

۹۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در دمای 50 کلوین داریم:

گاز	A	D	E	X
نقطه ذوب (K)	54	24	14	160
نقطه جوش (K)	85	27	21	165
حالت فیزیکی	جامد	گاز	گاز	جامد

۹۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا، یکی از کاربردهای آرگون ایجاد محیط بی‌اثر هنگام جوشکاری است.

۹۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

الف) نادرست است. ♦ با افزایش ارتفاع، دما و فشار کاهش می‌یابند.
ب) نادرست است. ♦ گازهایی مثل Cl_2 که زرد و NO_2 که قهوه‌ای هستند نامرئی نبوده و می‌توانیم آن‌ها را ببینیم اما اکثر گازها بی‌رنگ هستند و نمی‌توان آن‌ها را دید.
پ) درست است. ♦ این ۴ گاز در سه لایه‌ی اول هواکره حضور دارند.
ت) درست است. ♦ دمای جوش هلیوم $-269^\circ C$ و هیدروژن $-253^\circ C$ است که با تقطیر جزء به جزء هوای مایع نمی‌توان آن‌ها را به‌دست آورد.
ث) درست است. ♦ دمای استراتوسفر از $+7$ تا -55 درجه سانتی‌گراد تغییر می‌کند. پس در کل فقط عبارت‌های الف و ب نادرست هستند.

۹۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عبارت‌های الف و ت نادرست هستند. بررسی عبارت‌ها:
الف) گاز کربن دی‌اکسید موجود در هوای مایع در دمای $-78^\circ C$ از حالت گازی به حالت جامد تبدیل شده و از مخلوط گازها جدا می‌شود.

ب) در هوای پاک و خشک درصد حجمی سایر گازها به جز نیتروژن و اکسیژن کمتر از یک درصد است.
پ) در این فرایند ابتدا بخار آب و سپس کربن دی‌اکسید از مخلوط هوا جدا می‌شود.
ت) گاز مورد نظر آرگون است که در هوای پاک و خشک از نظر فراوانی در رتبه سوم قرار دارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های جدول زیر، گزینه‌ی (۱) پاسخ تست است.

۲/۴	۱/۸	۰/۶	۰/۳	۰	ارتفاع از سطح زمین (km)
۱۵/۴	۱۶/۶	۱۹/۴	۲۰/۱	۲۰/۹	فشار گاز اکسیژن ($\times 10^{-2}$ atm)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گاز جدا شده در حالت ۱ آرگون و در حالت ۲ نیتروژن است و مورد آ صحیح است.

(ب) از گاز هلیوم برای پر کردن بالون استفاده می‌شود.

(پ) حدود ۷۸٪ حجمی گازهای موجود در هوا را نیتروژن تشکیل می‌دهد.

(ت) میانگین بخار آب در هوا، حدود یک درصد است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تنها عبارت الف نادرست است.

(الف) فشار در هواکره با افزایش ارتفاع کاهش می‌یابد، پس تروپوسفر بیش‌ترین فشار را دارد.

نکته: فراوان‌ترین ترکیب موجود در هواکره H_2O است در حالی که فراوان‌ترین ترکیب موجود در هوای پاک و خشک کربن دی‌اکسید است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت‌های پ و ت درست هستند. بررسی عبارت‌ها:

(الف) اغلب گازها نامرئی بوده و به طور معمول وجود آن‌ها را در اطراف خود حس نمی‌کنیم.

(ب) تغییرات دما در هواکره دلیلی بر لایه‌ای بودن آن است (نه تغییرات فشار)

(پ) $273 + 12 = 285K$: دما در ابتدای تروپوسفر بر حسب کلوین

$-60K = -6 \times 10$: تغییرات دما تا ارتفاع ۱۰ کیلومتری

$$\frac{\text{تغییرات دما}}{\text{دمای اولیه}} \times 100 \Rightarrow \frac{-60}{285} \times 100 \simeq -21\%$$

(ت) با توجه به کاهش شیب نمودار با افزایش ارتفاع نتیجه می‌گیریم تغییرات فشار همانند فشار، با افزایش ارتفاع کاهش می‌یابد.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در فرایند تقطیر جز به جز هوای مایع با دمای $-200^\circ C$ ، ابتدا نیتروژن، سپس آرگون و در نهایت

اکسیژن از ظرف خارج می‌شود، پس می‌توان گفت عبارت‌های اول، دوم و چهارم، بررسی عبارت‌ها:

• گلوله‌های سیاه رنگ، نماینده اکسیژن است، زیرا آخرین عنصر باقی مانده است.

• هوای مایع با دمای $-200^\circ C$ ، حالت مایع دارند.

• گلوله‌های سفید رنگ، نماینده گاز آرگون (Ar) بوده و گلوله‌های خاکستری نماینده گاز نیتروژن (N_2) هستند.

• در حالت ۲، مولکول‌های N_2 به حالت گازی و مولکول‌های اکسیژن و اتم آرگون به حالت مایع هستند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در دمای $-148^{\circ}C$ آرگون و کریپتون حالت گازی دارند و از مخلوط جدا می‌شوند، پس فقط زنون به حالت مایع باقی می‌ماند.

