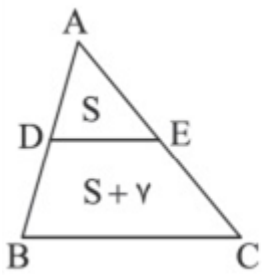


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث‌های ADE و ABC با نسبت $k = \frac{1}{4}$ متشابه‌اند، پس داریم:



$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{BCED} = 3S_{\triangle ADE}$$

$$\Rightarrow S + 7 = 3S \Rightarrow S = \frac{7}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = 2S + 7 = 14$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DE \Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle EDF \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BF}{DF} \\ BG \parallel AD \Rightarrow \triangle BGF \sim \triangle DAF \Rightarrow \frac{BG}{AD} = \frac{BF}{DF} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BG}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{12} = \frac{BG}{5} \Rightarrow BG = \frac{50}{12} = \frac{25}{6}$$

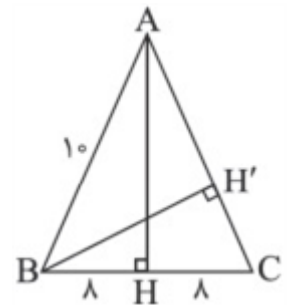
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ابتدا به کمک مساحت، طول ارتفاع وارد بر ساق را به دست می‌آوریم:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH = 6 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = 48$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BH' \times AC \Rightarrow 48 = \frac{1}{2} BH' \times 10 \Rightarrow BH' = 9.6$$

از طرفی قدرمطلق تفاضل فاصله‌ی نقطه‌ی دلخواه، خارج مثلث متساوی‌الساقین و در امتداد قاعده، از دو ساق برابر است با طول ارتفاع وارد بر ساق.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر تعداد نقاط مرزی و درونی یک چندضلعی شبکه‌ای به ترتیب برابر b و i باشد، آنگاه طبق

فرمول پیک، مساحت این چندضلعی برابر $S = \frac{b}{2} + i - 1$ است که همواره $b \geq 3$ و $i \geq 0$ است. بنابراین

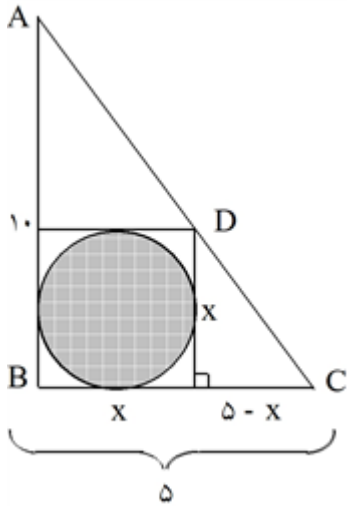
$$7/5 = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow \frac{b}{2} = 8/5 - i \Rightarrow b = 17 - 2i$$

داریم:

$$b \geq 3 \Rightarrow 17 - 2i \geq 3 \Rightarrow 2i \leq 14 \Rightarrow i \leq 7 \xrightarrow{i \geq 0} 0 \leq i \leq 7$$

بنابراین تعداد نقاط درونی این چندضلعی شبکه‌ای می‌تواند یکی از هشت مقدار متفاوت ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ را دارا باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل فرض کنید طول قطر دایره برابر x باشد. در این صورت طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC داریم:



$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{5-x}{5} \Rightarrow 5x = 50 - 10x$$

$$\Rightarrow 15x = 50 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

اگر شعاع دایره برابر R باشد، آنگاه داریم:

$$2R = \frac{10}{3} \Rightarrow R = \frac{5}{3} \Rightarrow \text{مساحت دایره} : S = \pi R^2 = \frac{25}{9} \pi$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال چهارضلعی BCFE مربع است. پس

$$\widehat{E}_1 = 90^\circ$$

از طرف دیگر هر زاویه داخلی شش‌ضلعی منتظم 120° است. بنابراین:

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 120^\circ \xrightarrow{\widehat{E}_1 = 90^\circ} \widehat{E}_2 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 = 60^\circ$$

چون $\widehat{B}_2 = 90^\circ$ و $\widehat{B}_1 = 60^\circ$ پس: $\widehat{B}_2 = 30^\circ$.

به همین ترتیب معلوم می‌شود $\widehat{C}_2 = 30^\circ$ پس مثلث ABC متساوی‌الساقین با زاویه‌ی رأس 120° است. بنابراین اگر ارتفاع AK وارد بر قاعده‌ی BC را رسم کنیم. AK میانه و نیمساز هم هست. در نتیجه:

$$BK = KC = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\widehat{A}_1 = \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AKC ضلع KC روبرو به زاویه‌ی 60° است. پس:

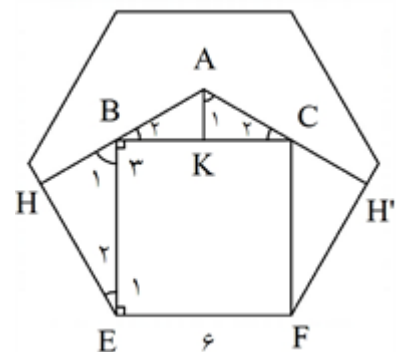
$$KC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

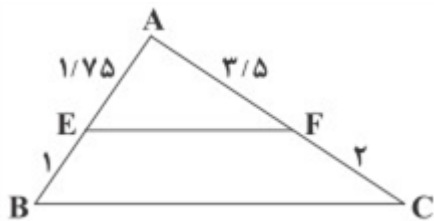
$$AK = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} (2\sqrt{3}) \Rightarrow AK = \sqrt{3}$$

و AK روبرو به زاویه‌ی 30° است. پس:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AK \times BC = \frac{1}{2} (\sqrt{3})(6) = 3\sqrt{3}$$

بنابراین:





$$\frac{AF}{FC} = \frac{3/5}{2} = \frac{3}{10} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = 1/75$$

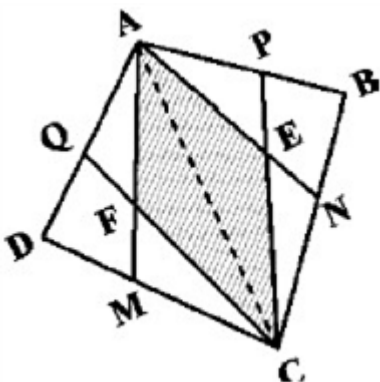
$$\frac{AE}{EB} = \frac{1/75}{1} = 1/75$$

بنابراین داریم:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} EF \parallel BC$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}EF = \hat{B} \\ \hat{B}EF + \hat{B} = 180^\circ \\ \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1/75}{2/75} = \frac{1}{2} \\ \frac{EB}{AF} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3} = \frac{2}{2} \end{array} \right.$$

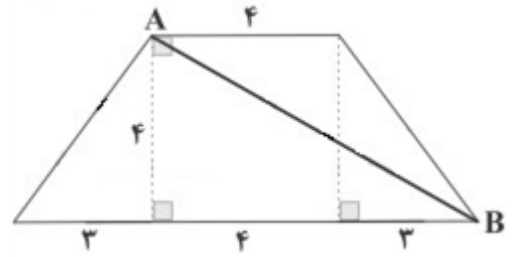
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قطر AC را رسم می‌کنیم. همان‌طور که واضح است نقاط E و F به ترتیب محل هم‌رسی میانه‌های مثلث‌های ABC و ACD هستند. می‌دانیم مساحت مثلثی که رئوس آن محل هم‌رسی میانه‌های مثلث و دو رأس از مثلث اصلی باشد، برابر با $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث اصلی است. بنابراین می‌توان نوشت:



$$\left. \begin{array}{l} S_{AFC} = \frac{1}{3} S_{ACD} \\ S_{AEC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{AECF} = \frac{1}{3} (S_{ACD} + S_{ABC})$$

$$\Rightarrow S_{AECF} = \frac{1}{3} S_{ABCD} = \frac{1}{3} \times 48 = 16$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که اگر وسط‌های یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین را به هم وصل کنیم چهارضلعی حاصل لوزی خواهد بود که محیط آن برابر است با مجموع دو قطر دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین. (ب) در دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین قطرها با هم برابرند.

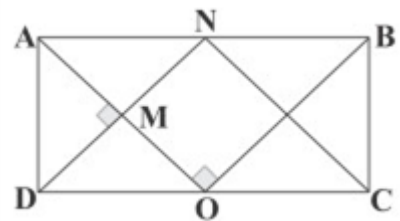


$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

قطرها برابرند

$$\text{مجموع دو قطر} = \text{محیط چهارضلعی حاصل} \rightarrow 2 \times 5 = 10$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم از تقاطع نیمسازهای داخلی مستطیل یک مربع حاصل می‌شود. حال طول ضلع مربع را به دست می‌آوریم. مثلث‌های AMD و AOB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین هستند.



$$AM = DM \Rightarrow AD^2 = AM^2 + DM^2 \xrightarrow{AD=b} b^2 = 2AM^2 \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{2} b$$

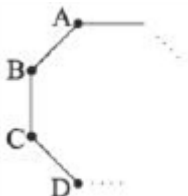
$$OA = OB \Rightarrow AB^2 = OB^2 + OA^2 \xrightarrow{AB=a} a^2 = 2OA^2 \Rightarrow OA = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\text{طول یک ضلع مربع} = OM = OA - AM = \frac{\sqrt{2}}{2} a - \frac{\sqrt{2}}{2} b = \frac{\sqrt{2}}{2} (a - b)$$

$$\text{مساحت مربع} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (a - b) \right)^2 = \frac{1}{2} (a - b)^2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

از هر رأس n ضلعی، $n - 3$ قطر می‌گذرد، بنابراین از سه رأس متوالی این n ضلعی $3(n - 3)$ قطر می‌گذرد، اما در بین قطرهای گذرنده از سه رأس متوالی A ، B و C ، یک قطر مشترک به نام AC وجود دارد، پس تعداد قطرهای گذرنده از سه رأس متوالی یک n ضلعی برابر با $3(n - 3) - 1$ است.

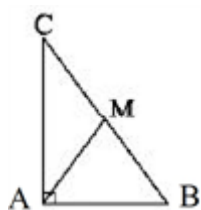


$$3(n - 3) - 1 = 50 \Rightarrow 3(n - 3) = 51 \Rightarrow n = 20$$

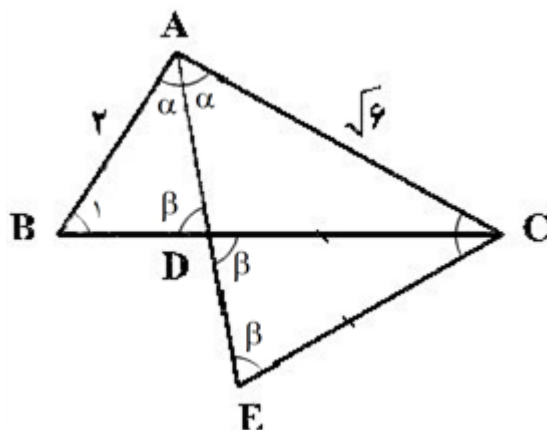
می‌دانیم مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب برابر 360° است. هر زاویه خارجی این 20 ضلعی منتظم برابر با

$$\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ \text{ است.}$$

اعداد ۵، ۱۲ و ۱۳ در فیثاغورس صدق می‌کنند، پس مثلث داده شده، قائم‌الزاویه است. با توجه به شکل، نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها رأس A و نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها، نقطه M (وسط وتر BC) است، بنابراین:



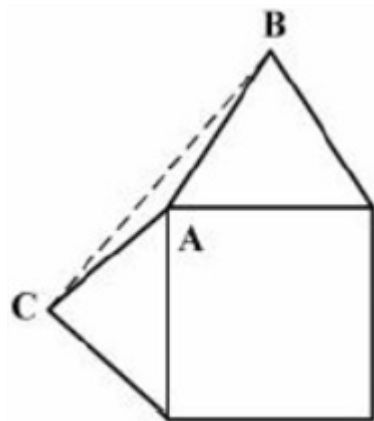
$$\text{جواب سوال} = AM = \frac{BC}{2} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$$



با توجه به شکل دو مثلث ABD و AEC متشابهند چون دو زاویه برابر دارند.

$$(\widehat{BAD} = \widehat{CAE} = \alpha \text{ و } \widehat{BDA} = \widehat{CEA} = \beta)$$

$$\triangle ABD \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{AEC}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$(3, m^r - m) = (3, 0) \Rightarrow m^r - m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{cases}$$

$$1) m = 0 \Rightarrow f = \{(3, 0), (0, 0), (1, -2), (0, 2)\} : \text{تابع نیست}$$

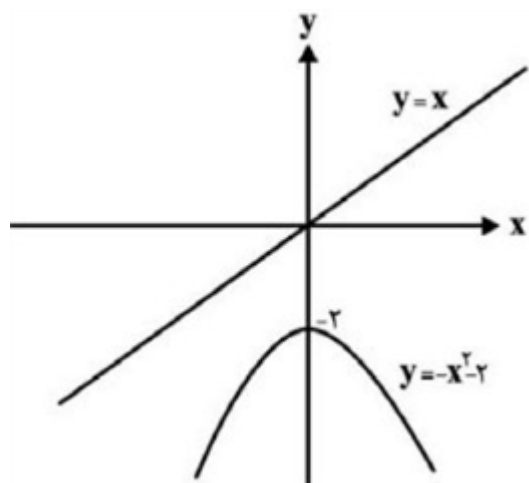
$$2) m = 1 \Rightarrow f = \{(3, 0), (-3, 1), (1, -2), (2, 2)\} : \text{تابع است}$$

$$3) m = -1 \Rightarrow f = \{(3, 0), (3, -1), (1, -2), (-2, 2)\} : \text{تابع نیست}$$

بنابراین یک مقدار قابل قبول برای m وجود دارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با رسم نمودار دو تابع $y = x$ و $y = -x^2 - 2$ متوجه می‌شویم که هیچ نقطه برخوردی ندارند.

تذکر: البته بدون رسم هم با مساوی قرار دادن ضابطه دو تابع، می‌توانیم نقطه یا نقاط تلاقی احتمالی را به دست آوریم:



$$-x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4(1)(2) = -7 < 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تابع همانی، تابعی است که به ازای هر ورودی همان عدد را خروجی می‌دهد، در

نتیجه ضابطه آن به صورت $f(x) = x$ است، پس اگر f همانی باشد و $f(3-k) = 9 + 2k$ داریم:

$$3-k = 9 + 2k \Rightarrow 3k = -6 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow f(9+2k) = f(9-4) = f(5) = 5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$1 + |y| \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$|y| \in \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 14, 29\} \Rightarrow y \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 9, \pm 14, \pm 29\}$$

پس ۷ عضو باید حذف شود تا به ازای هر x فقط یک y وجود داشته باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید مؤلفه‌های دوم با مؤلفه‌های اول برابر باشد. پس:

$$\begin{cases} 2n^2 - 3n = 2 \Rightarrow 2n^2 - 3n - 2 = 0 \Rightarrow (n-2)(2n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=2 \Rightarrow m=-4 \\ n=-\frac{1}{2} \Rightarrow m=3/5 \end{cases} \\ m+3n=2 \\ m=-t^2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{از طرفی: } \frac{m+n+t}{3} = 0 \Rightarrow t = -m-n \Rightarrow t = -(-4)-2 = 4-2=2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون $f(x)$ همانی است. پس:

طول و عرض هر نقطه روی نیم ساز ربع دوم و چهارم قرینه یکدیگرند، پس:

$$3x^2 - 17x + 10 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 17x + 10 = 0$$

$$\Delta = 289 - 4(3)(10) = 289 - 120 = 169 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{17+13}{6} = 5, x_2 = \frac{17-13}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow 5 - \frac{2}{3} = \frac{15-2}{3} = \frac{13}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله‌ی قسمتی از تابع که از نقاط $\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۴ \\ -۳ \end{bmatrix}$ می‌گذرد (در واقع معادله‌ی خطی که

از این دو نقطه می‌گذرد را می‌نویسیم و بعد محدوده‌ی x آنها را مشخص می‌کنیم).

$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} -۳ = -۴a + b \\ -۱ = -۲a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow y = x + ۱, -۴ \leq x < -۲$$

به همین ترتیب معادله‌ی قسمت دیگر نمودار را هم می‌نویسیم (خطی که از نقاط $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ می‌گذرد).

$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} ۱ = a + b \\ ۵ = ۳a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = -۱ \end{cases} \Rightarrow y = ۲x - ۱, ۱ \leq x < ۳$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + ۱ & -۴ \leq x < -۲ \\ ۲x - ۱ & ۱ \leq x < ۳ \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی تابع خطی به صورت $y = ax + b$ است.

$$f(۲) = -۳ \Rightarrow \begin{cases} -۳ = ۲a + b \\ f(-۱) = ۱۵ \Rightarrow \begin{cases} ۱۵ = -a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۶ \\ b = ۹ \end{cases} \Rightarrow f(x) = -۶x + ۹$$

$$\Rightarrow f(-۳) = -۶ \times (-۳) + ۹ = ۱۸ + ۹ = ۲۷$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در یک رابطه، اگر مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب برابر باشند، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز

$$b = -۲$$

برابر باشد تا رابطه تابع باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} (۶, a^۲ - ۲) \in f \\ (۶, ۷) \in f \end{cases} \Rightarrow a^۲ - ۲ = ۷ \Rightarrow a^۲ = ۹ \Rightarrow a = \pm ۳$$

با جایگذاری $a = ۳$ و $a = -۳$ داریم:

$$a = ۳ \rightarrow f = \{(۳, ۵), (۶, ۷), (۳, -۲)\} \quad \text{تابع نیست:}$$

$$a = -۳ \rightarrow f = \{(-۳, ۵), (۶, ۷), (۳, -۲)\} \quad \text{تابع است:}$$

$$\frac{f(-۳) + f(۳)}{f(۶)} = \frac{۵ + (-۲)}{۷} = \frac{۳}{۷} \quad \text{بنابراین:}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مورد الف از عضو c پیکانی خارج نشده است در حالی که در نمودار پیکانی تابع باید از هر

عضو مجموعه‌ی اول دقیقاً یک پیکان خارج شود، پس تابع نیست.

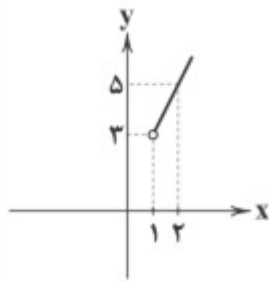
در مورد ب برای هر x (مؤلفه‌ی اول) یک y (مؤلفه‌ی دوم) منحصر به فرد وجود دارد و از آنجایی که $\sqrt[۴]{۶۴} = ۴$ است یکی از

زوج‌مرتبه‌های $(-۳, ۴)$ حذف خواهد شد، پس تابع است.

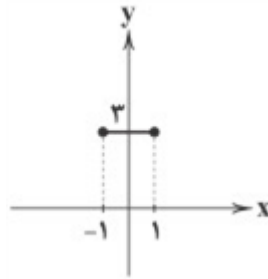
در مورد ج، هر خط موازی محور y ها، نمودار را در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع است.

در مورد د نیز برای هر x ، یک y منحصر به فرد وجود دارد، پس تابع است.

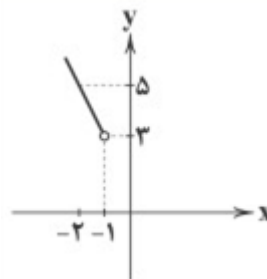
$$y = 2x + 1, x > 1 \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 3 & 5 \end{array}$$



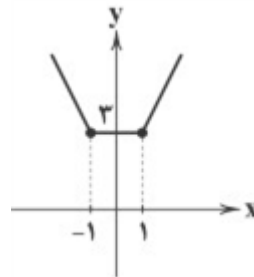
$$y = 3, -1 \leq x \leq 1$$



$$y = 1 - 2x, x < -1 \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & -2 \\ \hline y & 3 & 5 \end{array}$$



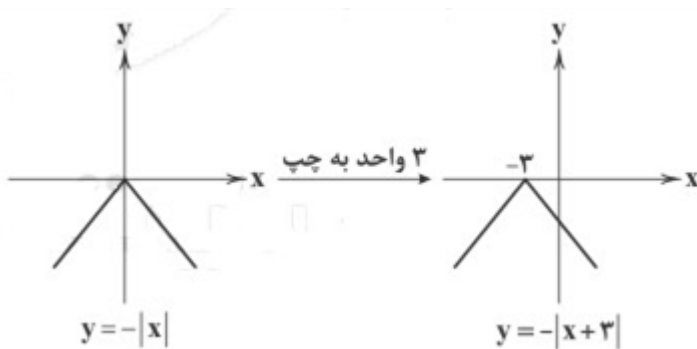
است.



و در نهایت شکل تابع $f(x)$ به صورت

$$f(x) = -3 \left| \frac{1}{3}x + 1 \right| = -3 \left(\frac{1}{3}x + 1 \right) = -|x + 3|$$

حال نمودار $y = -|x + 3|$ را به آسانی رسم می‌کنیم:



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $x = \frac{7}{4}$ در دامنه $x \geq 0$ قرار دارد، پس $f\left(\frac{7}{4}\right)$ را با استفاده از ضابطه اول به دست

می‌آوریم:

$$f\left(\frac{7}{4}\right) = \left[\frac{7}{4} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{9}{4}\right] = [2/25] = 2$$

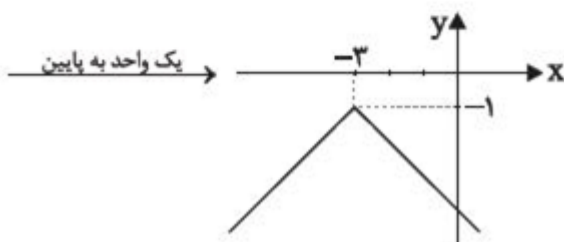
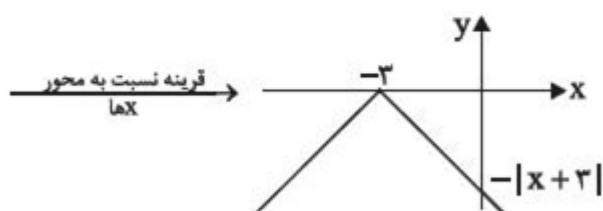
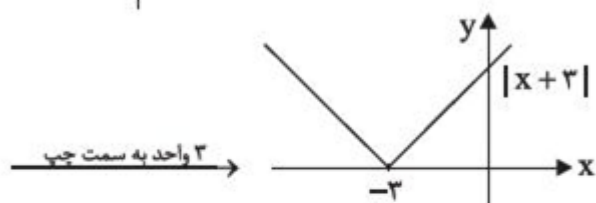
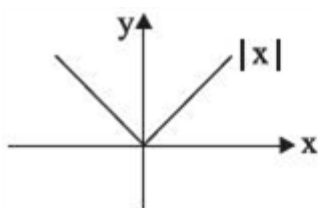
$x = -\frac{1}{4}$ در دامنه $x < 0$ قرار دارد، پس $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ را با استفاده از ضابطه دوم به دست می‌آوریم.

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left|-\frac{1}{4} - 1\right| = \left|-\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4}$$

$$f\left(\frac{7}{4}\right) + f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4} = 3/25$$

حاصل عبارت موردنظر را تعیین می‌کنیم:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مختصات محل برخورد عرض‌ها: $(0, 1)$

مختصات محل برخورد با محور طول‌ها: $(-1, 0)$

معادله خط گذرنده از نقاط $A(0, 1)$ و $B(-1, 0)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{y - 1}{x - 0} = \frac{0 - 1}{-1 - 0} \Rightarrow y = x + 1$$

۳۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برد تابع ثابت تک‌عضوی است، پس:

$$2a - 3 = 3 - a \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

با جایگذاری مقدار a در مجموعه‌ی برد تابع f ، این مجموعه به صوت $\{1\}$ درمی‌آید، بنابراین $f(5) = 1$ است.

۳۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(1, a), (1, 3a - 1) \in f \Rightarrow a = 3a - 1 \Rightarrow a - 3a = -1 \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f = \{(1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 3), (\frac{1}{2}, b)\} \xrightarrow{\text{تابع } f} b = 3$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

۳۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به ضابطه‌ی تابع خطی داریم:

$$f(x) = mx + n$$

$$f(1) = f(3) - 1 \Rightarrow m + n = 3m + n - 1 \Rightarrow 2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = 4 \Rightarrow 2m + n = 4 \xrightarrow{m=\frac{1}{2}} 1 + n = 4 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow f(4) = 5$$

۳۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون g تابع همانی است، پس $g(-1) = -1$ و $g(2) = 2$ است، لذا داریم:

$$\frac{2f(3)}{5g(-1)} = 1 \Rightarrow \frac{2f(3)}{-5} = 1 \Rightarrow f(3) = -\frac{5}{2}$$

$$f(2) \times g(2) = \frac{-5}{2} \times 2 = -5$$

 f تابعی ثابت است، پس $f(3) = f(2) = -\frac{5}{2}$ و لذا داریم:

۳۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به ازای $x = 1$ ، باید مقدار دو ضابطه با هم برابر باشد:

$$a(1) + 2 = -3 \Rightarrow a = -5$$

$$f(3) \xrightarrow{3 \geq 1} -5(3) + 2 = -13$$

$$\Rightarrow -13 - (-3) = -10$$

حال خواسته شده برابر است با:

$$f(-x) \xrightarrow{-x \leq 0} -3$$

۳۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که تابع f همانی و g ثابت می‌باشد، داریم:

$$f(x) = x, g(x) = k$$

$$g(m) - f(2m + 1) = 3 \Rightarrow k - 2m - 1 = 3 \Rightarrow k - 2m = 4 \quad (1)$$

آن‌گاه:

$$f(m) = g(4) - 3 \Rightarrow m = k - 3 \Rightarrow m - k = -3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{1, 2} \begin{cases} k - 2m = 4 \\ m - k = -3 \end{cases} \Rightarrow m = -1, k = 2$$

$$f(g(-1)) = f(2) = 2 \quad \text{در نتیجه داریم:}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون $f(x)$ درجه‌ی اول است، پس ضریب x^2 باید صفر شود:

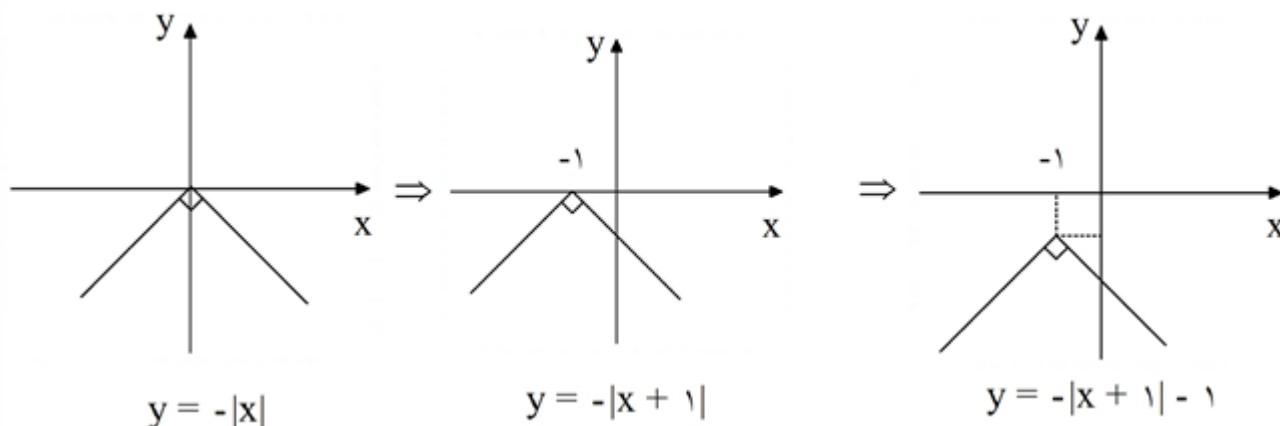
$$m - 2n = 0 \Rightarrow m = 2n$$

$$f(3) = g(3) \Rightarrow 6n - mn - 1 = m + n \xrightarrow{m=2n} 6n - 2n^2 - 1 = 2n + n$$

$$\Rightarrow -2n^2 + 3n - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \Rightarrow m = 2 \text{ قابل قبول} \\ n = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 1 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z} \text{ غیرقابل قبول} \end{cases}$$

$$R_g = \{3\} \quad \text{پس } g(x) = 3 \text{ و برد تابع } g:$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع $y = -|x|$ را در راستای افقی یک واحد به سمت چپ و سپس در راستای قائم یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = k(x - \alpha)(x - 2\alpha)$$

$$f\left(\frac{3\alpha}{2}\right) = 2 \Rightarrow k\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\left(-\frac{1}{2}\alpha\right) = 2 \Rightarrow k\alpha^2 = -8$$

$$f(0) = 2k\alpha^2 = -16$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی هر تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ است.

$$f(5) = 2f(-1) \Rightarrow 5a + b = 2(-a + b) + 1 \Rightarrow 5a + b = -2a + 2b + 1 \Rightarrow 7a - b = 1 \quad (I)$$

$$f(2) = 8 \Rightarrow 2a + b = 8 \quad (II) \xrightarrow{(I), (II)} \begin{cases} 7a - b = 1 \\ 2a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1$$

$$2a + b = 8 \Rightarrow 2 + b = 8 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow f(x) = x + 6 \Rightarrow \frac{f(3)}{f(-9)} = \frac{9}{-3} = -3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید زیر رادیکال نامنفی باشد، پس:

$$xf(-x) \geq 0 \Rightarrow -xf(-x) \leq 0$$

با تغییر متغیر $-x = t$ باید رابطه‌ی $tf(t) \leq 0$ همواره برقرار باشد، پس باید تابعی را انتخاب کنیم که نقاط آن در

رابطه‌ی $xy \leq 0$ صدق کنند، یعنی نقاط در ربع دوم یا چهارم واقع باشند که نمودار گزینه‌ی «۴» چنین است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا تغییر حجم مایع و ظرف را به دست می‌آوریم:

$$V_{\text{ظرف}} = 2L = 2 \times 10^3 \text{ cm}^3, \Delta\theta = 60^\circ \text{C}$$

$$\Delta V_{\text{ظرف}} = 3\alpha V_{\text{ظرف}} \Delta\theta = (3\alpha)(2 \times 10^3)(60) = 36 \times 10^4 \alpha$$

$$V_{\text{مایع}} = \frac{8}{10} V_{\text{ظرف}} = \frac{8}{10} \times 2 \times 10^3 \text{ cm}^3, \beta = 6 \times 10^{-3} \frac{1}{^\circ \text{C}}$$

$$\Delta V_{\text{مایع}} = \beta V_{\text{مایع}} \Delta\theta = (6 \times 10^{-3}) \left(\frac{8}{10} \times 2 \times 10^3 \right) (60) = 576 \text{ cm}^3$$

با توجه به این که 32 cm^3 مایع سرریز شده است، می‌توان نوشت:

حجم مایع سرریز شده + حجم قسمت خالی ظرف + افزایش حجم ظرف = افزایش حجم مایع

$$\begin{aligned} \Delta V_{\text{مایع}} &= \Delta V_{\text{ظرف}} + V_{\text{خالی}} + 32 \xrightarrow{V_{\text{خالی}} = \frac{2}{10} V_{\text{ظرف}} = \frac{2}{10} \times 2 \times 10^3 \text{ cm}^3} \\ \Rightarrow 576 &= (36 \times 10^4 \alpha) + \left(\frac{2}{10} \times 2 \times 10^3 \right) + 32 \Rightarrow 576 = 36 \times 10^4 \alpha + 432 \\ \Rightarrow 144 &= 36 \times 10^4 \alpha \Rightarrow \alpha = 4 \times 10^{-4} \frac{1}{K} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه انبساط طولی ($L_2 = L_1(1 + \alpha\Delta\theta)$) شیب خط نمودار $L - \Delta\theta$ برابر

$L_1 \alpha$ است، بنابراین برای میله A داریم:

$$A \text{ نمودار} \text{ شیب خط نمودار} = L_{1A} \alpha_A = 20 \times 2 / 4 \times 10^{-5} = 48 \times 10^{-5}$$

با توجه به این که خطوط موازی هستند، بنابراین دارای شیب برابر هستند. در نتیجه:

$$B \text{ نمودار} \text{ شیب خط نمودار} = L_{1B} \alpha_B \Rightarrow 48 \times 10^{-5} = 40 \times \alpha_B \Rightarrow \alpha_B = \frac{48}{40} \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \alpha_B = 1/2 \times 10^{-5} \frac{1}{K}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. پایین‌ترین نقطه مسیر حرکت آونگ، یعنی حالت ۲ را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی در نظر می‌گیریم.

طبق قانون پایستگی انرژی مکانیکی، برای نقاط ۱ و ۳ داریم:

$$E_1 = E_3 \xrightarrow{K_1=K_3=0} U_1 = U_3$$

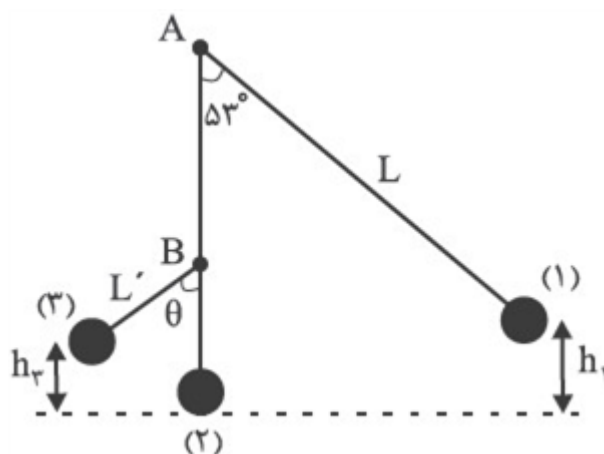
$$\Rightarrow mgh_1 = mgh_3 \Rightarrow h_1 = h_3$$

$$\Rightarrow h_3 = L(1 - \cos 53^\circ) = 80 \text{ cm}$$

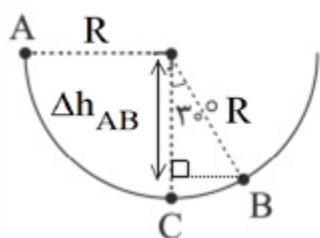
از طرفی می‌دانیم که ارتفاع آونگ در حالت ۳ براساس هندسه شکل، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$h_3 = L'(1 - \cos \theta) \xrightarrow{L'=L-40 \text{ (cm)}} 80 = (200 - 40)(1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\Delta h_{AB} = R \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

$$\Delta h_{BC} = R - \Delta h_{AB} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) R$$

$$W_g = -mg\Delta h \Rightarrow \begin{cases} W_{gAB} = +mg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right) \\ W_{gBC} = +mg\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{W_{AB}}{W_{BC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 3$$

بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست، اگر جسمی در خلأ سقوط کند، کاهش انرژی پتانسیل گرانشی آن از نظر مقدار با افزایش انرژی جنبشی آن برابر است.

ب) درست، با توجه به قضیه‌ی کار - انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} W_t > 0 \\ W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow \Delta K > 0 \Rightarrow v_2 > v_1 \end{cases}$$

ج) درست، در هر سامانه، انرژی ورودی به انرژی تلف‌شده و انرژی خروجی (مفید) تبدیل می‌شود.

د) نادرست، هنگام اثر نیروهای اصطکاک و مقاومت هوا بر جسم و انجام کار منفی توسط آنها، بخشی از انرژی مکانیکی جسم به انرژی درونی جسم، سطح مسیر و هوا تبدیل می‌شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به قانون پایستگی انرژی داریم:

$$W_T = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$W_f = \frac{1}{2}m(16 - 20) = -2m \Rightarrow \text{رفت } W_f = -m$$

$$W_f = E_2 - E_1 \Rightarrow -m = m \times 10 \times h - \frac{1}{2}m \times 20 \Rightarrow 9 = 10h \Rightarrow h = 0.9m$$

$$\Rightarrow d = 2h = 1.8m \xrightarrow{\text{مسافت}} L = 2 \times 1.8 = 3.6m$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{گزینه ۱: } W_{mg} = -mgh = -10 \times 10 \times 1 = -100J$$

گزینه ۲: کار لازم برای غلبه بر نیروی وزن، قرینه کار نیروی وزن است.

$$W' = -W = -(-100) = 100J$$

$$\Delta K = K_2 - K_1 \xrightarrow[v_2=0]{v_1=0} \Delta K = 0: \text{گزینه ۳}$$

گزینه ۴: چون ΔK صفر است، پس طبق قضیه کار - انرژی جنبشی $W_t = \Delta K$ ، کار کل صفر است.

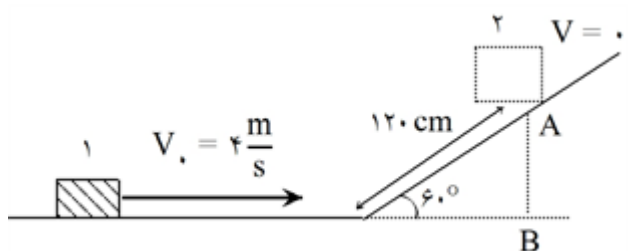
$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{حالت اول: } U_2 + 0.5K_1 = K_1$$

$$420m = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow V^2 = \frac{420 \times 20}{3}$$

$$\text{حالت دوم } U_2 = K_1 \Rightarrow m \times 10h = \frac{1}{2}m \times \frac{420 \times 20}{3} \Rightarrow h = 140$$



$$AB = 120 \times \cos 60 = 60 \text{ cm}$$

$$E_2 - E_1 = W_{f_k} \Rightarrow (U_2 + \cancel{k_2}) - (U_1 + \cancel{k_1}) = W_{f_k} \Rightarrow U_2 - k_1 = W_{f_k}$$

$$\Rightarrow \underbrace{m \times 10 \times \frac{6}{10}}_{6m} - \underbrace{\frac{1}{2}m(16)}_{4m} = W_{f_k} \Rightarrow -2m = W_{f_k}$$

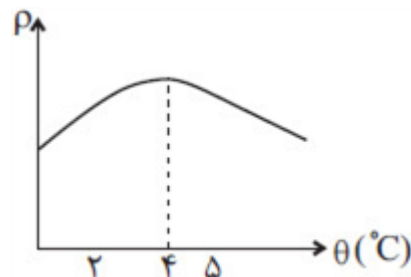
$$\therefore \frac{W_{f_k}}{k_1} \times 100 = \frac{-2m}{4m} \times 100 = -50\% \text{ کاهش}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به کمک رابطه گرما، تغییرات دمای ۲ kg آب را محاسبه می‌کنیم، داریم:

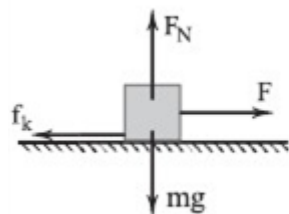
$$Q = mc\Delta\theta \xrightarrow[m=2 \text{ kg}, c=4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}]{Q=16/8 \text{ kJ}=16800 \text{ J}} 16800 = 2 \times 4200 \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = 2^\circ\text{C}$$

$$\Rightarrow 2 = \theta_2 - 3 \Rightarrow \theta_2 = 5^\circ\text{C}$$

دمای آب موجود از 3°C به 5°C می‌رسد، چون در دمای 4°C حجم آب کمترین مقدار را دارد، پس چگالی آب در 4°C بیشترین مقدار را خواهد داشت. در نتیجه چگالی ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$W_T = \Delta k \Rightarrow W_F = K_2 - \cancel{K_1}$$

$$W_F = \frac{1}{2} \times 2 \times 4^2 \Rightarrow W_F = 16 \text{ J}$$

$$P = \frac{W_F}{t} = \frac{16}{2} = 8 \text{ W}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

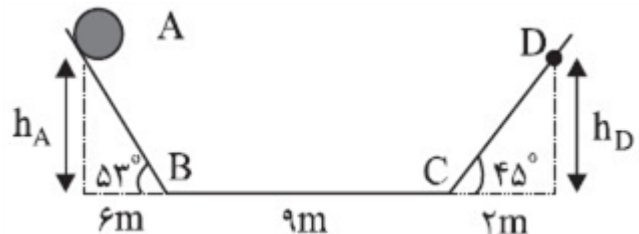
$$\Delta V = \Delta V_{\text{مابع}} - \Delta V_{\text{ظرف}} = V \cdot (\beta - \alpha) \Delta\theta$$

$$\Delta V = 2000 \cdot (4 \times 10^{-4} - 6 \times 10^{-5}) \times 50 = 40 - 6 = 34 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned}\Delta V' &= \Delta V_g - \Delta V_{Al} = V \cdot (\beta_g - \alpha_{Al}) \Delta \theta \\ &= 1/2 \times 10^3 (5 \times 10^{-4} - 0/69 \times 10^{-4}) \times 10 \\ \Delta V' &= 1/2 (5 - 0/69) = 1/2 \times 4/31 = 5/172 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هرگاه به یک فلز گرما بدهیم، با افزایش دما، تمام ابعاد آن افزایش می‌یابد. ۵۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۵



طبق قانون پایستگی انرژی مکانیکی و با در نظر گرفتن سطح افقی به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی، داریم:

$$\begin{aligned}W_f &= \Delta E \Rightarrow -f_k d = E_D - E_A \Rightarrow -f_k d = \left(\frac{1}{2} m v_D^2 + m g h_D \right) - m g h_A \\ \Rightarrow -4 \times 9 &= \left(\frac{1}{2} m v_D^2 + m g (tg 45^\circ \times 2) \right) - m g (tg 53^\circ \times 6) \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \times 2 \times v_D^2 + 2 \times 10 \times (1 \times 2) \right) &- 2 \times 10 \times \left(\frac{4}{3} \times 6 \right) = -36 \Rightarrow v_D^2 = 84 \Rightarrow v_D = 2\sqrt{21} \frac{m}{s}\end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه کار نیروی ثابت ($W = Fd \cos \theta$), برای ارباهای نیروی وارده F و ۵۶

$$W_1 = Fd \cos \theta_1 \quad \text{جابه‌جایی d با هم برابر است، پس:}$$

$$W_2 = Fd \cos \theta_2$$

و می‌دانیم هر چه θ کوچکتر باشد، $\cos \theta$ بزرگتر می‌شود، پس:

$$\theta_1 > \theta_2 \Rightarrow \cos \theta_1 < \cos \theta_2 \Rightarrow W_1 < W_2$$

$$W_2 > W_1 \Rightarrow \Delta K_2 > \Delta K_1 \quad \text{با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:}$$

تندی اولیه ارباه در هر دو حالت صفر می‌باشد، پس:

$$K_2 > K_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 > \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow v_2^2 > v_1^2 \Rightarrow v_2 > v_1$$

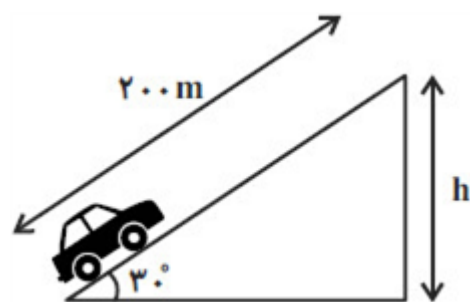
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل زیر، با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_{\text{موتور}} = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow -mgh + W_{\text{موتور}} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow W_{\text{موتور}}$$

$$= \frac{1}{2}(2 \times 10^3)(25^2 - 5^2) + (2 \times 10^3)(10)(200 \times \sin 30^\circ)$$

$$\Rightarrow W_{\text{موتور}} = 6 \times 10^5 + 2 \times 10^6 = 2.6 \times 10^6 \text{ J} = 2.6 \times 10^3 \text{ kJ}$$



$$P_{\text{خروجی}} = \frac{2.6 \times 10^6}{13} = 0.2 \times 10^3 \text{ kW}$$

$$\text{بازده} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{کل}}} \times 100 = \frac{0.2 \times 10^3}{250} \times 100 = 80\%$$

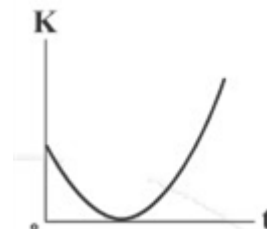
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. توان خروج پمپ در دو حالت ثابت و برابر است:

$$P_{\text{مفید}} = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} \xrightarrow{\frac{h}{t}=v} P_{\text{مفید}} = mgv \Rightarrow (mgv)_{\text{آب}} = (mgv)_{\text{روغن}} \xrightarrow{m=\rho V}$$

$$100 \times 20 = \rho_{\text{روغن}} V_{\text{روغن}} \times v_{\text{روغن}} \xrightarrow{\rho_{\text{روغن}} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, V = 50 \times 10^{-3} \text{ m}^3} v_{\text{روغن}} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به این که $F_1 > F_2$ است، برآیند نیروها به سمت چپ است و حرکت متحرک ابتدا

کندشونده بوده، سپس تغییر جهت داده و حرکت آن تندشونده می‌شود. با توجه به این موضوع، انرژی جنبشی متحرک ابتدا کاهش یافته و به صفر می‌رسد و سپس افزایش می‌یابد.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ضریب انبساط طولی میله را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\Delta L}{L_1} \times 100 = 0.1 \Rightarrow \frac{L_1 \alpha \Delta \theta}{L_1} \times 100 = 0.1 \Rightarrow \alpha \times 50 = 10^{-3} \Rightarrow \alpha = \frac{10^{-3}}{50} \text{ K}^{-1}$$

برای محاسبه‌ی نسبت $\frac{A_2}{A_1}$ برای صفحه‌ای هم‌جنس با میله می‌توان نوشت:

$$A_2 = A_1 (1 + \alpha \Delta \theta) \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = 1 + 2 \times \frac{10^{-3}}{50} \times 100 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = 1.004$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا رابطه‌ی بین θ و t را به دست می‌آوریم. برای این کار از رابطه‌ی توان استفاده می‌کنیم.

$$P = \frac{Q}{t} \Rightarrow Q = P \cdot t \Rightarrow mc\Delta\theta = P \cdot t \Rightarrow \Delta\theta = \frac{P \cdot t}{mc}$$

شیب نمودار $\theta - t$ برابر $\frac{P}{mc}$ می‌باشد. توان در بازه‌ی زمانی صفر تا $\frac{t}{3}$ را P_1 و در بازه‌ی زمانی $t/3$ تا t را P_2 در نظر

می‌گیریم، بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\text{شیب قسمت دوم}}{\text{شیب قسمت اول}} = \frac{\frac{200-4}{t-\frac{t}{3}}}{\frac{40-0}{\frac{t}{3}-0}} = \frac{\frac{196}{\frac{2t}{3}}}{\frac{40}{\frac{t}{3}}} = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی کار و انرژی جنبشی داریم:

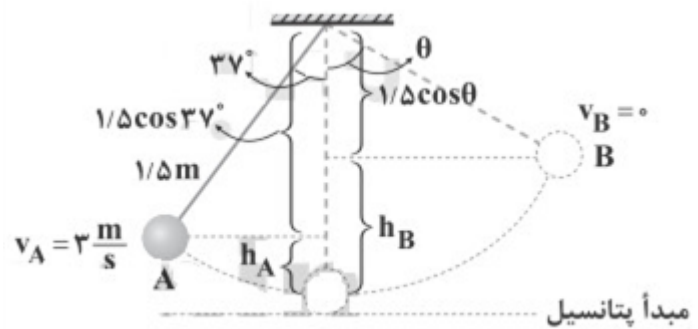
$$W_t = \Delta K \xrightarrow{W_t = W_{F_1} + W_{F_2}, M = 1/5 \text{ kg}, W_{F_1} = F_1 d \cos(\cdot), F_1 = 20 \text{ N}} \Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, v_2 = 8 \frac{m}{s}, v_1 = 4 \frac{m}{s}, d = 20 \text{ m}$$

$$W_{F_1} + W_{F_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow F_2 d + W_{F_1} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Rightarrow 20 \times 20 + W_{F_2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} (8^2 - 4^2) \Rightarrow W_{F_2} = 36 - 400 = -364 \text{ J}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، هنگامی که گلوله‌ی آونگ به بیشترین انحراف از وضع قائم می‌رسد، تندی آن

صفر است. در این حالت با نوشتن پایستگی انرژی مکانیکی داریم:



$$h_A = l - l \cos 37^\circ = l - l \times 0.8 = 0.2l$$

$$h_B = l - l \cos \theta = l(1 - \cos \theta)$$

$$E_A = E_B \Rightarrow U_A + K_A = U_B + K_B \Rightarrow mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B$$

$$\Rightarrow 10 \times 0.2 + \frac{1}{2} \times 3^2 = 10 \times l(1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow 7/5 = 10(1 - \cos \theta) \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. این سؤال را در گام‌های زیر حل می‌کنیم:

گام اول: محاسبه‌ی شتاب گلوله:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-10}{10 \times 10^{-3}} = -1000 \frac{m}{s^2}$$

قانون دوم نیوتون :

گام دوم: محاسبه‌ی تندى حرکت گلوله هنگام خروج از تنه‌ی درخت:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \Rightarrow -1000 = \frac{v_2 - 200}{20 \times 10^{-3}}$$

$$\Rightarrow v_2 - 200 = -20 \Rightarrow v_2 = 180 \frac{m}{s}$$

گام سوم: محاسبه‌ی کار برابند نیروهای وارد بر گلوله:

$$W_t = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Rightarrow W_t = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-3} \times (180^2 - 200^2) = -38 J$$

$$P_{in} = 5 \text{ kw} \quad m = 1200 \text{ kg}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$P_{out} = \frac{mgh}{t} = \frac{1200 \times 10 \times 15}{6} = 3000 w = 3 \text{ kw}$$

$$\eta = \frac{3}{5} \times 100 = 60\%$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا شتاب حرکت جسم و جابه‌جایی آن را در ۲ ثانیه‌ی اول محاسبه می‌کنیم:

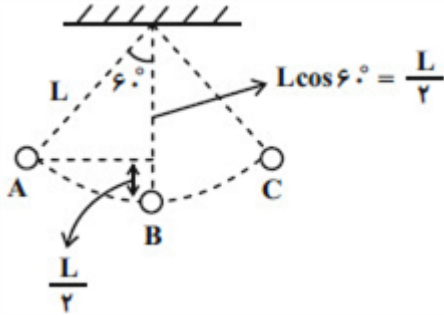
$$F - f_k = ma \Rightarrow 220 - 50 \times 10 \times 0.4 = 50 a \Rightarrow a = 0.4 \frac{m}{s^2}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \times 0.4 \times 2^2 \Rightarrow \Delta x = 0.8 m$$

$$W = F d \cos \theta = 220 \times 0.8 \times 1 = 176 J$$

کار نیروی F برابر است:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون آونگ در شرایط خلأ کار می‌کند یعنی نیروهای اتلافی بر آن اثر نمی‌کند، لذا طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی حرکت آونگ کاملاً متقارن است. یعنی مدت زمان مسیر رفت و برگشت آن نیز یکسان خواهد شد. از طرفی حرکت آونگ از نقطه‌ی A تا پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر (نقطه‌ی B) مشابه حرکت آونگ از نقطه‌ی B تا C است. پس در یک حرکت رفت و برگشت از A تا B، B تا C، C تا B و در نهایت B تا A مدت زمان حرکت آونگ در این جابه‌جایی‌ها نیم‌ثانیه می‌باشد. حالا تعیین می‌کنیم پس از $\frac{9}{5}$ ثانیه آونگ در کدام نقطه قرار می‌گیرد. $\frac{9}{5} = 4 + \frac{3}{5}$ یعنی آونگ ۴ حرکت رفت و برگشتی کامل انجام داده و به نقطه‌ی A رسیده و در $\frac{3}{5}$ ثانیه‌ی آخر حرکت از A به B، B به C و در نهایت از C به B می‌رسد. بنابراین:



$$W_{mg} = -\Delta U = -(U_B - U_A) = (mgh_B - mgh_A)$$

$$= -mg(h_B - h_A) = -mg\left(-\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}mgL$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

چون مقاومت هوا در برابر حرکت گلوله‌ها ناچیز است، انرژی مکانیکی ثابت باقی می‌ماند.

در ابتدا انرژی مکانیکی هر جسم فقط انرژی پتانسیل گرانشی جسم نسبت به سطح زمین است و چون $E = U = mgh$ است، جرم سبک‌تر باید در ارتفاع بالاتری از سطح زمین قرار داشته، پس سرعت برخورد به زمین گلوله سبک‌تر، بیشتر است. دقت کنید جرم تأثیری در سرعت نهایی ندارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

انرژی جنبشی کمیتی نرده‌ای است و جهت حرکت جسم تأثیری در مقدار آن ندارد. برای محاسبه تغییرات کافی است انرژی جنبشی لحظه پرتاب و لحظه برخورد به زمین را ابتدا حساب کنیم:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2}mv_1^2 \\ \vec{v}_1 &= 6\vec{i} + 8\vec{j} \Rightarrow v_1 = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = 10 \frac{m}{s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times 100 \Rightarrow k_1 = 200 \text{ J}$$

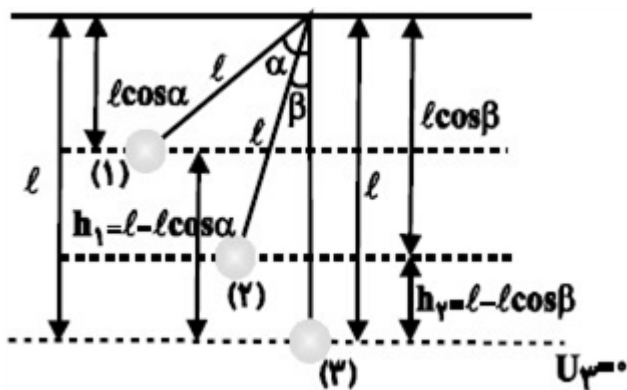
$$k_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 400 = 800 \text{ J}$$

اکنون برای محاسبه درصد تغییرات انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta k}{k_1} \times 100 = \left(\frac{800 - 200}{200} \right) \times 100 = 300\%$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مقاومت هوا صرف نظر شده است، پس انرژی مکانیکی گلوله در مسیر پایسته است.

بنابراین داریم:



$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\Rightarrow 0 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 2gh_1 - 2gh_2 = 2g(h_1 - h_2)$$

$$\begin{cases} h_1 = L - L \cos \alpha \\ h_2 = L - L \cos \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 2g(L - L \cos \alpha - L + L \cos \beta) \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gL(\cos \beta - \cos \alpha)}$$

بنابراین اگر گلوله‌ای را به اندازه‌ی زاویه‌ی α از وضع تعادل خارج کرده و رها کنیم، تندی آن در هر لحظه که با خط قائم، زاویه‌ی β بسازد، از رابطه‌ی بالا به دست می‌آید.

$$1 \Rightarrow 3: \begin{cases} \alpha = 53^\circ \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow v_3 = v = \sqrt{2gL(\cos 0 - \cos 53^\circ)} \Rightarrow v = \sqrt{2 \times 10 \times L \times 0.6}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{12L}$$

$$1 \Rightarrow 2: \begin{cases} \alpha = 53^\circ \\ \beta = ? \\ v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}v \end{cases} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gL(\cos \beta - \cos 53^\circ)} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{12L}$$

$$= \sqrt{2 \times L} = \sqrt{2 \times L(\cos \beta - 0.6)} \Rightarrow 2L = 2 \times L(\cos \beta - 0.6) \Rightarrow \cos \beta = 0.6 + 0.6 = 1.2$$

$$\Rightarrow \beta = 37^\circ$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به قضیه کار و انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \xrightarrow{v_2=v_1} W_t = 0$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

انرژی جنبشی انتهای هر دو جسم یکسان است، پس کار کل در هر دو حالت با هم برابر است:

$$W_{t_1} = W_{t_2} \Rightarrow W_{F_1} + W_{f_1} = W_{F_2} + W_{f_2}$$

$$\Rightarrow Fd - f_1d = 2Fd - f_2d \Rightarrow f_2 - f_1 = 2F$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$k_2 - k_1 = W_F \Rightarrow \frac{1}{2} \times 1492 \times (900 - 400) = 746(500)J$$

$$P = \frac{746(500)}{5} = 74600 W \Rightarrow P = 100 \text{ hp}$$

اگر اتلافی وجود نداشت توان لازم برای انجام این تغییر سرعت ۱۰۰ اسب بخار بود. ولی در حالی که ۲۰ درصد از توان تلف

$$0.8P = 100 \Rightarrow P = 125 \text{ hp}$$

می‌شود باید توان بیشتری صرف این کار شود یعنی:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کار نیروی گلوله اندازه انرژی جنبشی گلوله است.

$$W_T = \Delta k \Rightarrow W = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (900) = 1800$$

کار نیرویی که گلوله به دیوار وارد می‌کند ۱۸۰۰

دیوار به گلوله: $W = -1800 J$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$K = \frac{1}{2} m V^2 \Rightarrow 40 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} V^2$$

$$\Rightarrow 40 = \frac{V^2}{10} \Rightarrow V^2 = 400 \Rightarrow V = \sqrt{400} = 20 \frac{m}{s}$$

$$20 \frac{m}{s} \times \frac{3}{6} = 10 \frac{km}{h}$$

نکته‌ی درسی: واحد سرعت در دستگاه بین‌المللی SI متر بر ثانیه است. برای تبدیل $\frac{km}{h}$ به $\frac{m}{s}$ باید عدد مورد نظر را بر

$\frac{3}{6}$ تقسیم کنیم و بالعکس برای تبدیل $\frac{m}{s}$ به $\frac{km}{h}$ عدد مورد نظر را در $\frac{3}{6}$ ضرب می‌کنیم.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فشار و حجم در دمای ثابت با هم رابطه‌ی وارونه دارند.

$$V \propto \frac{1}{P}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حجم یک نمونه گاز در دما و فشار ثابت با هم برابر است. (قانون آووگادرو)

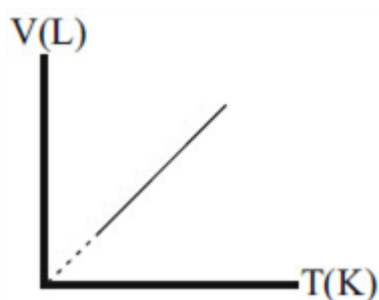
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از هلیوم برای خنک کردن قطعات الکترونیکی در دستگاه MRI استفاده می‌شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو عبارت پ و ت درست هستند. بررسی عبارت‌ها:

(T) در فشار ثابت، دما و حجم یک گاز رابطه‌ی مستقیمی دارند. با توجه به رابطه مستقیم V و T در فشار ثابت حاصل $\frac{V}{T}$ برای یک گاز مقدار ثابتی است نه $(V \times T)$.

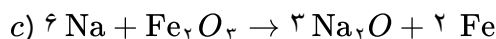
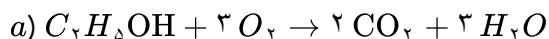
ب) رابطه‌ی حجم و دمای یک گاز در فشار ثابت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \text{ یا } V_1 T_2 = V_2 T_1$$



پ) نمودار $V - T$ در فشار ثابت به صورت خطی است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به معادله‌های نمادی موازنه شده:



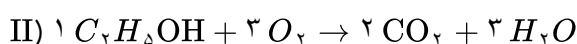
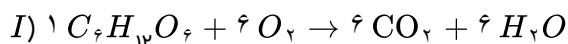
(۱) درست. ضریب O_2 و H_2O یکسان و برابر ۳ می‌باشد.

(۲) درست. در هر دو مورد برابر ۶ می‌باشد.

(۳) نادرست. این تفاوت برابر ۳ می‌باشد.

(۴) درست

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معادله‌ی موازنه‌شده‌ی واکنش‌های انجام شده به صورت زیر است:



واکنش (I)

$$\begin{aligned} ? L CO_2 &= mg C_6H_{12}O_6 \times \frac{1 mol C_6H_{12}O_6}{180 g C_6H_{12}O_6} \\ &\times \frac{6 mol CO_2}{1 mol C_6H_{12}O_6} \times \frac{22.4 L CO_2}{1 mol CO_2} = (0.747 m) L CO_2 \end{aligned}$$

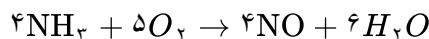
واکنش (II)

$$\begin{aligned} ? L CO_2 &= mg C_2H_5OH \times \frac{1 mol C_2H_5OH}{46 g C_2H_5OH} \\ &\times \frac{2 mol CO_2}{1 mol C_2H_5OH} \times \frac{22.4 L CO_2}{1 mol CO_2} = (0.87 m) L CO_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\text{حجم } CO_2 \text{ تولیدی در واکنش (I)}}{\text{حجم } CO_2 \text{ تولیدی در واکنش (II)}} = \frac{0.747 m}{0.87 m} \approx 0.86$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تنها عبارت آ نادرست می‌باشد.

بررسی نادرستی عبارت آ: بخش عمده‌ای از پرتوهای تابیده شده از خورشید به وسیله زمین جذب می‌شود.



درستی گزینه ۱:

ضریب مولی NH_3 و NO برابر ۴ و نسبت ضریب‌ها مساوی ۱ است.

$$11/2 \text{LO}_2 \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{22/4 \text{LO}_2} \times \frac{6 \text{ mol H}_2\text{O}}{5 \text{ mol O}_2} \times \frac{18 \text{gH}_2\text{O}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}} = 10/8 \text{gH}_2\text{O}$$

درستی گزینه ۲:

نادرستی گزینه ۳:

$$?g\text{NO} = 3/4 g\text{NH}_3 \times \frac{1 \text{ mol NH}_3}{17 g\text{NH}_3} \times \frac{4 \text{ mol NO}}{4 \text{ mol NH}_3} \times \frac{30 g\text{NO}}{1 \text{ mol NO}} = 6 g\text{NO}$$

درستی گزینه ۴: در شرایط STP، H_2O به حالت مایع و مابقی مواد به حالت گازی هستند؛ بنابراین با مصرف ۹ مول واکنش‌دهنده گازی، ۴ مول فراورده گازی حاصل می‌شود که با توجه به ثابت بودن دما و حجم ظرف، فشار داخل ظرف کاهش می‌یابد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. هر چهار عبارت پیشنهاد شده نادرست هستند. بررسی عبارت‌ها:

- بر اثر سوختن گاز هیدروژن، گرما و نور تولید می‌شود.
- مقدار اوزون در تمامی لایه‌های هواکره ناچیز است.
- در ساختار پلاستیک‌های سبز، هر دو عنصر کربن و اکسیژن وجود دارند.
- اگر لایه هواکره وجود نداشت، میانگین دمای کره زمین به 18°C - کاهش می‌یافت.

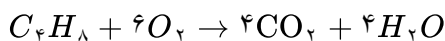
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نام سوخت	بنزین	زغال سنگ	هیدروژن	گازهای طبیعی
گرمای آزاد شده (کیلوژول بر گرم)	۴۸	۳۰	۱۴۳	۵۴
فراورده‌های سوختن				
قیمت (ریال به ازای یک گرم)	۱۴	۴	۲۸۰۰	۵

(ا) و (ب) ← گاز هیدروژن	(ث) و (پ) ← زغال سنگ
(ت) ← گاز طبیعی	

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

سوخت‌های سبز به وسیله‌ی باکتری‌ها تجزیه می‌شوند و زیست‌تخریب‌پذیر هستند.



I ظرف : $0/24 \text{ mol } O_2$

II ظرف : $? \text{ mol بوتن} = 11/2 \text{ g بوتن} \times \frac{1 \text{ mol بوتن}}{56 \text{ g بوتن}} = 0/2 \text{ mol بوتن}$

گزینه ۱: با توجه به این که مقدار مول گاز ظرف I بیشتر است، فشار گاز در آن بیشتر خواهد بود.

گزینه ۲: طبق معادله موازنه شده $C_4H_8 + 6O_2 \rightarrow 4CO_2 + 4H_2O$ برای سوختن کامل $0/2 \text{ mol بوتن}$ ، $1/2 \text{ mol}$ اکسیژن لازم است، بنابراین مقدار آن کافی نیست.

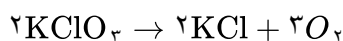
$$\text{گزینه ۳:} \quad \frac{\text{شمار اتم های بوتن}}{\text{شمار اتم های اکسیژن}} = \frac{0/2 \text{ mol بوتن} \times 12}{0/24 \text{ mol } O_2 \times 2} = \frac{2/4}{0/48} = 5$$

گزینه ۴: برای مقایسه حجم آن ها کافیت مول آن ها را مقایسه کنیم.

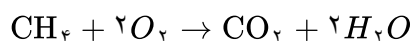
گاز $0/24 + 0/2 = 0/44 \text{ mol}$ = مجموع مول دو گاز بوتن و اکسیژن

$$? \text{ mol CO} = 12/32 \text{ g CO} \times \frac{1 \text{ mol CO}}{28 \text{ g CO}} = 0/44 \text{ mol CO}$$

بنابراین مجموع حجم گاز بوتن و اکسیژن با حجم $12/32 \text{ گرم کربن مونوکسید}$ برابر است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$2 \text{ mol } KClO_3 \times \frac{3 \text{ mol } O_2}{2 \text{ mol } KClO_3} = 3 \text{ mol } O_2 \rightarrow O_2 \text{ تولیدی}$$

$$3 \text{ mol } O_2 \times \frac{1 \text{ mol } CH_4}{2 \text{ mol } O_2} \times \frac{16 \text{ g } CH_4}{1 \text{ mol } CH_4} = 24 \text{ g } CH_4 \rightarrow \text{متان مورد نیاز}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه ها:

گزینه ۱: شکل و حجم یک ماده جامد به شکل ظرف بستگی ندارد.

گزینه ۲: تراکم پذیری گازها بیشتر از مایعات است.

گزینه ۳: با قرار دادن بادکنک پر از هوا درون نیتروژن مایع، دمای بادکنک کاهش می یابد و حجم هوای درون آن کاهش می یابد.

گزینه ۴: چگالی یک گاز برابر نسبت جرم مولی آن گاز به حجم مولی آن است و با توجه به رابطه زیر، نسبت چگالی دو گاز

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{\text{جرم مولی } x}{\text{حجم مولی } x}}{\frac{\text{جرم مولی } y}{\text{حجم مولی } y}} = \frac{\text{جرم مولی } x}{\text{جرم مولی } y}$$

برابر نسبت جرم مولی آن ها است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه های نادرست:

(۱) بیشترین مقدار گاز اوزون در لایه استراتوسفر هواکره قرار دارد.

(۳) اوزون به دلیل واکنش پذیری بالای خود، برای گندزدایی میوه ها و سبزیجات استفاده می شود.

(۴) اوزون نسبت به اکسیژن ناپایدارتر است و واکنش پذیری و چگالی بیشتری دارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق جدول زیر، گرمای آزاد شده از سوختن یک گرم گاز طبیعی، بیشتر از زغال سنگ است ولی تنوع فراورده‌های حاصل از سوختن زغال سنگ بیشتر از گاز طبیعی است.

نام سوخت	بنزین	زغال سنگ	هیدروژن	گاز طبیعی
گرمای آزاد شده (کیلوژول بر گرم)	۴۸	۳۰	۱۴۳	۵۴
فراورده‌های سوختن	$\text{CO}, \text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}$	$\text{CO}, \text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}, \text{SO}_2$	H_2O	$\text{CO}, \text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}$
قیمت (ریال به ازای یک گرم)	۱۴	۴	۲۸۰۰	۵

۹۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شواهد نشان می‌دهند که فصل بهار در نیمکره شمالی زمین نسبت به ۵۰ سال گذشته در حدود یک هفته زودتر آغاز می‌شود.

۹۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) سوخت سبز، سوختی است که در ساختار خود افزون بر کربن و هیدروژن، اکسیژن نیز دارد.
- ۲) سوخت‌های سبز، زیست تخریب‌پذیرند.
- ۳) سوخت‌های سبز به وسیله‌ی جانداران ذره‌بینی به مواد ساده‌تر تجزیه می‌شوند.

۹۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عبارت‌های دوم و سوم درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

اوزون در لایه‌های بالایی هواکره (استراتوسفر) مانند پوششی کروی زمین را احاطه کرده است.



مدل فضا پرکن اوزون به شکل مقابل است:

۹۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به جز عبارت سوم، سایر عبارت‌ها درست هستند.

هنگامی که پرتوهای خورشیدی به سطح زمین تابیده می‌شود، بخش عمده‌ی آن به وسیله‌ی زمین جذب می‌شود، بخش کوچکی به وسیله‌ی هواکره جذب می‌شود و بخش کوچکی بازتابیده می‌شود.

۹۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. آهک (کلسیم اکسید) یک اکسید فلزی است که خاصیت بازی دارد و برای افزایش میزان pH آب دریاچه‌های اسیدی استفاده می‌شود.

۹۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت‌های سوم و چهارم درست هستند.

عنصرهای X, Y و Z به ترتیب همان ${}_{30}\text{Zn}$ ، ${}_{31}\text{Sc}$ و ${}_{16}\text{S}$ هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عنصر روی فقط یک یون تک‌اتمی با فرمول Zn^{2+} و عنصر اسکاندیم نیز تنها یک یون تک‌اتمی با فرمول Sc^{3+} تشکیل می‌دهد.

نخستین عنصر جدول دوره‌ای که زیرلایه‌ی d آن به طور کامل از الکترون پر شده، ${}_{29}\text{Cu}$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی سایر گزینه‌ها:

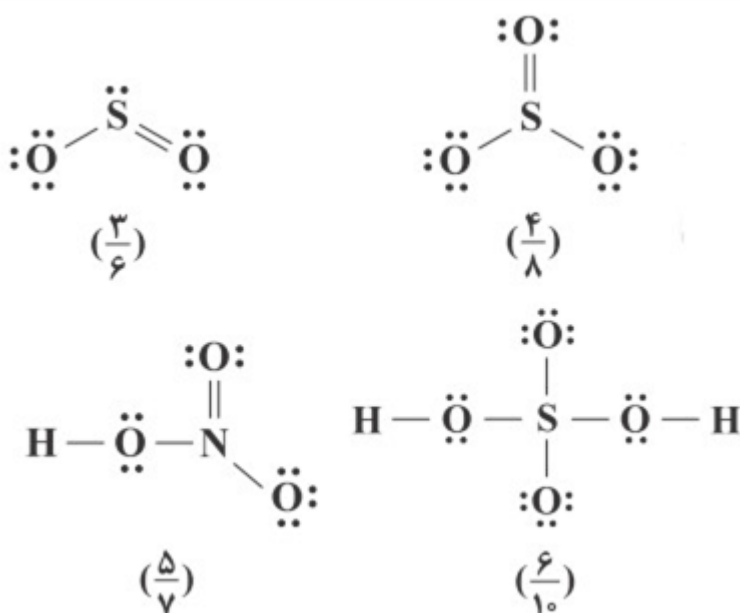
گزینه ۱: مقدار اوزون در لایه‌ی استراتوسفر با توجه به برگشت‌پذیر بودن واکنش تبدیل اوزون به اکسیژن ثابت است.
گزینه ۲: فراوان‌ترین ترکیب موجود در هوای پاک و خشک کربن دی‌اکسید است که مدل فضاپرکن آن با اوزون متفاوت است.



گزینه ۳: گاز اوزون واکنش‌پذیرتر و ناپایدارتر از گاز اکسیژن است، به همین دلیل در لایه‌ی تروپوسفر آلاینده‌ای سمی می‌باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ترکیب‌های E, D, X, A به ترتیب SO_2, SO_3, HNO_3 و H_2SO_4 هستند.

ساختار لوویس هر چهار مولکول و نسبت شمار جفت الکترون‌های پیوندی به شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی آن‌ها در زیر آمده است:



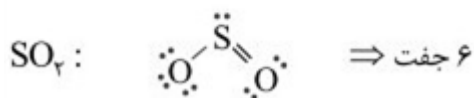
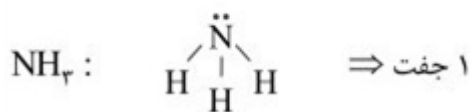
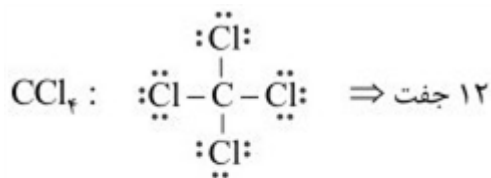
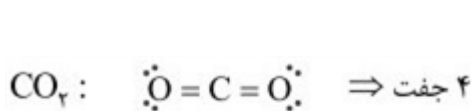
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. همه‌ی عبارت‌های بیان شده درست هستند. بررسی عبارت‌ها:

- * فراوان‌ترین گاز موجود در هواکره نیتروژن است که برای نگهداری نمونه‌های بیولوژیک در پزشکی کاربرد دارد.
- * در فرایند تهیه‌ی هوای مایع، در دمای $-78^\circ C$ (۱۹۵ کلوین) گاز کربن دی‌اکسید هوا به حالت جامد درمی‌آید.
- * گاز نجیب آرگون در ساخت لامپ‌های رشته‌ای کاربرد دارد. نقطه‌ی جوش گازهای آرگون و اکسیژن به‌ترتیب برابر $-186^\circ C$ و $-183^\circ C$ است که بسیار به هم نزدیک هستند و همین موضوع باعث می‌شود که در تقطیر جزء به جزء هوای مایع، جداسازی این دو عنصر با استفاده از افزایش تدریجی دما دشوار باشد.
- * نخستین گاز خارج شده در این فرایند گاز نیتروژن است که برای پرکردن تایر خودروها استفاده می‌شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

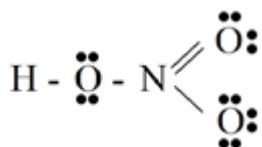
گازهای A, B, C و D به ترتیب گازهای هلیم، نیتروژن، آرگون و اکسیژن می‌باشند.
گاز هلیم در هوای مایع وجود ندارد، درصد حجمی گاز نیتروژن در هوا بیش‌تر از سایر گازها است و از گاز آرگون به عنوان محیط بی‌اثر در جوشکاری، برش فلزها و در ساخت لامپ‌های رشته‌ای استفاده می‌شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۲



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ساختار لوویس نیتریک اسید (HNO_3) به صورت روبه رو رسم می شود. ۱۰۴



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق قانون بویل حاصل ضرب فشار در حجم در دمای ثابت مقداری است ثابت. پس: ۱۰۵

$$P_1 \times 12 = P_2 \times 4 \Rightarrow P_2 = 3P_1 \text{ یا } P_1 = \frac{P_2}{3}$$

نکته ی درسی: قانون بویل و شارل در گازهای کامل صحیح است و رابطه ی حجم و فشار و دما را نسبت به یکدیگر نشان

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

می دهد و رابطه ی مجموع این دو قانون به صورت مقابل است:

