

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای اینکه دنباله صعودی باشد، سه حالت داریم:

اگر $a = 1, b = 2$ باشد $x = 3$

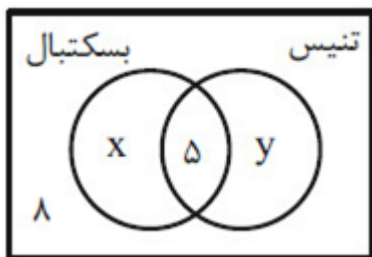
اگر $a = 1, b = 3$ باشد $x = 5$

اگر $a = 2, b = 3$ باشد $x = 4$

بنابراین مجموع مقادیر x برابر ۱۲ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در نمودار ون زیر فرض می‌کنیم که x نفر فقط عضو تیم بسکتبال و y نفر فقط عضو تیم تنیس هستند،

می‌دانیم که $\frac{1}{3}$ کلاس عضو تیم بسکتبال هستند بنابراین:



$$\frac{x+5}{x+5+y+8} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2x + 10 = x + 5 + y + 8$$

$$\Rightarrow x - y = 3 \quad (1)$$

و از طرفی نیز $\frac{1}{3}$ کلاس عضو تیم تنیس هستند، پس:

$$\frac{y+5}{x+5+y+8} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3y + 15 = x + 5 + y + 8 \Rightarrow 2y - x = -2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} y = 1, x = 4$$

در نتیجه تعداد نفراتی که فقط عضو یک تیم می‌باشند، برابر است با:

$$x + y = 5$$

$$\cos \alpha = 3 \sin \alpha \Rightarrow \cot \alpha = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$1 + (3)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{10}$$

می‌دانیم $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ، بنابراین داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{10} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{10} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}}$$

$$\cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای اینکه سه جمله متوالی a, b و c تشکیل دنباله هندسی دهند، باید رابطه $b^2 = a \times c$ برقرار باشد.

سه جمله دنباله حسابی که تشکیل دنباله هندسی می‌دهند:

$$t_4, t_5, t_8 \Rightarrow t_5^2 = t_4 \times t_8 \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + 3d)(a_1 + 7d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 10a_1d + 21d^2$$

$$16d^2 + 8a_1d = 10a_1d + 21d^2 \xrightarrow{d \neq 0} 2a_1 + 15d = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{15}{2}d$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۵

$$A = \frac{(3 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{(4 + \sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt{2}\sqrt{4 + \sqrt{15}}} = \frac{(3 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{(4 + \sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}}$$

$$= \frac{(3 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} - 1)}{(4 + \sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{(3 + \sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5})}{(4 + \sqrt{15})(8 - 2\sqrt{15})} = \frac{2(9 - 5)}{2(16 - 15)} = 4$$

$$\Delta = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون ریشه مضاعف دارد، Δ معادله درجه دوم باید برابر صفر باشد.

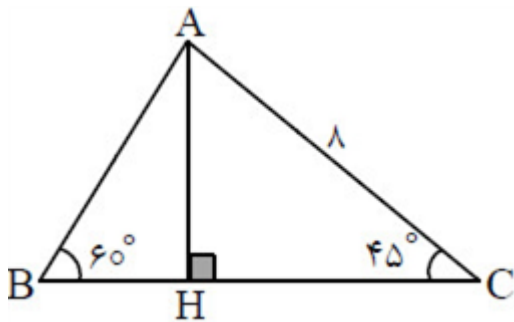
۶

$$a^2 - 4(2a)(3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق} & a = 0 \\ \text{ق ق ق} & a = 24 \end{cases}$$

$$a = 24 \Rightarrow x^2 - 24x + 23 = 0 \Rightarrow (x - 23)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 23 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 24$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۷



$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{8} \Rightarrow AH = 4\sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = 1 = \frac{AH}{HC} \Rightarrow 1 = \frac{4\sqrt{2}}{HC} \Rightarrow HC = 4\sqrt{2}$$

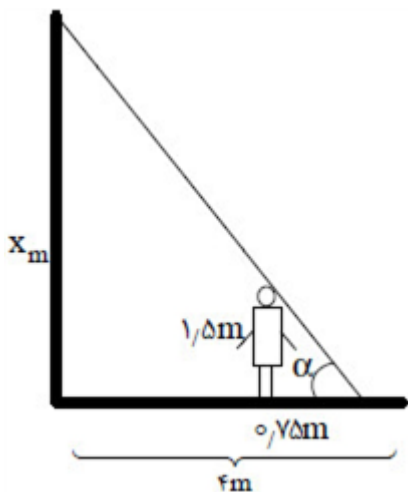
$$\tan 60^\circ = \frac{AH}{HB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{2}}{HB} \Rightarrow HB = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$BC = HB + HC = \frac{4\sqrt{6}}{3} + 4\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} \left(\frac{4\sqrt{6}}{3} + 4\sqrt{2} \right) (4\sqrt{2}) \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 16 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۸



$$\tan \alpha = \frac{1/5}{0.75} = \frac{x}{4} \Rightarrow 0.75x = 4 \times 1/5 \Rightarrow x = 8 \text{ متر}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(3-2\sqrt{2})} \times \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} &= \sqrt[3]{(3-2\sqrt{2})^3 \times (3+2\sqrt{2})^3} \\ &= \sqrt[3]{((3-2\sqrt{2})^3 (3+2\sqrt{2})^3) (3+2\sqrt{2})} = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} \\ &= \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} &= \frac{1}{\cos \theta (1 - \sin^2 \theta)} - \frac{1}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{1 - 1 + \sin \theta}{\cos \theta (1 - \sin^2 \theta)} = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[2 \times 3]{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} \times \sqrt[6]{7+2\sqrt{10}} \Rightarrow A = \sqrt[6]{7-2\sqrt{10}} \times \sqrt[6]{7+2\sqrt{10}} \\ &= \sqrt[6]{49-40} = \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow \sqrt[3]{9} A = \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} = 3 \quad (1) \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} &= 5 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} a + b + 2\sqrt{ab} = 25 \xrightarrow{\sqrt{ab}=2} \\ a + b &= 19 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} a^2 + b^2 + 2ab = 361 \xrightarrow{ab=9} a^2 + b^2 = 343 \quad (2) \\ 3 + 343 &= 346 = \text{حاصل جمع مورد نظر ۲ و ۱} \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این که $\sqrt[3]{b} = a$ و $-1 < b < 0$ داریم $\sqrt[3]{b} < b$ پس $-1 < b < 0$ و چون $\sqrt[3]{c} = d$ و $0 < d < c$ لذا $\sqrt[3]{c} < c$ پس $c > 1$ است.

$$\begin{cases} -1 < b < 0 \\ -1 < a < 0 \\ c > 1 \\ d > 1 \end{cases}$$

با توجه به اطلاعات مقابل، به تشریح گزینه ها می پردازیم:

تشریح گزینه ها:

$$c > 1 \Rightarrow \sqrt{c} > \sqrt[3]{c}$$

گزینه ۱:

$$-1 < b < 0 \Rightarrow 0 < -b < 1 \Rightarrow \sqrt{-b} < \sqrt[3]{-b}$$

گزینه ۲:

$$\left. \begin{matrix} -1 < b < 0 \\ d > 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b - d < -1 \Rightarrow \sqrt[3]{b-d} > \sqrt[3]{b-d}$$

گزینه ۳:

$$\left. \begin{matrix} c > 1 \\ d > 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow dc > 1 \Rightarrow \sqrt[3]{dc} > \sqrt[3]{dc}$$

گزینه ۴:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۳

$$۶, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, ۳۸۴$$

$$۳۸۴ = a_v = a_1 q^6 = ۶ q^6 \Rightarrow q^6 = ۶۴ \Rightarrow q = ۲$$

$$\begin{cases} a_2 = ۶ q = ۱۲ \\ a_7 = ۶ q^6 = ۱۹۲ \end{cases} \Rightarrow a_2 + a_7 = ۲۰۴$$

حال $a_n = ۲۰۴$ را حل می‌کنیم:

$$۲۰۴ = v_n + ۱ \Rightarrow \frac{۲۰۳}{v} = ۲۹$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \dots < \sqrt[n]{a} \\ a > a^2 > a^3 > \dots > a^n \end{cases}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$\begin{aligned} a &> a^2 \\ \sqrt[n]{a} &> \sqrt{a} \Rightarrow a + \sqrt[n]{a} > a^2 + \sqrt{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\cos^2 ۷۵^\circ + 1 - \sin^2 ۷۵^\circ}{(1 - \sin ۷۵^\circ) \cos ۷۵^\circ} \times \frac{\sin ۷۵^\circ (\sin ۷۵^\circ - 1)}{\sin ۷۵^\circ \cos ۷۵^\circ} \\ &= \frac{2 \cancel{\cos^2 ۷۵^\circ}}{(1 - \cancel{\sin ۷۵^\circ}) \cancel{\cos ۷۵^\circ}} \times \frac{\cancel{\sin ۷۵^\circ} (\cancel{\sin ۷۵^\circ} - 1^{-1})}{\cancel{\sin ۷۵^\circ} \cancel{\cos ۷۵^\circ}} = -۲ \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۵

$$۳x^2 - ۶x + a = 0 \xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{طرفین بر ۳}} x^2 - ۲x + \frac{a}{۳} = 0$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(-\frac{1}{1}\right)^2 = (-1)^2 = 1 \xrightarrow{\text{به طرفین عدد را اضافه می‌کنیم. ۱}} x^2 - ۲x + 1 = -\frac{a}{۳} + 1$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 1 - \frac{a}{۳} \\ (x-1)^2 = b \end{cases} \Rightarrow 1 - \frac{a}{۳} = b$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶

از مقایسه با صورت سؤال داریم:

$$1 - \frac{a}{۳} = b \xrightarrow{\times ۳} ۳ - a = ۳b \Rightarrow ۳b + a = ۳$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۷

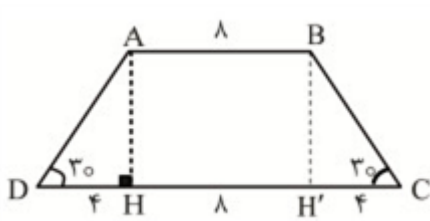
$$\sqrt[۴]{a^2} = ۲ \sqrt[۴]{a^2} \Rightarrow a^{\frac{2}{4}} = ۲ a^{\frac{2}{4}} \Rightarrow \frac{a^{\frac{2}{4}}}{a^{\frac{2}{4}}} = ۲ \Rightarrow a^{\frac{2}{4} - \frac{2}{4}} = ۲ \Rightarrow a^{\frac{4-2}{4}} = ۲ \Rightarrow a^{-\frac{2}{4}} = ۲$$

$$\Rightarrow (a^{-1})^{\frac{2}{4}} = ۲ \xrightarrow[\text{توان } \frac{2}{4}]{\frac{1}{2}} \left((a^{-1})^{\frac{2}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = ۲^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a^{-1} = ۲^{\frac{1}{2}} (*)$$

$$\sqrt[۴]{a^{-1}} = (a^{-1})^{\frac{1}{4}} \xrightarrow{(*)} \left(۲^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = ۲^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{۲}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۸

مطابق شکل با رسم ارتفاع AH و BH:



$$\tan 30^\circ = \frac{AH}{DH} \quad S_{\text{دورنگه}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AH}{4} \quad S = \frac{(1+4) \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{2}$$

$$AH = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \quad S = 16\sqrt{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۹

$$\frac{1}{2} \in (n-2, 1-2n] \Rightarrow n-2 < \frac{1}{2} \leq 1-2n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-2 < 1-2n \Rightarrow n+2n < 1+2 \Rightarrow 3n < 3 \Rightarrow n < 1 \\ n-2 < \frac{1}{2} \Rightarrow n < 2 + \frac{1}{2} \Rightarrow n < \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \leq 1-2n \Rightarrow 2n \leq 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow 2n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow n \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

اشتراک
 $\rightarrow n \leq \frac{1}{4} \Rightarrow n \text{ بیشترین مقدار} = \frac{1}{4}$

$$t_1 = 3^a, t_2 = 3^{4a} \Rightarrow q^3 = \frac{3^{4a}}{3^a} = 3^{3a} \Rightarrow q = 3^a$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۰

$$t_1 = \frac{1}{3} = 3^a \times 3^a \Rightarrow 3^{2a} = 3^{-1} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$t_2 = (\sqrt{3})^{-b} = \frac{1}{3} \times 3^a \Rightarrow 3^{-\frac{b}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow b = 2$$

$$2a - b = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = -3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۱

$$\sqrt[6]{4}, x, \sqrt[10]{64} \xrightarrow{\text{دنباله ی هندسی}} x^2 = \sqrt[10]{64} \times \sqrt[6]{4} = \sqrt[10]{2^6} = \sqrt[10]{2^6} \times \sqrt[10]{2^8}$$

$$\Rightarrow x^2 = \sqrt[10]{2^6} \times \sqrt[10]{2^8} = 2^{\frac{6}{10}} \times 2^{\frac{8}{10}} = 2^{\frac{14}{10}} \Rightarrow x = \sqrt{2^{\frac{14}{10}}}$$

$$\Rightarrow x = \left(2^{\frac{14}{10}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{2^7} = \sqrt[10]{128}$$

عرض $\times$ طول = مساحت مستطیل

$$(x+3)(x-1) = 21 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 21 \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$$

معادله را با استفاده از تجزیه حل می کنیم

$$\rightarrow x^2 + (6-4)x + 6 \times (-4) = 0$$

$$(x+6)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+6=0 \Rightarrow x=-6 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$



پس طول اضلاع مستطیل برابر است با:

$$\text{محیط مستطیل} = 2(3+7) = 2 \times 10 = 20$$

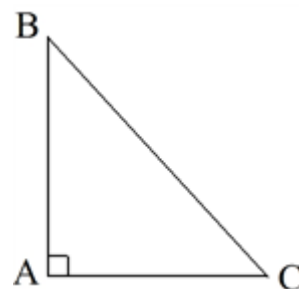
$$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{5}}{5} BC (*)$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 BC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + \frac{1}{5} BC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 = \frac{4}{5} BC^2$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{5}} BC \Rightarrow AB = \frac{2\sqrt{5}}{5} BC (**)$$

$$\xrightarrow{(*) \text{ و } (**)} AB = 2AC$$



برای این که ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را سریع تر پیدا کنیم، می توانیم ابتدا آن را به شکل $x^2 + bx + ac = 0$ در نظر بگیریم و ریشه ها را پیدا کنیم و در ادامه عددهای به دست آمده را بر a تقسیم کنیم.

$$4x^2 - 27x - 40 = 0 \Rightarrow x^2 - 27x - 16 = 0 \Rightarrow (x-32)(x+5) = 0$$

$$x = 32, -5 \xrightarrow{\text{ریشه های معادله اصلی}} 8, -\frac{5}{4}$$

پس:

$$m^2 = \frac{25}{16}, m = -\frac{5}{4}$$

$$A = (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha\beta)^2 \\ = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4 + (\alpha\beta)^2$$

با جای گذاری مقادیر داده شده داریم:

$$A = (3\sqrt{2} + 4) + (3\sqrt{2} - 4) + (\sqrt{18 - 16})^2 = 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو مثلث ABC و BEF همنهشتاند پس $BF = BC = 1$ و $AB = EF = 2$ پس $AF = 1$

اکنون فرض کنیم $FH = x$ پس $BH = 1 - x$ داریم:

$$\triangle ABC : DH \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AH}{AB} = \frac{DH}{BC} \Rightarrow \frac{1+x}{2} = \frac{DH}{1}$$

$$\Rightarrow DH = \frac{1+x}{2}$$

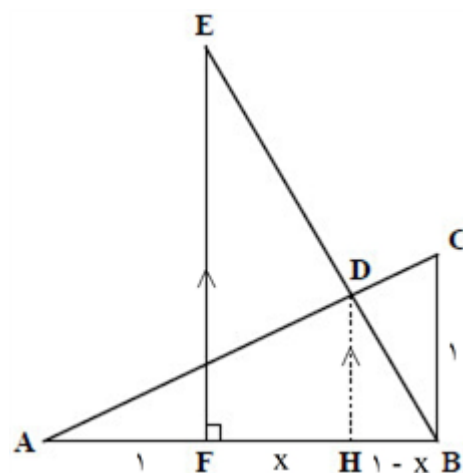
$$\triangle BEF : DH \parallel EF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{DH}{EF} = \frac{BH}{BF} \Rightarrow \frac{DH}{2} = \frac{1-x}{1}$$

$$\Rightarrow DH = 2 - 2x$$

$$\frac{1+x}{2} = 2 - 2x \Rightarrow 1+x = 4 - 4x \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

بنابراین:

$$DH = 2 - 2x = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0.8$$

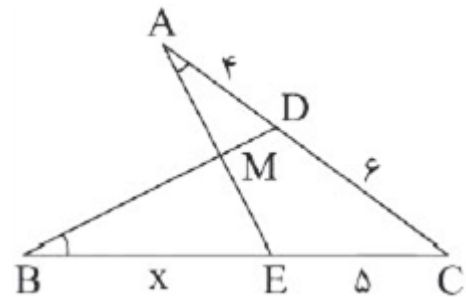


گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلث‌های $\triangle AEC$ و $\triangle BCD$ به حالت (ز) متشابه‌اند. ($\widehat{C}$ مشترک و $\widehat{A} = \widehat{B}$). بنابراین:

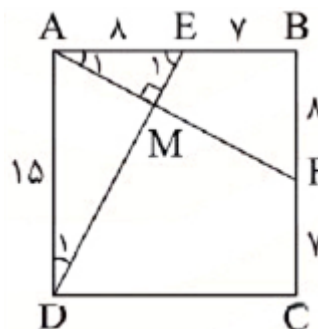
$$\frac{AC}{BC} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow \frac{10}{x+5} = \frac{5}{6} \Rightarrow 60 = 5x + 25 \\ \Rightarrow 35 = 5x \Rightarrow x = 7$$

از طرفی مثلث‌های $\triangle AMD$ و $\triangle BME$ نیز به حالت (ز) متشابه‌اند ($\widehat{A} = \widehat{B}$, $\widehat{M} = \widehat{M}$). بنابراین نسبت مساحت‌های آنها برابر با مربع نسبت تشابه است.

$$\frac{S_{\triangle AMD}}{S_{\triangle BME}} = \left(\frac{AD}{BE} \right)^2 = \left(\frac{4}{7} \right)^2 = \frac{16}{49}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل دو مثلث $\triangle ADE$ و $\triangle ABF$ را در نظر بگیرید.



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ \\ AE = BF = 8 \\ AD = AB = 15 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \triangle ADE \cong \triangle ABF \\ \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{A} \quad (*)$$

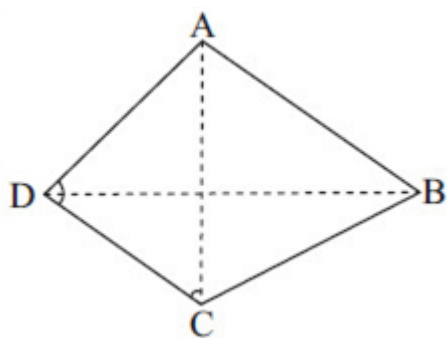
$$\triangle ADE: \widehat{D} + \widehat{E} = 90^\circ \xrightarrow{(*)} \widehat{A} + \widehat{E} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AME} = 90^\circ$$

از طرفی طبق قضیه فیثاغورس در مثلث $\triangle ABF$ داریم:

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 = 15^2 + 8^2 = 17^2 \Rightarrow AF = 17$$

حال برای دو مثلث $\triangle AMF$ و $\triangle ABF$ می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A} \\ \widehat{M} = \widehat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ز ز)}} \triangle AME \sim \triangle ABF \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{AM}{15} = \frac{8}{17} \Rightarrow AM = \frac{120}{17} \\ \Rightarrow MF = 17 - \frac{120}{17} = \frac{169}{17}$$



$$AD = AC \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ACD} \xrightarrow[\widehat{BCD} > \widehat{ACD}]{\widehat{ADC} > \widehat{BDC}}$$

$$\widehat{BDC} < \widehat{ADC} = \widehat{ACD} < \widehat{BCD}$$

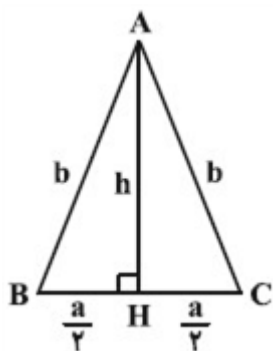
$$\widehat{BDC} < \widehat{BCD} \xrightarrow{\text{در مثل } BCD} BC < BD$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو مثلث ACE و ABC به حالت تساوی زاویه‌ها متشابهند و نسبت تشابه آن‌ها برابر $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ ۳۰

است. نسبت دو نیمساز متناظر در دو مثلث متشابه، با نسبت تشابه برابر است. داریم:

$$\frac{AD'}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AD - DD'}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x + 3 - (x - 1)}{x + 3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{x + 3} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow AD = x + 3 = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، هدف ما به دست آوردن $\frac{b}{a}$ است. $\frac{b}{a}$ را k در نظر می‌گیریم. طبق فرض، ارتفاع h ، واسطه هندسی ساق و قاعده است: ۳۱



$$h^2 = ab$$

از طرفی در مثلث AHC طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$$

بنابراین:

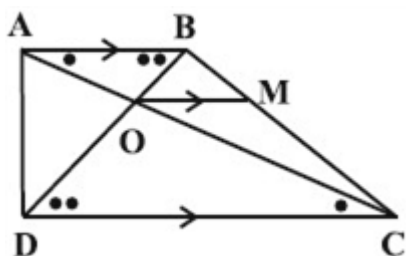
$$ab = b^2 - \frac{a^2}{4} \xrightarrow{\frac{b}{a} = k \Rightarrow b = ak} a(ak) = (ak)^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 k = a^2 k^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow k^2 - k - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ k = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \text{ (غ ق)} \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو مثلث AOB و COD زوایای برابر دارند پس با هم متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها برابر مربع

۳۲

نسبت تشابه است، پس:



$$\frac{S_{COD}}{S_{AOB}} = k^2 = 4 \Rightarrow k = \frac{OD}{BO} = 2$$

$$\frac{BO}{OD} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BO}{BD} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{OM}{CD} = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{3}$$

در مثلث BDC چون $OM \parallel CD$ ، لذا طبق قضیه تالس داریم:

دو مثلث COD و MOC ارتفاع‌های برابر دارند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌ها برابر است، در

$$\frac{S_{MOC}}{S_{COD}} = \frac{OM}{CD} = \frac{1}{3} \quad \text{نتیجه:}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل از رأس C، عمود CH را بر امتداد AD (نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$) رسم می‌کنیم و آن را از

۳۳

سمت H امتداد می‌دهیم تا امتداد ضلع AB را در نقطه E قطع کند.

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow AB = 3$$

از طرفی در مثلث AEC، AH هم نیمساز زاویه $\hat{A}$ و هم ارتفاع نظیر رأس A است، پس این مثلث متساوی‌الساقین است و در

نتیجه داریم:

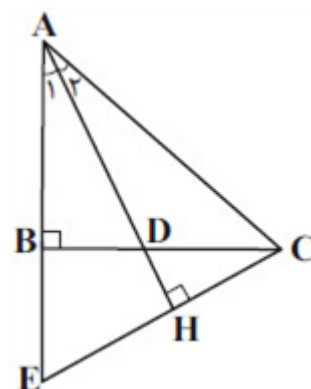
$$AE = AC = 5 \Rightarrow BE = AE - AB = 5 - 3 = 2$$

$$\triangle BEC : CE^2 = BC^2 + BE^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow CE = 2\sqrt{5}$$

$$CH = \frac{CE}{2} = \sqrt{5} \quad \text{چون مثلث AEC متساوی‌الساقین است، پس AH میانه ضلع CE است، یعنی داریم:}$$

$$\triangle ACH : AH^2 = AC^2 - CH^2 = 5^2 - (\sqrt{5})^2 = 20 \Rightarrow AH = 2\sqrt{5}$$

$$S_{\triangle ACH} = \frac{1}{2} AH \times CH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$$



با فرض $AM = x$ و $PC = t$ و به کمک قضیه‌ی تالس در مثلث‌های $\triangle ABC$ و $\triangle APC$ داریم:

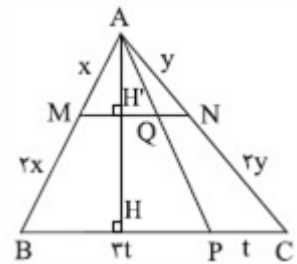
$$QN \parallel PC : \frac{QN}{t} = \frac{y}{r_y} \Rightarrow QN = \frac{1}{r} t \quad (1)$$

اکنون اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$\triangle ABH : MH' \parallel BH \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{r_x} \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{1}{r}$$

با فرض $AH' = h$ نتیجه می‌گیریم $AH = rh$ داریم:

$$\frac{S_{QN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{r}(h)(QN)}{\frac{1}{r}(rh)(BC)} = \frac{QN}{rBC} \stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{1}{r}t}{r(rt)} = \frac{1}{r^2}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چند جمله‌اول دنباله را می‌نویسیم: ۳۵

$$a_2 = 2a_1^2 - 1 = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) - 1 \xrightarrow{2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha} a_2 = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$a_3 = 2a_2^2 - 1 = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) - 1 \xrightarrow{2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha} a_3 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_4 = 2a_3^2 - 1 = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 1 = 1$$

$$a_5 = 2a_4^2 - 1 = 2(1)^2 - 1 = 1$$

$$a_6 = 2a_5^2 - 1 = 2(1)^2 - 1 = 1$$

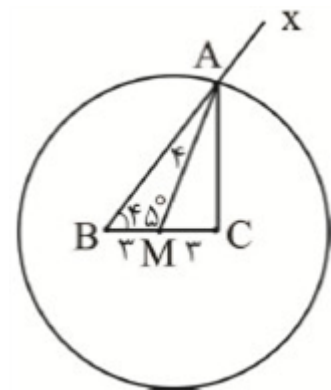
$$a_7 = 2a_6^2 - 1 = 2(1)^2 - 1 = 1$$

$$a_8 = 2a_7^2 - 1 = 2(1)^2 - 1 = 1$$

.

واضح است که تمام جملات بعدی دنباله برابر با یک هستند. پس $a_{88} = 1$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا $a = BC = 6$ را رسم می‌کنیم. نقطه وسط آن را M می‌نامیم. زاویه $\widehat{B} = 45^\circ$ را رسم می‌کنیم ($\widehat{XBC} = 45^\circ$) سپس دایره‌ای به شعاع ۴ و مرکز M را رسم می‌کنیم تا Bx را در A قطع کند. این دایره، Bx را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. چون $m_a < \frac{BC}{2}$ است، در نتیجه یک مثلث تشکیل می‌شود.



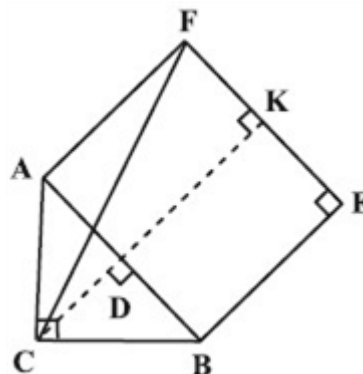
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $(2x + 8)(2x + 13) = 176$

$$4x^2 + 42x + 104 = 176 \Rightarrow 4x^2 + 42x - 72 = 0 \Rightarrow (2x - 3)(2x + 24) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ \text{غیر قابل قبول } x = -12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{محیط قاب} &= 2 \times ((2x + 8) + (2x + 13)) \xrightarrow{x = \frac{3}{2}} 2 \times ((3 + 8) + (3 + 13)) = 2 \times (11 + 16) \\ &= 2 \times 27 = 54 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC ، ارتفاع وارد بر وتر (CD) را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا بر ضلع EF نیز در نقطه K عمود شود. حالا طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه و همچنین قضیه فیثاغورس داریم:



$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB = 10$$

$$AC^2 = AD \cdot AB \Rightarrow AD = \frac{6^2}{10} = 3.6 \Rightarrow BD = 6.4$$

$$CD = \frac{AC \times BC}{AB} = \frac{6 \times 8}{10} = 4.8$$

چهارضلعی $AFKD$ مستطیل است، پس $FK = AD = 3.6$. از طرفی طول DK با هر یک از اضلاع مربع یا همان وتر مثلث برابر است. پس در مثلث قائم‌الزاویه CFK داریم:

$$\begin{aligned} CF^2 &= FK^2 + CK^2 \Rightarrow CF^2 = AD^2 + \left(CD + \frac{DK}{AB} \right)^2 \Rightarrow CF^2 = 3.6^2 + (4.8 + 1.0)^2 \\ \Rightarrow CF^2 &= \left(\frac{36}{10} \right)^2 + \left(\frac{148}{10} \right)^2 = \frac{18^2 + 148^2}{5^2} = \frac{5800}{25} = 58 \times 4 \Rightarrow CF = 2\sqrt{58} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به مختصات نقطه P داریم:

۳۹

$$\sin \theta = y = k$$

$$\cos \theta = x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow k^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow k^2 + \frac{8}{9} = 1 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

توجه کنید که p در ناحیه چهارم است. پس مقدار k باید منفی باشد.

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (1)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. همانطور که می‌دانیم:

۴۰

$$\frac{\cos \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\sqrt{27}}{8} \xrightarrow{(1)} \cos^2 \alpha = \frac{\sqrt{27}}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{27}}{8}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه اول}} \alpha = 30^\circ \Rightarrow \cot \alpha = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۴۱

$$P + \rho_2 g \Delta h_2 - \rho_1 g \Delta h_1 = P. \Rightarrow P + 4000 \times 10 \times \frac{5}{100} - 2000 \times 10 \times \frac{5}{100} = 98 \times 10^2$$

$$\Rightarrow P = 98 \times 10^2 + 10^2 - 2 \times 10^2 = 97 \times 10^2 \text{ Pa}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا فاصله نقطه B تا سطح آزاد مایع را می‌یابیم. با توجه به اینکه فشار پیمانه‌ای نقطه A $(P_A - P.)$ سه برابر فشار پیمانه‌ای نقطه B $(P_B - P.)$ است، می‌توان نوشت:

$$P_{A \text{ پیمانه ای}} = 3 P_{B \text{ پیمانه ای}} \Rightarrow P_A - P. = 3(P_B - P.) \xrightarrow{\substack{P_A = P. + \rho g h_A \\ P_B = P. + \rho g h_B}} \\ P. + \rho_{\text{مایع}} g h_A - P. = 3(P. + \rho_{\text{مایع}} g h_B - P.) \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} g h_A = 3 \rho_{\text{مایع}} g h_B \\ \Rightarrow h_A = 3 h_B \xrightarrow{h_A = 90 \text{ cm}} 90 = 3 h_B \Rightarrow h_B = 30 \text{ cm}$$

اکنون اختلاف فشار کل بین دو نقطه A و B را می‌یابیم:

$$P_A - P_B = P. + \rho_{\text{مایع}} g h_A - (P. + \rho_{\text{مایع}} g h_B) \Rightarrow P_A - P_B = \rho_{\text{مایع}} g (h_A - h_B)$$

$$\xrightarrow{\substack{\rho_{\text{مایع}} = 3/4 \frac{g}{\text{cm}^3} \\ h_A = 90 \text{ cm}, h_B = 30 \text{ cm}}} P_A - P_B = 3/4 \times g \times (90 - 30) = 34 \times g \times 6$$

در آخر، مشخص می‌کنیم فشار $34 \times g \times 6$ که بر حسب سانتیمتر مایع است، چند سانتیمتر جیوه می‌شود.

$$34 \times g \times 6 = \rho_{\text{جیوه}} \times g \times h_{\text{جیوه}} \Rightarrow 34 \times 6 = 13/6 \times h_{\text{جیوه}} \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = 15 \text{ cm} \Rightarrow P_A - P_B = 15 \text{ cmHg}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از رابطه چگالی مخلوط داریم:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{V_1 + V_2 + V_3} \\ V_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} = \frac{45}{3} + \frac{100}{5} + \frac{30}{2} = 50 \text{ cm}^3$$

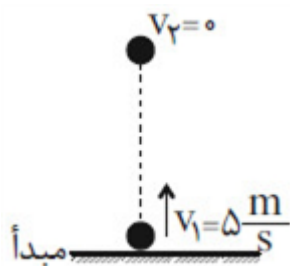
چون ۴٪ از حجم مخلوط تبخیر می‌شود، پس حجم باقی مانده برابر با $0.96 \times 50 \text{ cm}^3$ است.

$$m_{\text{مخلوط}} = m_1 + m_2 + m_3 = 45 + 100 + 30 = 175 g$$

چون ۷ گرم از مواد تبخیر می‌شود، پس جرم باقی مانده برابر با $168 g$ است.

$$\rho_{\text{مخلوط باقی مانده}} = \frac{168}{0.96 \times 50} = 3/5 \frac{g}{\text{cm}^3}$$

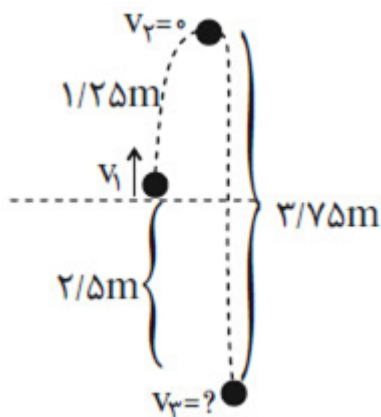
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از آنجا که گلوله همراه بالن حرکت می‌کند پس دارای تندی $18 \frac{\text{km}}{h}$ یا $5 \frac{m}{s}$ است. با در نظر گرفتن محل رها شدن گلوله به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی، ارتفاعی که گلوله بالا می‌رود تا به نقطه اوج برسد را محاسبه می‌کنیم:



$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = m g h_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 5^2 = 10 \times h_2 \Rightarrow h_2 = 1/25 m$$

پس گلوله تا رسیدن به اوج $1/25 m$ را طی کرده بنابراین بعد از آن باید $3/25 m$ را طی کند.



$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2 \xrightarrow{h_2 = -2/25 m}$$

$$\frac{1}{2} \times 5^2 = \frac{1}{2} \times v_2^2 + 10 \times (-2/25) \Rightarrow 12/5 = \frac{1}{2} v_2^2 - 25$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_2^2 = 37/5 \Rightarrow v_2^2 = 74 \Rightarrow v_2 = 5\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا یکای آهنگ مصرف انرژی یا همان توان، که آن را با D نشان داده‌ایم، می‌یابیم:

$$[توان] = \frac{[انرژی]}{[زمان]} \Rightarrow [D] = \frac{J}{s} \xrightarrow{J=N.m} [D] = \frac{N.m}{s} \quad (۱)$$

$$[P] = \frac{[F]}{[A]} \Rightarrow [P] = \frac{N}{m^2} \quad (۲) \quad \text{اکنون یکای فشار (P) را می‌یابیم:}$$

در این قسمت به کمک رابطه‌های ۱ و ۲ یکای کمیت‌های B و C را پیدا می‌کنیم:

$$[D] = \frac{[F][B]}{[C]} \Rightarrow \frac{N.m}{s} = \frac{N.[B]}{[C]} \Rightarrow [C] = \frac{[B].s}{m} \quad (۳)$$

$$[D] = \frac{[P][B]^2}{[C]} \xrightarrow{(۱),(۲),(۳)} \frac{N.m}{s} = \frac{\frac{N}{m^2} \cdot [B]^2}{\frac{[B].s}{m}} \quad \text{هم‌چنین داریم:}$$

$$[B]^2 = m^2 \Rightarrow [B] = m \quad (۴)$$

$$\xrightarrow{(۳),(۴)} [C] = \frac{m.s}{m} \Rightarrow [C] = s$$

$$\frac{[B]}{[C]^2} = \frac{m}{s^2}$$

در آخر یکای $\frac{B}{C^2}$ برابر است با:

بنابراین $\frac{m}{s^2}$ یکای کمیت شتاب است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا حجم قطعه سنگ را به دست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} \xrightarrow{m=600g, \rho=4 \frac{g}{cm^3}} V = \frac{600}{4} = 150 \text{ cm}^3$$

لذا 150 cm^3 روغن بالا می‌آید که بخشی از آن قسمت خالی ظرف را پر می‌کند و بخش دیگر، از ظرف خارج می‌شود. بنابراین حجم روغن ریخته شده از ظرف، از تفاضل حجم کل روغن بالا آمده و قسمت خالی ظرف به دست می‌آید.

$$V_{\text{ریخته شده}} = V_{\text{کل}} - V_{\text{قسمت خالی}} = V_{\text{کل}} - Ah_{\text{قسمت خالی}} \Rightarrow V_{\text{ریخته شده}} = 150 - 4(25) = 150 - 100 = 50 \text{ cm}^3$$

در نهایت با استفاده از رابطه چگالی، جرم روغن ریخته شده را به دست می‌آوریم:

$$m_{\text{ریخته شده}} = V_{\text{ریخته شده}} \rho_{\text{روغن}} = 50 \left(\frac{0.8}{1} \right) = 40 \text{ g}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون قطر مقطع قسمت پهن تر دو برابر قطر مقطع قسمت باریک تر است، پس سطح مقطع قسمت

پهن تر چهار برابر سطح مقطع قسمت باریک تر است، چرا که رابطه مساحت به صورت $A = \frac{\pi D^2}{4}$ است (که D قطر است).

با توجه به رابطه آهنگ پر شدن مخزن، زمان پر شدن هر بخش را به دست آورده و جمع آن‌ها را برابر زمان کل قرار می‌دهیم.

$$\text{آهنگ پر شدن} = \frac{\text{حجم پر شده}}{\text{زمان}} \Rightarrow t = \frac{V}{\text{آهنگ پر شدن}}$$

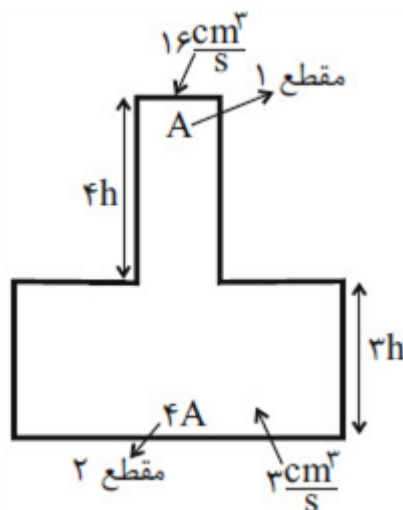
$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{A \times 4h}{16} = \frac{1}{4} Ah \\ t_2 = \frac{4A \times 3h}{4} = 3 Ah \end{cases}$$

$$t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 \xrightarrow{t_{\text{کل}} = 85s} 85 = \frac{1}{4} Ah + 3 Ah \Rightarrow Ah = 20 \text{ cm}^3$$

با داشتن Ah می‌توانیم حجم کل مخزن را حساب کنیم:

$$V = V_1 + V_2 \Rightarrow V_{\text{مخزن}} = (A \times 4h + 4A \times 3h) \Rightarrow V_{\text{مخزن}} = 16 Ah$$

$$\xrightarrow{Ah = 20 \text{ cm}^3} V_{\text{مخزن}} = 16 \times 20 = 320 \text{ cm}^3 = 0.32 L$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقاط هم‌تراز درون یک مایع فشار یکسانی دارند. داریم:

$$P_A = P_B$$

$$P_{\text{مخزن}} = P_{\text{مایع}} + P_{\text{هوا}}$$

چون سؤال با یکای سانتی‌متر جیوه کار کرده، پس باید $P_{\text{مایع}}$ را بر حسب سانتی‌متر جیوه تعیین کنیم:

$$h = 19 - 7 = 12 \text{ cm}$$

$$P_{\text{مایع}} = P_{\text{جیوه}} \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} gh_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}} gh_{\text{جیوه}} \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} h_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}} h_{\text{جیوه}}$$

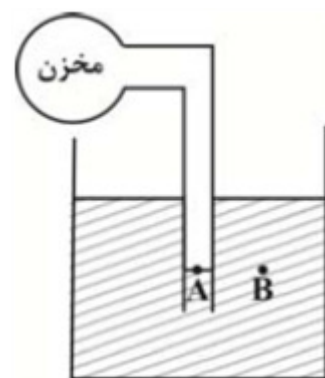
$$\Rightarrow 6/8 \times 12 = 13/6 \times h_{\text{جیوه}} \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = 6 \text{ cm}$$

پس $P_{\text{مایع}}$ برابر ۶ cmHg است.

$$P_{\text{مخزن}} = P_{\text{مایع}} + P_{\text{هوا}} = 6 + 72 = 78 \text{ cmHg}$$

$$P_{\text{پیمانه‌ای}} = P_{\text{مخزن}} - P_{\text{هوا}} = 78 - 72 = +6 \text{ cmHg}$$

اکنون فشار پیمانه‌ای برابر است با:



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون شکل ظرف استوانه‌ای است، فشار ناشی از مایع به کف ظرف از رابطه $P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A}$ به دست می‌آید که در آن A ، مساحت کف ظرف و m جرم مایع است. تغییر فشار ناشی از اضافه کردن مایعی که جرم آن دو برابر جرم جیوه

داخل ظرف است. بنابراین، ابتدا جرم جیوه را می‌یابیم:

$$\Delta P = \frac{m_{\text{مایع}} g}{A} \xrightarrow{m_{\text{مایع}} = 2m_{\text{جیوه}}} \Delta P = \frac{2m_{\text{جیوه}} g}{A} \xrightarrow{\substack{\Delta P = 10/8 \times 10^3 \text{ Pa} \\ g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}, A = 50 \times 10^{-4} \text{ m}^2}}$$

$$10/8 \times 10^3 = \frac{2m_{\text{جیوه}} \times 10}{50 \times 10^{-4}} \Rightarrow m_{\text{جیوه}} = 2/7 \text{ kg} = 2700 \text{ g}$$

اکنون با استفاده از رابطه چگالی، ارتفاع جیوه را محاسبه می‌کنیم:

$$m_{\text{جیوه}} = \rho_{\text{جیوه}} V = \rho_{\text{جیوه}} Ah \xrightarrow{\substack{\rho_{\text{جیوه}} = 13/5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\ A = 50 \text{ cm}^2, m_{\text{جیوه}} = 2700 \text{ g}}}$$

$$2700 = 13/5 \times 50 \times h \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا با استفاده از معادله پیوستگی و با توجه به اینکه $D_1 - D_2 = 4 \text{ cm}$ است، قطر سطح مقطع ۲

را می‌یابیم:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \xrightarrow{A = \pi \frac{D^2}{4}} \pi \frac{D_1^2}{4} v_1 = \pi \frac{D_2^2}{4} v_2 \xrightarrow{\substack{v_2 = 3/2 \frac{m}{s} \\ v_1 = 0.8 \frac{m}{s}}} D_1^2 \times 3/2 = D_2^2 \times 0.8 \Rightarrow 4 D_2^2 = D_1^2 \Rightarrow D_1 = 2 D_2$$

$$D_1 - D_2 = 4 \xrightarrow{D_1 = 2 D_2} 2 D_2 - D_2 = 4 \Rightarrow D_2 = 4 \text{ cm} = 4 \times 10^{-2} \text{ m}$$

اکنون با استفاده از آهنگ جریان شارح از سطح مقطع ۲، به صورت زیر حجم آب خروجی از این سطح مقطع را می‌یابیم، دقت کنید، آهنگ جریان شارح برابر Av است.

$$\text{آهنگ جریان شارح از سطح مقطع ۲} = \frac{\text{حجم شارح}}{\text{زمان}} \Rightarrow A_2 v_2 = \frac{V_2}{t} \Rightarrow \pi \frac{D_2^2}{4} v_2 = \frac{V_2}{t}$$

$$\xrightarrow{D_2 = 4 \times 10^{-2} \text{ m}, v_2 = 3/2 \frac{m}{s}, t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \pi = 3} 3 \times \frac{16 \times 10^{-4}}{4} \times 3/2 \Rightarrow \frac{V_2}{60} \Rightarrow V_2 = 230 / 4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\xrightarrow{1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ L}} V_2 = 230 / 4 \times 10^{-3} \times 10^3 \text{ L} = 230 / 4 \text{ L}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا سرعت و زمان بر حسب واحدهای SI می‌نویسیم:

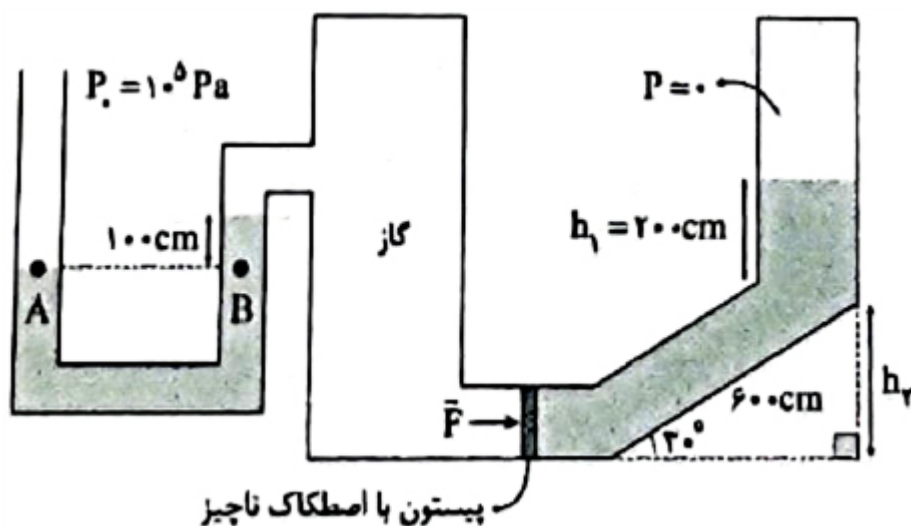
$$v = 1 \frac{\mu\text{m}}{\text{ns}} = \frac{10^{-6} \text{ m}}{10^{-9} \text{ s}} = 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t = 1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s}$$

حال با استفاده از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ، واحد شتاب در این دستگاه را بر حسب $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ محاسبه می‌کنیم.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10^{-3} \text{ s}} = 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا به کمک لوله U شکل و سطح هم تراز، فشار گاز داخل مخزن را به دست می آوریم:



پیستون با اصطکاک ناچیز

$$P_A = P_B \Rightarrow P_g = P_{\text{گاز}} + \rho gh \Rightarrow 10^5 = P_{\text{گاز}} + 5 \times 10^3 \times 10 \times 1$$

$$\Rightarrow 10^5 = P_{\text{گاز}} + 5 \times 10^4 \Rightarrow P_{\text{گاز}} = 5 \times 10^4 \text{ Pa}$$

از طرفی برای این که پیستون ساکن بماند، باید برآیند نیروهای وارد بر پیستون، صفر باشد. یعنی فشار ناشی از گاز و نیروی $\vec{F}$ در سمت چپ پیستون با فشار ناشی از مایع در سمت راست پیستون، برابر باشد. بنابراین داریم:

$$P_{\text{گاز}} + \frac{F}{A} = P_{\text{مایع}} \Rightarrow P_{\text{گاز}} + \frac{F}{A} = \rho g(h_1 + h_2) \Rightarrow 5 \times 10^4 + \frac{F}{10^{-4}} = 5 \times 10^3 \times 10(2 + 3)$$

$$\Rightarrow 5 + F = 5 \times 5 \Rightarrow 5 + F = 25 \Rightarrow F = 20 \text{ N}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بر طبق قضیه کار - انرژی جنبشی، تغییرات انرژی جنبشی جسم برابر با کار کل انجام شده روی جسم

$$\Delta K = W_t \Rightarrow K_2 - K_1 = W_F + W_{f_k} + W_{F_N} + W_{\text{mg}} \quad \text{است.}$$

کافی است کار هریک از نیروها را به دست آوریم:

$$W_F = Fd \cos 53^\circ = 600 \times 5 \times \frac{6}{10} = 1800 \text{ J}$$

$$W_{f_k} = f_k d \cos 180^\circ = 400 \times 5 \times (-1) = -2000 \text{ J}$$

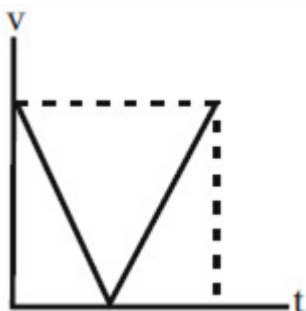
$$W_{\text{mg}} = 0 \quad \text{از آنجایی که نیروی } \vec{F}_N \text{ و نیروی وزن هر دو عمود بر جابه جایی می باشند، داریم:}$$

$$W_{F_N} = 0$$

$$K_2 - K_1 = 1800 - 2000 + 0 + 0 = -200 \text{ J}$$

بنابراین داریم:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون گلوله در شرایط خلأ به طرف بالا پرتاب می‌شود، پس اصطکاک و مقاومت هوا نداریم و انرژی مکانیکی آن در طول مسیر همواره ثابت است. همچنین اندازه شتاب حرکت جسم نیز ثابت و برابر شتاب گرانشی زمین است. به همین دلیل نمودار وسطی مربوط به اندازه شتاب جاذبه زمین و یا انرژی مکانیکی خواهد بود. از طرفی با حرکت به طرف بالا، انرژی جنبشی و تندی حرکت کاهش یافته و برعکس آن، فاصله از مبدأ پتانسیل گرانشی و انرژی پتانسیل گرانشی افزایش می‌یابد؛ پس نمودار ۱ مربوط به انرژی جنبشی یا تندی حرکت گلوله است.



خود تندی، نموداری دو مرحله‌ای است که هر مرحله‌اش، خط راست است:

اگر نمودار v^2 را رسم کنیم، به تبعیت از نمودار K که سهمی است، سهمی می‌شود. با توجه به این که سطح افقی به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی در نظر گرفته شده است، بنابراین با افزایش ارتفاع از سطح زمین، انرژی پتانسیل افزایش و سپس کاهش می‌یابد. بنابراین نمودار آن مطابق شکل نمودار ۳ می‌شود. به عنوان تمرین می‌توان معادله آن

$$U = \frac{-1}{2} mg^2 t^2 + gmv \cdot t$$

را به دست آورید:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$P = P_{\text{مخزن گاز}} = (\rho gh_2 + P_{\cdot}) + \rho gh_1 \Rightarrow P = P_{\text{مخزن بزرگ}} + \rho gh_1$$

$$\Rightarrow P - P_{\cdot} = \rho gh_1 + \rho gh_2 = \rho g(h_1 + h_2)$$

$$\underbrace{Pa = P - P_{\cdot}}_{\text{فشار پیمانه ای}} = 1000 \times 10 \times (0.4 + 0.6) = 10000 \text{ Pa} = 10 \text{ kPa}$$

فشار پیمانه ای

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در صورت اضافه کردن روغن در شاخه سمت چپ، آب در شاخه سمت راست از سطح قبلی خود بالاتر می‌رود. افزایش فشار در نقطه A ناشی از ستون آبی است که به بالای سطح قبلی آب در شاخه سمت راست اضافه شده است. خواهیم داشت:
ارتفاع ستون روغن:

$$V_{\text{روغن}} = A_1 h_{\text{روغن}} \Rightarrow h_{\text{روغن}} = \frac{V}{A_1} = \frac{170 \text{ cm}^3}{10 \text{ cm}^2}$$

$$h_{\text{روغن}} = 17 \text{ cm}$$

حجم آب جابه‌جا شده در شاخه سمت چپ با حجم آب جابه‌جا شده در شاخه سمت راست با هم برابر است:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow A_1 x_1 = A_2 x_2 \Rightarrow 10 x_1 = 20 x_2 \Rightarrow x_1 = 2 x_2$$

با توجه به شکل، فشار در نقاط C و D به دلیل آنکه هم تراز هستند و در درون یک نوع مایع قرار دارند برابر است.

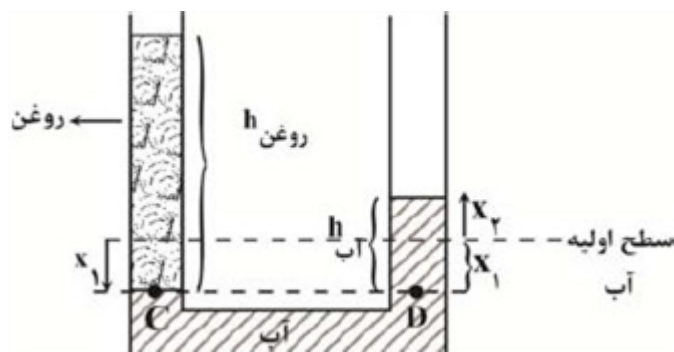
$$P_C = P_D \Rightarrow \rho_{\text{روغن}} g h_{\text{روغن}} + P_{\text{آب}} = P_{\text{آب}} + P_{\text{آب}} \Rightarrow \rho_{\text{روغن}} h_{\text{روغن}} = \rho_{\text{آب}} (x_1 + x_2)$$

$$0.8 \times 17 = 1 \times (2x_2 + x_2) \Rightarrow x_2 = 1/3 \text{ cm}$$

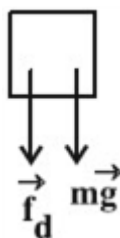
تغییر فشار ایجاد شده در نقطه A:

$$\Delta P_A = \rho_{\text{آب}} g x_2 = 1000 \times 10 \times \frac{1/3}{100} = 170 \text{ Pa} \Rightarrow h_{\text{Hg}} = \frac{\Delta P_A}{g \rho_{\text{Hg}}} = \frac{170}{13600 \times 10}$$

$$\Rightarrow h_{\text{Hg}} = 0.00125 \text{ m} = 1/25 \text{ mm}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا نیروی مقاومت هوا را هنگام بالا رفتن محاسبه می‌نماییم:

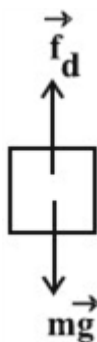


$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{\text{mg}} + W_{f_d} = K_{\text{آب}} - K_{\text{آب}}$$

$$\Rightarrow 0.1 \times 10 \times (55 - 30) \cos 180^\circ + f_d (55 - 30) \cos 180^\circ$$

$$= 0 - \frac{1}{3} \times 0.1 \times 10 \times 30^2 \Rightarrow -25 - 25 f_d = -45 \Rightarrow f_d = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \text{ N}$$

و در هنگام پایین آمدن، داریم:



$$W_{\text{mg}} + W_{f_d} = K_{\text{آب}} - K_{\text{آب}}$$

$$0.1 \times 10 \times 55 \cos 0^\circ + \frac{4}{5} \times 55 \cos 180^\circ = \frac{1}{3} \times 0.1 \times v^2$$

$$55 - 44 = \frac{1}{3} v^2 \Rightarrow v = \sqrt{33} = 2\sqrt{55} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مجموع جرم مایع (m_2) و جرم ظرف (m_1) برابر با $540g$ است، بنابراین:

$$m_1 + m_2 = 540g \xrightarrow{m_1=300g} 300 + m_2 = 540 \Rightarrow m_2 = 240g$$

مجموع جرم ظرف (m_1) و جرم روغن (m_3) برابر با $460g$ است، بنابراین:

$$m_1 + m_3 = 460g \xrightarrow{m_1=300g} 300 + m_3 = 460 \Rightarrow m_3 = 160g$$

از طرفی چون در هر دو حالت، ظرف با روغن مایع پر شده است، بنابراین حجم مایع و حجم روغن برابر هستند، بنابراین:

$$V_2 = V_3 \xrightarrow{V=\frac{m}{\rho}} \frac{m_2}{\rho_2} = \frac{m_3}{\rho_3} \Rightarrow \frac{240}{1/2} = \frac{160}{\rho_3} \Rightarrow \rho_3 = \frac{160 \times 1/2}{240} = 0.8 \frac{g}{cm^3}$$

$$\rho_3 = 0.8 \frac{g}{cm^3} \times \frac{10^3 cm^3}{1L} = 800 \frac{g}{L}$$

حال با استفاده از روش تبدیل زنجیره‌ای داریم:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ابعاد ظرف را به متر تبدیل می‌کنیم.

$$400 \text{ in} \times \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} \times \frac{10^{-2} m}{1 \text{ cm}} = 10 m$$

$$60 \text{ ft} \times \frac{12 \text{ in}}{1 \text{ ft}} \times \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} \times \frac{10^{-2} m}{1 \text{ cm}} = 60 \times 30 \times 10^{-2} m = 18 m$$

$$10 \text{ yard} \times \frac{3 \text{ ft}}{1 \text{ yard}} \times \frac{12 \text{ in}}{1 \text{ ft}} \times \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} \times \frac{10^{-2} m}{1 \text{ cm}} = 10 \times 3 \times 30 \times 10^{-2} m = 9 m$$

$$V_{\text{ظرف}} = 10 \times 18 \times 9 = 1620 m^3$$

$$\text{آهنگ ورودی خالص آب} = 1/2 - x = \frac{V_{\text{کل}}}{\Delta t}$$

در رابطه فوق، $\Delta t = 2/25$ شبانه‌روز است که ۲ شبانه‌روز یعنی ۴۸ ساعت و $\frac{1}{4}$ شبانه‌روز یعنی ۶ ساعت است، سپس کل زمان

۵۴ ساعت است.

$$(1/2 - x) \times 54 \times 60 = 1620 \Rightarrow 1/2 - x = 0.5 \Rightarrow x = 0.7 \frac{m^3}{\text{min}}$$

$$\text{آهنگ افزایش ارتفاع} = \frac{\text{آهنگ ورودی خالص}}{\text{مساحت کوچک‌ترین وجه}} = \frac{0.5}{9 \times 10} = \frac{0.5}{90} \frac{m}{\text{min}} = \frac{50}{90} \frac{\text{cm}}{\text{min}} = \frac{5}{9} \frac{\text{cm}}{\text{min}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{طول } a \\ \text{عرض } b \\ \text{ارتفاع } c \end{array} \right. \text{ قبل از تغییر } 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

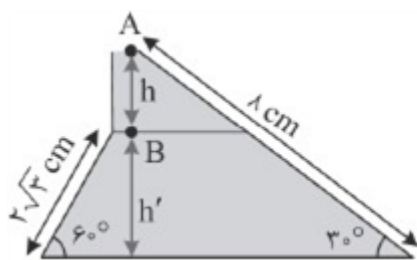
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{طول } 3a \\ \text{عرض } 1/5b \\ \text{ارتفاع } nc \end{array} \right. \text{ بعد از تغییر } 2$$

$$V_2 = 10/8 V_1$$

$$(3a \times 1/5b \times nc) = 10/8 (a \times b \times c) \Rightarrow 4/5 ab \times nc = 10/8 abc$$

$$nc = \frac{10/8 abc}{4/5 ab} = 2/4 c \Rightarrow n = 2/4$$

اگر از نقطه‌ی A تا B را h و از نقطه‌ی B تا کف ظرف را h' در نظر بگیریم داریم:



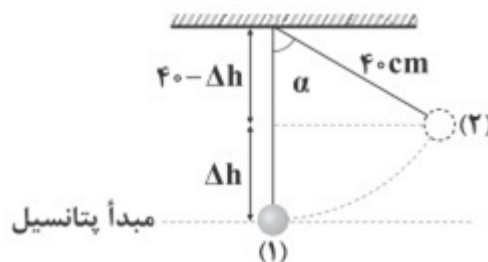
$$\left. \begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h+h'}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow h+h' = 2 \text{ cm} \\ \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{h'}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h' = 3 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \Rightarrow h = 1 \text{ cm}$$

نقطه‌ی A در سطح مایع و دارای فشار P و نقطه‌ی B در عمق ۱ cm از مایع جیوه قرار دارد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} P_A &= P_0 = 75 \text{ cmHg} \\ P_B &= P_0 + P_{\text{مایع}} = 75 + 1 = 76 \text{ cmHg} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{75}{76}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هنگامی که کامیون با تندی ثابت $\frac{2}{s} m$ به سمت راست حرکت می‌کند، گلوله‌ی آونگ نیز به همراه آن

با همین مقدار تندی به سمت راست حرکت می‌کند. هنگامی که کامیون می‌ایستد، آونگ هم‌چنان تندی خود را حفظ کرده و مطابق شکل زیر به سمت راست منحرف می‌شود. آونگ حداکثر تا نقطه‌ای بالا می‌آید که تمام انرژی جنبشی آن به انرژی پتانسیل گرانشی تبدیل شود. با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی برای آونگ می‌توان نوشت:



$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 \Rightarrow \cancel{U_1} + K_1 = U_2 + \cancel{K_2} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 &= mg\Delta h \xrightarrow{v=2 \frac{m}{s}} \frac{1}{2} \times 2^2 = 10 \times \Delta h \\ \Rightarrow \Delta h &= 0.2 \text{ m} = 20 \text{ cm} \end{aligned}$$

برای محاسبه‌ی زاویه‌ی α مطابق شکل بالا داریم:

$$\cos \alpha = \frac{40 - \Delta h}{40} = \frac{40 - 20}{40} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

$$۱) 0.12 \text{ mm}^3 \times \left(\frac{10^{-3}}{1 \text{ mm}} \right)^3 \times \left(\frac{1 \text{ nm}}{10^{-9} \text{ m}} \right)^3 = 1200 \times 10^{14} \text{ nm}^3 (\times)$$

$$۲) 0.3 \times 10^6 \text{ pm}^3 \times \left(\frac{10^{-12} \text{ m}}{1 \text{ pm}} \right)^3 \times \left(\frac{1 \mu\text{m}}{10^{-6} \text{ m}} \right)^3 = 3 \times 10^{-7} \mu\text{m}^3 (\times)$$

$$۳) 6400 \text{ nA} \times \left(\frac{10^{-9} \text{ A}}{1 \text{ nA}} \right) \times \left(\frac{1 \text{ mA}}{10^{-3} \text{ A}} \right) = 0.064 \text{ mA} (\checkmark)$$

$$۴) 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \left(\frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \times \left(\frac{1 \text{ cm}}{10^{-2} \text{ m}} \right) \times \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) = 500 \frac{\text{cm}}{\text{s}} (\times)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. قضیه‌ی کار و انرژی جنبشی را برای گلوله در هنگام بالا رفتن تا ارتفاع اوج می‌نویسیم:

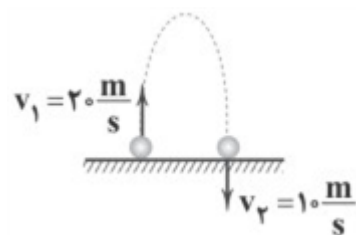
$$W_t = K_2 - K_1 \Rightarrow W_{\text{وزن}} + W_{\text{مقاومت هوا}} = K_2 - K_1 \Rightarrow -mgh + W_f = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (I)$$

قضیه‌ی کار و انرژی جنبشی را برای مسیر برگشت هم می‌نویسیم:

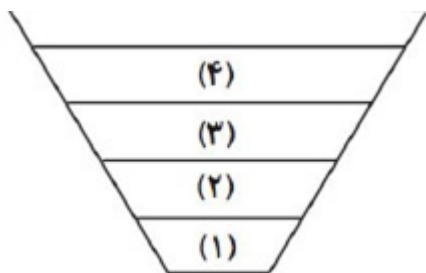
$$W_t = K_2 - K_1 \Rightarrow W_{\text{وزن}} + W_{\text{مقاومت هوا}} = K_2 - K_1 \Rightarrow mgh + W_f = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow mgh + W_f - (-mgh + W_f) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \left(-\frac{1}{2}mv_1^2\right)$$

$$\Rightarrow 2gh = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{1}{2}v_1^2 \Rightarrow 2 \times 10 \times h = \frac{1}{2} \times (10)^2 + \frac{1}{2} \times (20)^2 \Rightarrow h = 12.5 \text{ m}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مایع‌های مخلوط نشدنی، مایع‌ها به ترتیب کاهش چگالی روی یک‌دیگر قرار می‌گیرند. به طوری که مایعی که بیش‌ترین چگالی را دارد، در ته ظرف و مایعی که کم‌ترین چگالی را دارد در بالاترین قسمت قرار می‌گیرد. با توجه به شکل:



$$\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > \rho_4 \xrightarrow{m_1 = m_2 = m_3 = m_4} V_1 < V_2 < V_3 < V_4$$

که با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌ی ۴ صحیح است.

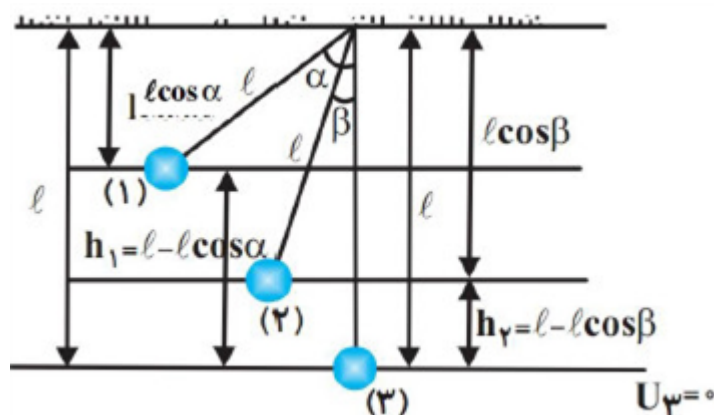
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مقاومت هوا صرف نظر شده است. پس انرژی مکانیکی گلوله در مسیر پایسته است.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow 0 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 2gh_1 - 2gh_2 = 2g(h_1 - h_2)$$

$$\begin{cases} h_1 = L - L \cos \alpha \\ h_2 = L - L \cos \beta \end{cases} \Rightarrow v_2^2 = 2g(L - L \cos \alpha - L + L \cos \beta)$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2gL(\cos \beta - \cos \alpha)}$$



بنابراین اگر گلوله‌ای را به اندازه‌ی زاویه‌ی α از وضع تعادل خارج کرده، رها کنیم، تندی آن در هر لحظه که با خط قائم، زاویه‌ی β بسازد از رابطه‌ی بالا به دست می‌آید.

$$1 \Rightarrow 2 \begin{cases} \alpha = 53^\circ \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow v_2 = v = \sqrt{2gL(\cos 0 - \cos 53^\circ)} \Rightarrow v = \sqrt{2 \times 10 \times L \times 0.6}$$

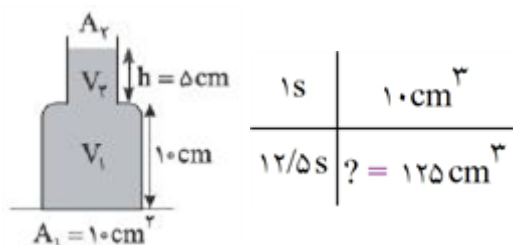
$$\Rightarrow v = \sqrt{12L}$$

$$\begin{cases} \alpha = 53^\circ \\ \beta = ? \\ v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}v \end{cases} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gL(\cos \beta - \cos 53^\circ)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{12L} = \sqrt{2} \sqrt{L} = \sqrt{2 \cdot L(\cos \beta - 0.6)}$$

$$\Rightarrow 4L = 2 \cdot L(\cos \beta - 0.6) \Rightarrow \cos \beta = 0.6 + 0.6 = 1.2 \Rightarrow \beta = 37^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در مدت $12/5$ s مقدار آب خروجی از شیر برابر است با:



که این آب ابتدا پایین ظرف را پر می‌کند و مابقی آب ریخته شده قسمت بالای ظرف را پر خواهد کرد:

$$V_{\text{ج}} = V_1 + V_2 \Rightarrow 120 = A_1 h_1 + A_2 h_2 \Rightarrow 120 = 100 + 5A_2 \Rightarrow A_2 = 4 \text{ cm}^2$$

حال A_2 را بر حسب میلی‌متر مربع به دست می‌آوریم:

$$4 \text{ cm}^2 \times \frac{(10)^2 \text{ mm}^2}{1 \text{ cm}^2} = 400 \text{ mm}^2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فشار در ته لوله برابر است با فشار هوا + فشار جیوه

$$P_1 = \rho_{\text{جیوه}} \times h + P_{\text{هوا}}$$

برای راحتی بیشتر، بهتر است فشار هوا را به واحد سانتی‌متر جیوه تبدیل کنیم.

$$\begin{aligned} 1.0336 \times 10^5 &= \rho_{\text{جیوه}} \times g \times h \\ \rightarrow h &= \frac{1.0336}{13600 \times 10} = \frac{1.0336}{13600} = \frac{5168 \times 2}{6800 \times 2} = \frac{2584}{3400} = \frac{323}{425} = \frac{19}{25} \times 10 = \frac{19}{25} m = 76 \text{ cm} \end{aligned}$$

پس:

$$P_1 = \rho_{\text{جیوه}} \times h + P_{\text{هوا}} = 76 \text{ cmHg} + P_{\text{هوا}}$$

و می‌خواهیم که $P_2 = 2P_1$ باشد پس $P_2 = 160 \text{ cmHg}$ و داریم:

$$P_2 = x \text{ cmHg} + P_1 = x + 76 \rightarrow 160 = x + 76 \rightarrow x = 84 \text{ cm}$$

پس ارتفاع جیوه باید به ۸۴ سانتی‌متر برسد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شیب نمودار $V - m$ چگالی B ، ۳ برابر A است.

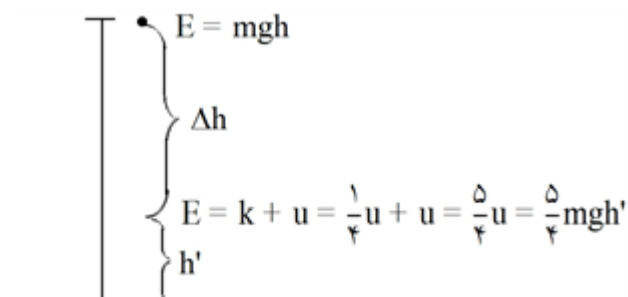
$$\rho_{\text{الیز}} = \frac{m_A + m_B}{V_A + V_B} \Rightarrow \rho = \frac{m}{\frac{\frac{2}{3}m}{\rho_A} + \frac{\frac{1}{3}m}{\rho_B}} = \frac{m}{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)m} \Rightarrow \rho = \frac{(3\rho_A)(m)}{\frac{11}{3}m} = \frac{15}{11}\rho_A$$

توجه داشته باشید وقتی اطلاعات برحسب m است، V را برحسب m حذف می‌کنیم.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی پایستگی انرژی مکانیکی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E_1 - \frac{20}{100} K_1 &= E_2 \Rightarrow K_1 - \frac{20}{100} K_1 = U_2 + K_2 \\ \frac{80}{100} K_1 &= U_2 + K_2 \\ \Rightarrow \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} \times m \times 40^2 \right) &= [m(10)(44)] + \frac{1}{2} m v^2 \\ \Rightarrow 640 m &= 440 m + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v^2 = 400 \Rightarrow v = 20 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\begin{aligned} mgh &= \frac{5}{4} mgh' \Rightarrow h' = \frac{4}{5} h \\ \frac{\Delta h}{h} &= \frac{h - \frac{4}{5} h}{h} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. جرم آلیاژ برابر با مجموع جرم دو فلز است:

$$m_{\text{آلیاژ}} = m_1 + m_2 \Rightarrow m_1 + m_2 = 1/2 \times 10^3 g$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 500 \text{ cm}^3 \quad \text{حجم آلیاژ برابر است با:}$$

همچنین حجم آلیاژ برابر با مجموع حجم دو فلز است:

$$V_1 + V_2 = 500 \text{ cm}^3 \xrightarrow{V = \frac{m}{\rho}} \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} = 500 \quad \begin{matrix} \rho_1 = 2 \frac{g}{\text{cm}^3} \\ \rho_2 = 3 \frac{g}{\text{cm}^3} \end{matrix}$$

$$\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{3/6} = 500 \xrightarrow{m_1 = 1200 - m_2} \frac{1200 - m_2}{2} + \frac{m_2}{3/6} = 500$$

$$\Rightarrow 420 - 3/6 m_2 + 2 m_2 = 3600 \Rightarrow 1/6 m_2 = 720 \Rightarrow m_2 = 450 g$$

$$2 \text{ درصد جرم فلز ۲} = \frac{m_2}{m_{\text{آلیاژ}}} \times 100 = \frac{450}{1200} \times 100 = 37.5\%$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از آنجایی که عبارت سمت چپ رابطه‌ی فرضی، یعنی x بیانگر کمیت طول در دستگاه SI است،

بنابراین یکای هر یک از جمله‌های سمت راست رابطه‌ی فرضی داده‌شده نیز باید بر حسب متر باشد:

$$[\alpha^4] = m \Rightarrow [\alpha] \cdot s^4 = m \Rightarrow [\alpha] = \frac{m}{s^4}$$

$$\left[\frac{\beta}{t} \right] = m \Rightarrow m = \frac{[\beta]}{s} \Rightarrow [\beta] = m \cdot s$$

در ادامه با توجه به یکسان بودن یکای حجم و پارامتر فرضی $\alpha^p \beta^q$ داریم:

$$[V] = [\alpha^p \beta^q] \Rightarrow m^3 = [\alpha]^p \times [\beta]^q \Rightarrow \left(\frac{m}{s^4} \right)^p \times (m \cdot s)^q = m^3$$

$$\Rightarrow \frac{m^p}{s^{4p}} \times (m^q \cdot s^q) = m^3$$

$$\Rightarrow m^{(p+q)} s^{(q-4p)} = m^3 \Rightarrow \begin{cases} q - 4p = 0 \Rightarrow q = 4p \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{1}{4} \\ p + q = 3 \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

الف) نادرست - الکترون‌های یک لایه ممکن است (l)‌های یکسانی داشته باشند؛ برای مثال $n = 1$ دارای گنجایش دو الکترون است که هر دو الکترون دارای $l = 0$ هستند.

ب) درست - بر اساس مدل اتمی بور، انرژی یک الکترون با فاصله آن از هسته رابطه مستقیم دارد.

پ) درست - هر چه الکترون هنگام انتقال به لایه‌های بالاتر، انرژی بیشتری جذب کند، هنگام بازگشت، انرژی بیشتری آزاد می‌کند که چون انرژی با طول موج رابطه عکس دارد، پرتویی با طول موج کوتاه‌تری منتشر می‌شود.

ت) درست - عنصر $^{24}_{18}\text{Cr}$ که در دوره ۴ جدول تناوبی قرار دارد. دارای آرایش الکترونی $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$ [Ar] است که الکترون‌های ظرفیتی این عنصر در زیرلایه‌های $3d$ و $4s$ قرار دارند که هر دو زیرلایه نیمه پر هستند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. همه سلول‌های بدن، گلوکز نشان‌دار و معمولی را به یک میزان جذب می‌کنند ولی میزان جذب هر دو در توده‌های سرطانی، زیادتر است. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: فراوانی A^1 برابر ۲۰ درصد A^{11} برابر ۸۰ درصد می‌شود.

گزینه ۳: مطابق یک قاعده کلی اگر $\frac{n}{p} \geq 1/5$ باشد اغلب آن اتم پرتوزا است.

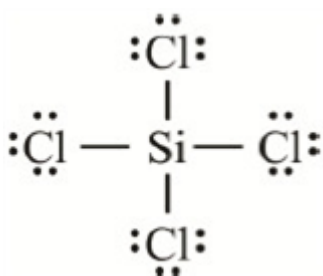
$$\frac{n}{p} \geq 1/5 \Rightarrow n \geq 1/5 p \Rightarrow (n-p) \geq 0/5 p \Rightarrow (n-p) \geq 0/5 z$$

گزینه ۴: هیدروژن دو ایزوتوپ پایدار دارد 1H و 2H اگر همه N_A عدد هیدروژن از نوع 2H باشند جرم آن‌ها ۲ گرم خواهد شد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی موارد:

(۱) نادرست است. زیرا عنصر A ، سیلیسیم بوده و یک شبه‌فلز است.

(۲) درست است. E فلز (Be) است و نخستین عنصر گروه دوم است و D می‌تواند پتاسیم (K) باشد که نخستین عنصر دوره چهارم است.

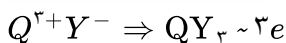
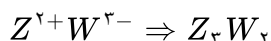
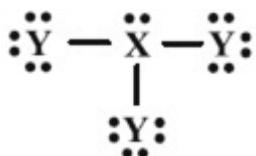
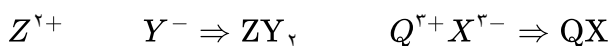


(۳) درست است. کلرید عنصر A ، SiCl_4 است که ساختار روبه‌رو را دارد:

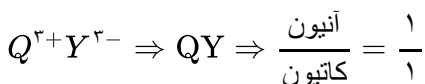
(۴) درست است. هر عنصر دارای $2e^-$ تک است: $:\ddot{\text{X}}:$ و $:\ddot{\text{E}}:$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی موارد:

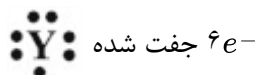
مورد اول: نادرست؛ با توجه به آرایش‌های الکترونی می‌توان دریافت که عدد اتمی عنصرهای موجود به صورت W_{17} ، Q_{13} ، Z_{56} ، Y_{35} ، X_{15} می‌باشد.



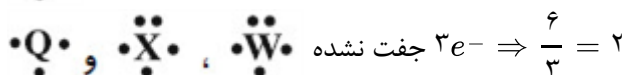
مورد دوم: درست



مورد سوم: نادرست



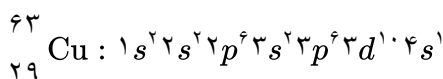
مورد چهارم: نادرست



فرمول شیمیایی	نام ترکیب	ساختار لوویس	تعداد جفت e^- ناپیوندی تعداد جفت e^- پیوندی
(۱) N_2O_3	دی نیتروژن تری اکسید ✓		$\times \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$
(۲) NCl_3	نیتروژن تری کلرید ✓		$\checkmark \frac{1}{3}$
(۳) HCN	هیدروژن سیانید ✓		$\times \frac{1}{4}$
(۴) Cl_2O	دی کلرو مونو اکسید ×		$\times \frac{1}{2} = 4$

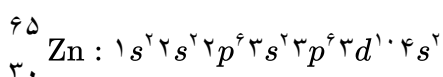
در ردیف اول ۲ مورد غلط وجود دارد.
در ردیف دوم غلط وجود ندارد.
در ردیف سوم ۱ مورد غلط وجود دارد.
در ردیف چهارم ۳ مورد غلط وجود دارد.
که در مجموع ۶ خانه حاوی اطلاعات غلط می باشد.

(آ) نادرست - آرایش الکترونی اتم به صورت زیر می باشد.



زیرلایه s دارای عدد کوانتومی فرعی صفر که همان $l = 0$ می باشد و دارای ۷ الکترون و زیرلایه p دارای عدد کوانتومی فرعی ۱ که همان $l = 1$ است و دارای ۱۲ الکترون است که با هم برابر نیستند.

(ب) درست - اتم دارای ۳۰ پروتون عنصر روی می باشد که دارای آرایش الکترونی زیر است.



که زیرلایه d آن همانند اتم موردنظر دارای ۱۰ الکترون است.

(پ) درست. A عدد جرمی که مجموع p و n است برابر ۶۳ بوده و چون ۲۹ پروتون داریم پس دارای ۳۴ نوترون است. پس تفاوت

$${}_{29}^{63}\text{Cu} : n - p = A - Z = 63 - 29 = 34$$

نوترون و پروتون برابر ۵ است.

(ت) نادرست است - اتم های ${}_{28}^{63}\text{X}$ و ${}_{29}^{63}\text{A}$ به دلیل تفاوت در شمار پروتون ها نسبت به هم ایزوتوپ نیستند. ایزوتوپ ها دارای عدد

اتمی یکسان و عدد جرمی متفاوت می باشند.

(مثال: Mg^{2+}) یا آنیون پایدار (مثال: O^{2-}) باشد.

آرایش الکترون - نقطه‌ای هلیوم به صورت : He می‌باشد و این گاز نجیب واکنش‌ناپذیر است.
بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) درست - مجموع شمار عناصر این ۳ دوره برابر ۱۸ می‌باشد و در اتم Fe $4p^6$ تعداد ۶ الکترون با $l = 2$ وجود دارد.

(۲) درست - زیرا:

فرابنفش < پرتو ایکس < پرتو گاما : طول موج

(۳) درست - شامل عناصر B تا عنصر Ca 20

نام صحیح ترکیبات به صورت زیر است:

Cu_2S : مس (I) اکسید
 $MgBr_2$: منیزیم‌برمید
 $SiCl_4$: سیلیسیم
 Na_2O : سدیم‌اکسید
تتراکلرید

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ترتیب خروج گازها از مخلوط هوای مایع، در هنگام تقطیر جزء به جزء آن به صورت
 $O_2 \rightarrow Ar \rightarrow N_2$ می‌باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در دوره‌ی چهارم جدول تناوبی:

۱۰ عنصر وجود دارد که آرایش الکترونی اتم آن‌ها به زیرلایه‌ی دوم الکترونی ($4s^2$ یا $4p^2$) ختم می‌شود:

$4s^2$: ۲۰. Ca, ۲۱. Sc, ۲۲. Ti, ۲۳. V, ۲۵. Mn, ۲۶. Fe, ۲۷. Co, ۲۸. Ni, ۳۰. Zn

$4p^2$: ۳۲. Ge

۸ عنصر وجود دارد که زیرلایه‌ی $3d$ اتم آن‌ها به طور کامل از الکترون پر شده است این ۸ عنصر شامل $29 Cu$ تا $36 Kr$ هستند.
بنابراین گزینه‌ی (۲) پاسخ تست است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از آن‌جا که جرم مولی گازهای کربن مونوکسید (CO) و نیتروژن (N_2) یکسان و برابر با

$28 g \cdot mol^{-1}$ و هر مولکول از آن‌ها نیز شامل دو اتم است، در جرم‌های یکسان از این دو گاز، تعداد اتم‌ها با هم برابر است. بررسی
سایر گزینه‌ها:

(۱) گاز آرگون (Ar) در دوره‌ی سوم و گاز نئون (Ne) در دوره‌ی دوم جدول جای دارند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که
عدد جرمی و نیز جرم مولی Ar بیشتر از Ne است، یعنی تعداد مول و شمار اتم‌های یک گرم Ar در مقایسه با یک گرم Ne کمتر
است.

(۳) از آن‌جا که جرم مولی متان (CH_4) و آمونیاک (NH_3) به ترتیب برابر با ۱۶ و ۱۷ گرم بر مول است، تعداد مول و شمار
مولکول‌های یک گرم متان در مقایسه با یک گرم آمونیاک بیشتر است.

(۴) گازهای اکسیژن (O_2) و فلوئور (F_2) جرم‌های مولی متفاوتی دارند. در نتیجه در جرم‌های یکسان از این دو گاز، شمار
مولکول‌ها نمی‌توانند با هم برابر باشد.

در عناصر گروه ۱۸ جدول دوره‌ای، آرایش الکترونی و آرایش الکترون - نقطه‌ای هلیوم متفاوت از دیگر عناصرها است. بررسی سایر گزینه‌ها:

در اتم‌ها پس از ورود الکترون به زیرلایه‌ها، زیرلایه‌ها به ترتیب n و l مرتب می‌شوند. برای مثال پس از ورود الکترون به زیرلایه‌های $4s$ و $3d$ ، سطح انرژی زیرلایه $3d$ پایین‌تر از $4s$ قرار می‌گیرد و به همین دلیل است که در آرایش الکترونی عناصری که زیرلایه $3d$ دارای الکترون هستند، زیرلایه $3d$ پیش از زیرلایه $4s$ قرار می‌گیرد.

عبارت آ: آرایش الکترونی اتم x به صورت $[Ar] 3d^{10} 4s^2$ بوده که عنصری واسطه است.

عبارت ب: $14 = 30 - 16 \Rightarrow$ شمار الکترون ها $16 = [Ne] 3s^2 3p^4$ $A :$

$30 =$ شمار الکترون ها $3d^{10} 4s^2$ $x : [Ar]$

عبارت پ: x همان عنصر روی Zn و A همان عنصر گوگرد S است. ترکیب یونی حاصل از این دو عنصر به صورت ZnS است.

عبارت ت: A و D هر دو در گروه ۱۶ جدول دوره‌ای جای دارند. هم‌چنین A و E هر دو در دوره سوم قرار

گرفته‌اند. $34x : [Ar] 3d^{10} 4s^2 4p^4$

$12E : [Ne] 3s^2 3p^1$

اول: نادرست. $X \rightarrow {}_{27}Co$

دوم: درست. $(8 = 19 - 27)$

چهارم: نادرست. بار عنصر $31 \Leftarrow +3$

$(M^{3+}, E^{2-} \Rightarrow ME)$ درست $A \rightarrow {}_{35}Br$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا، با توجه به آرایش الکترونی، دو عنصر داده شده به ترتیب کلسیم و کلر هستند که فرمول شیمیایی ترکیب یونی حاصل از آن‌ها $CaCl_2$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عبارت‌های الف و ت درست هستند. بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را هلیوم تشکیل می‌دهد.

پ) یوکسیت، Al_2O_3 به همراه ناخالصی است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. موارد پ و ت درست است. بررسی برخی از موارد:

آ) کاتیون H^+ موجود در لایه‌های بالایی هواکره، الکترون ندارد.

ب) فراورده گوگرددار حاصل از سوختن کامل زغال سنگ، گاز SO_2 است که در هواکره ابتدا به گاز SO_3 تبدیل می‌شود و سپس از واکنش آب با گاز SO_3 ، سولفوریک اسید تولید می‌شود.

پ) مسمومیت با گاز CO می‌تواند سامانه عصبی را فلج کند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عناصرها در جدول دوره‌ای عناصر بر اساس افزایش عدد اتمی که همان تعداد پروتون‌های موجود در هسته اتم است، سازمان‌دهی شده‌اند. جدول تناوبی شامل ۷ دوره و ۱۸ گروه می‌باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تعداد عنصرهای هر تناوب برابر با حداکثر گنجایش الکترونی زیرلایه‌هایی است که در آن تناوب پر می‌شوند. اگر بنا به فرض این زیرلایه‌ها در تناوب پر شوند حداکثر گنجایش الکترونی آن‌ها ۵۰ است.

نوع زیرلایه	
s	۲
p	۶
d	۱۰
f	۱۴
g	۱۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌های نادرست:

- گزینه ۱: در همه نواحی اطراف هسته دیده می‌شود.
گزینه ۳: انرژی لایه‌های الکترونی پیرامون هسته هر اتم، ویژه همان اتم بوده و به عدد اتمی آن بستگی دارد.
گزینه ۴: انرژی در نگاه ماکروسکوپی، پیوسته و در نگاه میکروسکوپی گسسته یا کوانتومی است.

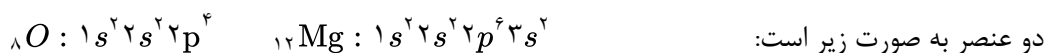
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. موارد سوم و پنجم نادرست هستند.

مورد سوم، لزوماً صحیح نیست، به عنوان مثال تعداد الکترون‌های لایه ظرفیت عناصر گروه ۲ بیشتر از گروه ۱ است، اما واکنش‌پذیری آن‌ها کمتر است.

در مورد پنجم، به عنوان مثال کربن و تیتانیوم هر دو ۴ الکترون ظرفیتی دارند، اما در یک گروه از جدول تناوبی قرار ندارند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. آرایش الکترونی آن به صورت $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$ است و در گروه ۱۴ جای دارد و تعداد الکترون‌های ظرفیت آن نیز برابر ۴ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اولین عنصر با شرایط گفته شده، اکسیژن است. دومین عنصر هم منیزیم است. آرایش الکترونی اتم این



بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: در میان عناصر فراوان سیاره مشتری، عنصر منیزیم وجود ندارد.

گزینه ۲: منیزیم و اکسیژن به ترتیب تنها یون $2+$ و $2-$ تولید می‌کنند.

گزینه ۳: ترکیب حاصل از عناصر منیزیم و اکسیژن یونی است؛ نه مولکولی!

گزینه ۴: برای محاسبه تعداد الکترون‌های مبادله شده بین این دو اتم هنگام تشکیل یک مول ترکیب یونی از رابطه مقابل استفاده



بار کاتیون $\times$ زیروند کاتیون = تعداد الکترون‌های مبادله شده

یا

$$2 = 1 \times 2 = |\text{بار آنیون} \times \text{زیروند آنیون}|$$

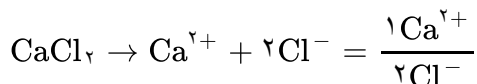
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها:



الف) درست: به آرایش فشرده آن‌ها توجه کنیم:



ب) نادرست: رفتار شیمیایی (نه فیزیکی):

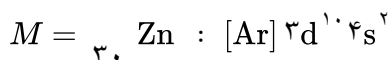


پ) درست:

ت) نادرست: آمونیاک با فرمول NH_3 دارای 17g. mol^{-1} و متان با فرمول CH_4 دارای 16g. mol^{-1} جرم است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

لایه‌ی سوم شامل زیرلایه‌های $3s$ ، $3p$ و $3d$ است که در مس به عنوان اولین عنصر و روی به عنوان دومین عنصر تکمیل می‌شوند.



روی کاتیون $2+$ تشکیل می‌دهد و اکسید هم O^{2-} است، پس فرمول اکسید آن ZnO (MO) است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

ا) نادرست، چون $n + l$ برای $5s$ کم‌تر است.

$$4d \Rightarrow n + l = 4 + 2 = 6$$

$$5s \Rightarrow n + l = 5 + 0 = 5$$

ب) نادرست، چون $n + l$ برای $6s$ کم‌تر است.

$$4f \Rightarrow 4 + 3 = 7$$

$$6s \Rightarrow 6 + 0 = 6$$

پ) درست، انرژی $5d$ کم‌تر است چون n کوچک‌تری دارد.

$$6p \Rightarrow 6 + 1 = 7$$

$$5d \Rightarrow 5 + 2 = 7$$

ت) درست، $n + l$ برای $4f$ کم‌تر است.

$$4f \Rightarrow 4 + 3 = 7$$

$$6d \Rightarrow 6 + 2 = 8$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا، داریم:

$$\overline{M}_X = \frac{20 \times 10 + 80 \times 11}{100} = 10/8, \overline{M}_Y = \frac{35 \times 75 + 37 \times 25}{100} = 35/5$$

$$M_{X,Y} = (2 \times 10/8) + (3 \times 35/5) = 128/1$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ترکیب $O - X = O$ یک ذره خنثی است پس X یک پیوند دوگانه و یک پیوند داتیو برقرار کرده

است زیرا اگر پیوند سمت چپ داتیو نباشد پس اکسیژن دارای بار منفی می‌باشد و در نتیجه ترکیب باردار می‌شود، عنصر X دارای

یک جفت الکترون ناپیوندی است. پس X عنصر گروه ششم است.

بررسی عبارت اول: درست است. $(۹۲ = ۷۸ \times ۰ / ۱۱۸)$. بنابراین ۹۲ عنصر در طبیعت یافت می‌شوند.

بررسی عبارت دوم: نادرست است. رادیوایزوتوپ است. اغلب اتم‌هایی که این نسبت برای آن‌ها بزرگ‌تر یا برابر $۱/۵$ باشد رادیوایزوتوپ هستند و اما تکنسیم با اینکه نسبت نوترون به پروتون کوچک‌تری دارد رادیوایزوتوپ است.

بررسی عبارت سوم: درست است.

بررسی عبارت چهارم: درست است.

بررسی عبارت پنجم: نادرست است. نیم‌عمر آن به اندازه‌ای هست که طی تولید، آماده‌سازی، انتقال به مراکز پزشکی، تزریق به بیمار و ... وجود داشته باشد.

