

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x & x \geq -2 \\ -2x^2 - 4x & x < -2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 4 & x > -2 \\ -4x - 4 & x < -2 \end{cases}$$

$$x > -2 : 2x^2 + 4x = 4x + 4$$

$$x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{2} \\ \beta = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$x < -2 \Rightarrow -2x^2 - 4x = -4x - 4 \Rightarrow x^2 = 2 \text{ غقق}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شیب خط $y - 3x = 1$ برابر $\frac{1}{3}$ است، پس در نقطه مطلوب، شیب خط مماس باید برابر $\frac{1}{3}$ باشد.

نقطه مطلوب $(1, 2)$ است.

شیب خط مماس $f'(-2) = -1 = m$

معادله خط مماس $(-2, 3) \in f \Rightarrow y - 3 = -1(x + 2) \Rightarrow y = -x + 1$

$$x_C = 0 \Rightarrow y_C = 1 \Rightarrow C(0, 1)$$

$$x_A = -4 \Rightarrow y_A = -(-4) + 1 = 5 \Rightarrow A(-4, 5)$$

$$AC = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \left(\frac{3x^2 - 1}{x + \sqrt{x}} \right)^4 \Rightarrow f(1) = \left(\frac{3 - 1}{1 + 1} \right)^4 = 1 \Rightarrow \text{نقطه تماس} = (1, 1)$$

$$\text{شیب خط مماس} : f'(x) = \frac{6x(x + \sqrt{x}) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(3x^2 - 1)}{(x + \sqrt{x})^4} \times 4 \left(\frac{3x^2 - 1}{x + \sqrt{x}} \right)^3$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{6(2) - \left(\frac{3}{2}\right)(2)}{4} \times 4 = 9$$

$$\text{معادله خط مماس} : y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = 9(x - 1) \Rightarrow y = 9x - 8$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مقادیر f و f' در نقاط به طول ۱، ۲، ۳ و ۴ به صورت زیر است:

x	۱	۲	۳	۴
f	.	+	+	.
f'	+	.	-	.

در $x = 1$ مقدار $f - f'$ منفی است.

۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هدف یافتن مشتق راست تابع در $x = 1$ است. تابع در این نقطه از راست پیوسته است و در یک همسایگی راست آن داریم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x \Rightarrow f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 - 1} + x}$$

$$\Rightarrow f'_+(1) = \frac{3}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

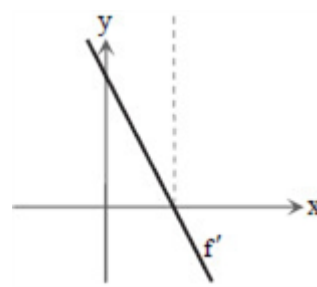
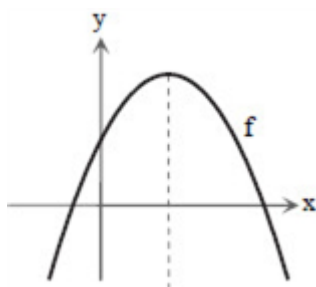
۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا تکلیف جزء صحیح و قدرمطلق را مشخص می‌کنیم. در اطراف $x = 1$ ، عبارت $(x - 2)$ منفی است، پس $|x - 2| = 2 - x$ و $[3^+ x + 1] = [3^-] = 3$ پس:

$$f(x) = 3x^2 + x - 2 \Rightarrow f'(x) = 6x + 1 \Rightarrow f'_+(1) = 6 + 1 = 7$$

۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دقت کنید که در نقطه‌ی رأس مشتق صفر است. در طول‌های قبل از آن خط مماس بر تابع دارای شیب مثبت و در طول‌های بعد از آن خط مماس بر تابع دارای شیب منفی است.



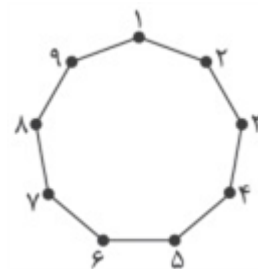
۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y' = \frac{-(\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)^2} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

۱۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عدد احاطه‌گری گراف C_9 برابر $a = \frac{9}{3} = 3$ می‌باشد و این گراف ۳ مجموعه احاطه‌گر به فرم $\{1, 4, 7\}$ ، $\{2, 5, 8\}$ و $\{3, 6, 9\}$ دارد.



۱۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$24x \equiv 56 \pmod{28} \xrightarrow{\div 24} x \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow x = 7k$$

$$x \text{ کوچک‌ترین مقدار سه‌رقمی} = 7 \times 15 = 105 \Rightarrow 21/105$$

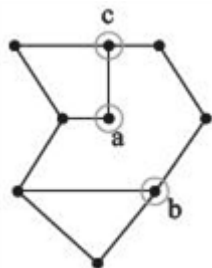
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گراف جهت‌دار با رأس حداکثر p^2 یال خواهد داشت.

پس داریم:

$$۲^{۲۵} \equiv ۲^{(p^2)} \equiv ۲^{۵} = \text{تعداد کل یال‌ها} = \text{تعداد کل گراف}$$

$$\xrightarrow{\text{شامل یال‌های } ab \text{ و } bc} ۲^{۲۵-۴} = ۲^{۲۱}$$

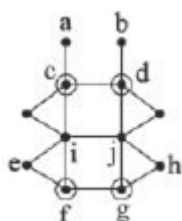
و فاقد یال‌های ac و ad



کافی است مجموعه احاطه‌گر با کمترین تعداد عضو شامل رأس a را به دست آوریم. همچنین رأس‌های c و b را نیز انتخاب کنیم (چون با یک رأس، بقیه رأس‌های گراف احاطه نمی‌شود پس حداقل به دو رأس نیاز داریم)، پس حداقل ۳ خودپرداز نیاز داریم.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

برای احاطه شدن رأس a باید خود a یا c را انتخاب کنیم که بهتر است c را انتخاب کنیم. به همین ترتیب رأس d را انتخاب می‌کنیم.



رأس‌های باقی‌مانده توسط یک رأس احاطه نمی‌شوند چون رأسی وجود ندارد که به همه آن‌ها متصل باشد، اما با برداشتن حداقل دو رأس مثل f و g ، کل رأس‌ها احاطه می‌شود، پس $\gamma(G) = ۴$.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

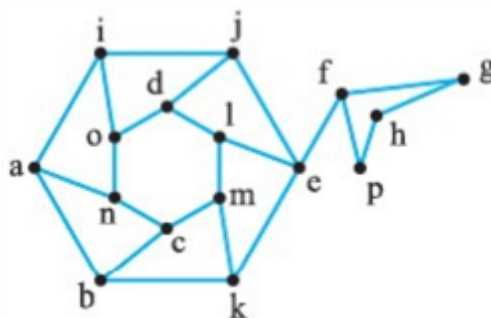
$$\begin{aligned} a &\equiv^m b \\ a &\equiv^n b \end{aligned} \Rightarrow a \equiv^{(m,n)} b$$

توجه:

$$\left. \begin{aligned} 3x &\equiv 2 \Rightarrow 3x \equiv 9 \Rightarrow x \equiv 3 \\ 5x &\equiv 2 \Rightarrow 5x \equiv 50 \Rightarrow x \equiv 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &\equiv 10 \\ x &\equiv 10 \end{aligned} \Rightarrow x \equiv 10 \Rightarrow x = 56k + 10$$

کوچک‌ترین مقدار سه رقمی x زمانی است که $k = ۲$:

$$x = 56 \times 2 + 10 = 1۲۲ \text{ بنابراین } ۱ + ۲ + ۲ = ۵ = \text{مجموع ارقام}$$



حالا گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم.

گزینه ۱ مجموعه $\{a, b, c, d, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر نیست، چون در آن رأس e احاطه نمی‌شود. در گزینه‌های ۲ و ۴ مجموعه داده شده احاطه‌گر نیستند، زیرا در هیچ‌کدام از آن‌ها رأس p احاطه نمی‌شود. اما مجموعه داده شده در گزینه ۳ یعنی $\{a, c, e, d, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. چون همه رأس‌ها با این ۵ رأس احاطه می‌شوند و با حذف هر کدام از این رأس‌ها، مجموعه باقی‌مانده دیگر احاطه‌گر نیست.

رأس انتخابی	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
رأسی که آن را پوشش می‌دهد	a	a	c	d	e	e	h	h	a	d	e	d	c	a	d	h

همچنین با حذف هر کدام از رأس‌ها، دیگر خود آن رأس احاطه نمی‌شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$[a, b] = \frac{a \times b}{(a, b)} \Rightarrow [231, a] = 231a \Rightarrow \begin{cases} (231, a) = 1 \\ a < 231 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 231 \text{ از } a \text{ کوچک‌تر از } \varphi(231) = 231 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right) = 120$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم R شعاع و O مرکز دایره باشد. بنابر فرمول $R = \frac{1}{4} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ در معادله

هر دایره به فرم $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در اینجا و از معادله اول در صورت سؤال داریم:

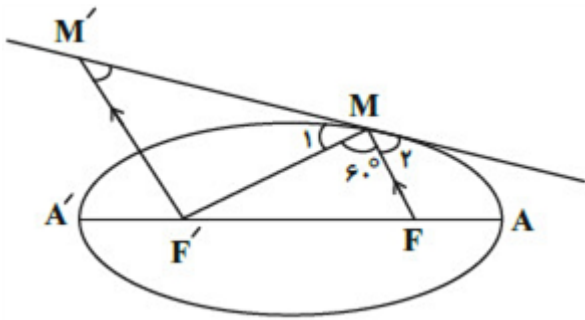
$$R = 2 = \frac{1}{4} \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 - 4a} \Rightarrow 4 = \sqrt{20 - 4a} \Rightarrow 16 = 20 - 4a \Rightarrow a = 1$$

پس معادله دوم در صورت سؤال، به فرم $x^2 + y^2 - x + 2y + 3 = 0$ دوباره و با به‌کارگیری عدد زیر

$$\sqrt{(-1)^2 + 3^2 - 4 \times 3} = \sqrt{10 - 12} = \sqrt{-2}$$

رادیکال $\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ خواهیم داشت:

از آنجا که عدد منفی برای زیر رادیکال، تعریف نشده است؛ پس معادله دوم، مکان هندسی تهی است.



$$\begin{cases} \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \\ \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \\ \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 60^\circ \end{cases}$$

از طرفی $FM \parallel F'M'$ بنابراین طبق قضیه خطوط موازی و مورب خواهیم داشت.

$$\begin{cases} \widehat{M}' = \widehat{M}_2 = 60^\circ \\ \widehat{M'F'M} = \widehat{FMF'} = 60^\circ \end{cases}$$

بنابراین مثلث $M'MF$ متساوی الاضلاع است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا مختصات مرکز دایره را با تلاقی دو خط $x + y = 4$ و $x - y = 6$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow O'(5, -1)$$

اینک با محاسبه فاصله مرکز دایره تا خط $4x - 3y - 8 = 0$ شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:

$$R = O'H = \frac{|20 + 3 - 8|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{15}{5} = 3$$

می‌دانیم بیشترین فاصله مبدأ مختصات از نقاط دایره، برابر با:

$$OO' + R = \sqrt{25 + 1} + 3 = \sqrt{26} + 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر در سهمی افقی از معادله سهمی نسبت به y مشتق گرفته مساوی صفر قرار دهیم

آنگاه عرض رأس سهمی بدست می‌آید پس:

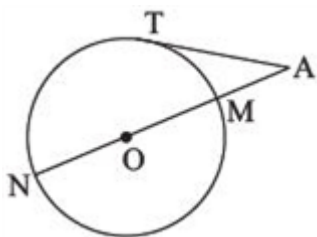
$$f'_y = 0 \Rightarrow 4y - 2a = 0 \xrightarrow{y=1} 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$$

در ضمن رأس سهمی در معادله سهمی صدق می‌کند پس:

$$2 - 2a - 8 + b = 0 \xrightarrow{a=2} 2 - 4 - 8 + b = 0 \Rightarrow b = 10$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad \text{بنابراین:}$$

نقطه A خارج از دایره قرار دارد. از A به مرکز دایره وصل می‌کنیم تا دایره را در نقاط M و N قطع کند. در این صورت M نزدیک‌ترین نقطه دایره تا A و N دورترین نقطه دایره تا A است. حال مماس AT را بر دایره رسم می‌کنیم پس $AT^2 = AM \times AN$ است داریم:



$$AT = \sqrt{f(A)} = \sqrt{f(2, 1)} = \sqrt{4 + 1 + 8} = \sqrt{13} \Rightarrow AT^2 = 13$$

در نتیجه $AM \times AN = 13$ است.

توجه کنید اگر $f(x, y) = 0$ معادله یک دایره و نقطه A بیرون این دایره باشد، آنگاه طول مماس رسم شده از A بر این دایره برابر $\sqrt{f(A)}$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر در یک چندضلعی محیطی با مساحت S و محیط $2P$ ، شعاع دایره محاطی برابر r

$$S = r \cdot P \Rightarrow P = \frac{S}{r} \Rightarrow P = \frac{84}{3} = 28$$

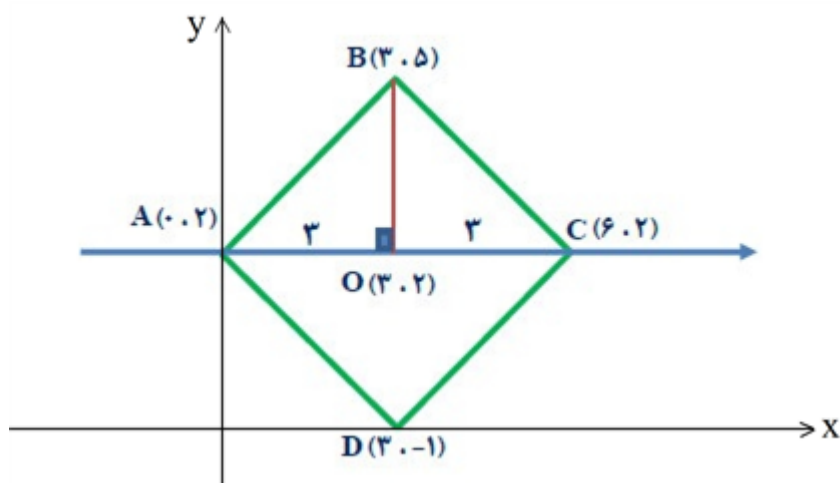
باشد، آنگاه $S = rP$ خواهد بود. پس:

در نتیجه مجموع طول اضلاع یا به عبارت دیگر محیط این چندضلعی برابر است با:

$$2P = 2 \times 28 = 56$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بازتاب نقطه A نسبت به محور yها بر خودش منطبق شده است، پس A روی محور yها

است. چون قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگر و با هم مساویند. پس مختصات سایر رأس‌های مربع به صورت شکل زیر است.



$$\text{فاصله B تا مبدأ مختصات} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$17^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow \text{مثلث قائم‌الزاویه است}$$

$$\text{مساحت مثلث تصویر} = k^2 S_{ABC} = 4 \left(\frac{1}{2} \right) (8)(15) = 240$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانید که اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی خارجی مماس بر ضلع AB (ضلع c) برابر

$$r_c = \frac{S}{P - c} \text{ است.}$$

با توجه به این که مثلث قائم‌الزاویه است. مساحت مثلث را می‌یابیم.

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

$$2P = 10 + 8 + 6 = 24 \Rightarrow P = 12$$

$$r_c = \frac{S}{P - c} = \frac{24}{12 - 8} = \frac{24}{4} = 6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. وقتی $x \rightarrow 2^+$ می‌توان فرض کرد $2/5 < x < 2$ ، پس $[x] = 2$ ، همچنین

$2x < 5$ ، پس $[2x] = 4$ ، بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x[x] + 8}{x^2 - [2x]} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x(2) + 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-4}{x+2} = \frac{2-4}{2+2} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع $f(x)$ مطابق شکل در نقطه‌ای که عضو دامنه نیست دارای حدی برابر $\frac{1}{4}$ است که با

توجه به ضابطه $f(x)$ ، طول نقطهٔ توخالی $x = 1$ است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+a} - b}{x-1} = \frac{\sqrt{1+a} - b}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \sqrt{1+a} - b = 0$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{1+a} \xrightarrow{b \geq 0} b^2 = 1+a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+a} - b}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+a} + b}{\sqrt{x+a} + b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+a-b^2}{(x-1)(\sqrt{x+a}+b)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+a-(1+a)}{(x-1)(b+b)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(2b)} = \frac{1}{2b} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a+b = 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2 + 4 + 2x)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. روش اول: با روش هوییتال برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ فوق داریم:

$$\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}} - \frac{2}{2\sqrt{2x+4}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1 - \frac{2}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x+4}}{1 + \sqrt{x}} &\times \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+4}}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+4}} \times \frac{1 + (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x})}{1 + (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1)(1+1+1)}{(1+x)(1+1)} = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۱

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{2-4}{4-2} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{2-2}{4-2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{اختلاف}} L_1 - L_2 = \frac{3}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + a = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} + b = 1 + b$$

$$f(1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \begin{cases} 1 + a = 5 \Rightarrow a = 4 \\ 1 + b = 5 \Rightarrow b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 8$$

شرط پیوستگی:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مجموع فراوانی‌ها برابر ۲۵ است. پس: ۳۳

$$3 + x + 5 + 6 + y = 25 \Rightarrow x + y = 11$$

از طرفی مجموع انحراف از میانگین برابر صفر است. پس:

مقدار داده	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۲۰
فراوانی	۶	x	۵	۳	y
$x_i - \bar{x}$	-۴	-۳	-۲	-۱	۴

$$\Rightarrow -24 - 3x - 10 - 3 + 4y = 0 \Rightarrow -3x - 37 + 4y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ -3x + 4y = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 10 \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}$$

حال می‌توانیم واریانس داده‌ها را حساب کنیم:

$$= \frac{6 \times (-4)^2 + 1 \times (-3)^2 + 5 \times (-2)^2 + 3 \times (-1)^2 + 10 \times (4)^2}{25} = \frac{288}{25} = 11.52$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زاویه مربوط به خانواده‌هایی که حداکثر ۳ فرزند دارند، در این نمودار برابر است با: ۳۴

$$360^\circ - 144^\circ = 216^\circ$$

$$216^\circ = \frac{f_1}{300} \times 360^\circ \Rightarrow f_1 = 180$$

اگر فراوانی این گروه را با f_1 نمایش دهیم، آنگاه داریم:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا داده‌ها را به طور صعودی مرتب می‌کنیم: ۳۵

$$2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 8, 10$$

$$\bar{x} = \frac{2(2) + 4(4) + 3(6) + 2(8) + 10}{12} = \frac{4 + 16 + 18 + 16 + 10}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

تعداد داده‌ها ۱۲ است. پس:

$$\text{میان} = \frac{\text{داده هفتم} + \text{داده ششم}}{2} = \frac{4 + 6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{مد} = \text{داده‌ای با بیشترین تکرار (فراوانی)} = 4$$

مشاهده می‌شود که میانگین، بیشترین مقدار را دارد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کل داده‌ها $۱۰۰ = ۱۰ + ۱۲ + ۱۸ + ۲۵ + ۳۵$ تا است.

$$\bar{x} = \frac{۱۲}{۱۰۰} \times ۷ + \frac{۱۸}{۱۰۰} \times ۱۲ + \frac{۳۵}{۱۰۰} \times ۱۳ + \frac{۱۰}{۱۰۰} \times ۱۷ + \frac{۱۹}{۱۰۰} \times ۲۵ = ۱۴$$

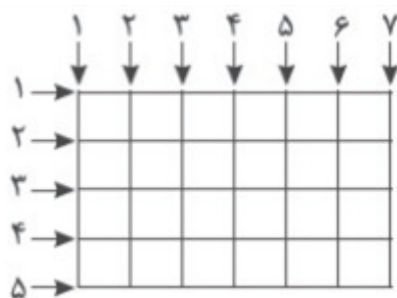
پس:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از برخورد هر دو خط افقی متمایز با هر دو خط عمودی متمایز، یک مستطیل ایجاد می‌شود.

پس تعداد مستطیل‌ها برابر است با «تعداد راه‌های انتخاب دو خط افقی از بین ۵ خط افقی» ضرب در «تعداد راه‌های

انتخاب دو خط عمودی از بین ۷ خط عمودی»

$$\text{تعداد مستطیل‌ها} = \binom{۵}{۲} \binom{۷}{۲} = \frac{۵ \times ۴}{۲} \times \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۱۰ \times ۲۱ = ۲۱۰$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از اصل متمم کمک می‌گیریم. تعداد کل حالت‌های انتخاب ۴ نفر از بین ۸ نفر (۳ دهمی و ۵

یازدهمی) را منهای تعداد حالت‌هایی می‌کنیم که هیچ‌کدام از دانش‌آموزان انتخاب شده، دهمی نباشند. (یعنی هر ۴

دانش‌آموز انتخابی، یازدهمی باشند).

$$\binom{۸}{۴} - \binom{۵}{۴} = \frac{۸!}{۴!۴!} - \frac{۵!}{۴!۱!} = ۷۰ - ۵ = ۶۵$$

روش دیگر:

$$\binom{۳}{۱} \binom{۵}{۳} + \binom{۳}{۲} \binom{۵}{۲} + \binom{۳}{۳} \binom{۵}{۱} = (۳ \times ۱۰) + (۳ \times ۱۰) + (۱ \times ۵) = ۶۵$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش،

تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی

می‌شود که اولین مرحله آن همان جمع‌آوری اعداد و ارقام است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{۴}{۲} \times \frac{۲}{۱} \times \frac{۱}{\{۰\}} = ۱۲$$

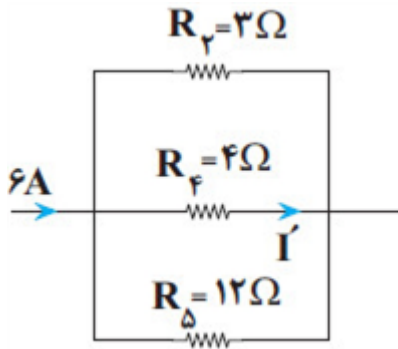
$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالات} = ۹ + ۱۲ = ۲۱$$

$$\frac{۳}{۲} \times \frac{۲}{۱} \times \frac{۱}{\{۲\}} = ۹$$

$$\text{حداکثر مدت زمان لازم} = ۲۱ \times ۵ = ۱۰۵ \text{ s} = \frac{۱۰۵}{۶۰} \text{ min} = ۱ / ۷۵ \text{ min}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با بسته بودن کلیدها، مقاومت‌های R_1 و R_2 اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شوند.

در این شرایط سه مقاومت R_1 ، R_2 و R_3 موازی‌اند و مجموعه آنها با مقاومت R_4 متوالی است. در نتیجه:



$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \Rightarrow R_{123} = 1/5 \Omega$$

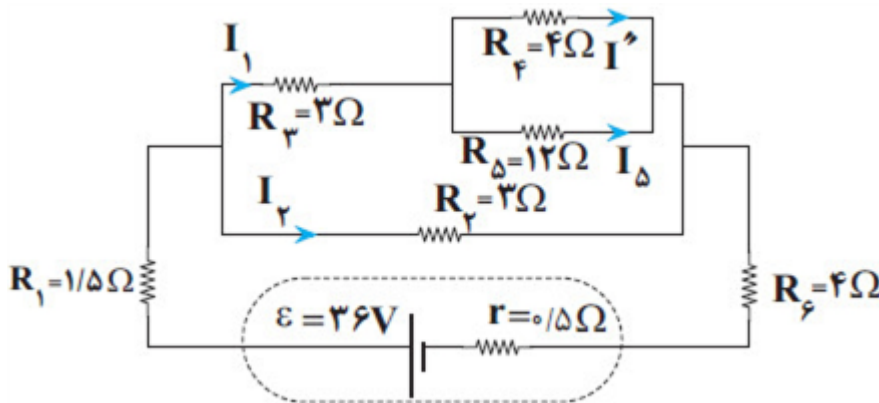
$$R_{eq} = R_{123} + R_4 = 5/5 \Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{36}{5/5 + 0/5} = 6 A$$

در این شرایط اگر جریان عبوری از R_2 را I' بنامیم:

$$V_{123} = V_2 \Rightarrow R_{123} I_{123} = R_2 I' \Rightarrow 1/5 \times 6 = 4 I' \Rightarrow I' = \frac{9}{4} A$$

با باز کردن دو کلید، مقاومت‌های R_1 و R_2 وارد مدار می‌شوند. در این شرایط شکل مناسب‌تری از مدار به صورت زیر است:



$$R_{23} = \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} = \frac{12 \times 4}{12 + 4} = 3 \Omega$$

$$R_{234} = R_{23} + R_4 = 3 + 3 = 6 \Omega$$

$$R_{2345} = \frac{R_{234} \times R_5}{R_{234} + R_5} = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2 \Omega$$

$$R'_{eq} = R_1 + R_{2345} + R_6 = 1/5 + 2 + 4 = 7/5 \Omega$$

$$I'_{کل} = \frac{\varepsilon}{R'_{eq} + r} = \frac{36}{7/5 + 0/5} = 4/5 A$$

با توجه به این‌که R_2 و R_{2345} موازی‌اند، داریم:

$$V_{2345} = V_{234} \Rightarrow R_{2345} I'_{کل} = R_{234} I_1 \Rightarrow 2 \times 4/5 = 6 \times I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{3}{5} A$$

مجدداً با توجه به موازی بودن R_2 و R_3 داریم:

$$V_2 = V_{23} \Rightarrow R_2 I'' = R_{23} I_1 \Rightarrow 4 I'' = 3 \times \frac{3}{5} \Rightarrow I'' = \frac{9}{10} A \Rightarrow \frac{I''}{I'} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$V_{eq} = \varepsilon = 12 = V_1 + V \Rightarrow V_1 = 5V$$

$$I_{eq} = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_{LDR}} = \frac{12}{R_1 + 100k\Omega} = I_1$$

$$V_1 = I_1 R_1$$

$$5 = \frac{12}{R_1 + 100} R_1 \Rightarrow 5R_1 + 500 = 12R_1 \Rightarrow 7R_1 = 500 \Rightarrow R_1 \approx 71/5\Omega$$

راه حل دوم:

$$I_1 = I_2$$

$$\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} \Rightarrow \frac{5}{R_1} = \frac{7}{100} \Rightarrow R_1 = \frac{500}{7} \approx 71/5\Omega$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در یک باتری وقتی جریان صفر است اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر ε است بنابراین نمودار ۴۳

گزینه ۱ نادرست است. بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) مربوط به باتری ضد محرکه (مصرفی) است.

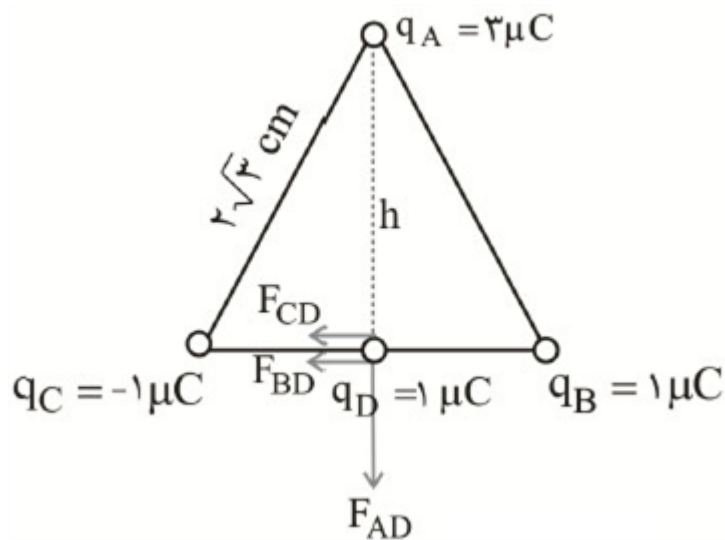
۳) مربوط به باتری آرمانی است. ($r = 0$) $V = \varepsilon$

۴) مربوط به باتری محرکه (تولیدی) است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. افزایش مقاومت رثوستا باعث افزایش مقاومت معادل کل مدار می‌شود. ۴۴

$$I_T^{\downarrow} = \frac{\varepsilon}{R_{eq}^{\uparrow} + r}$$

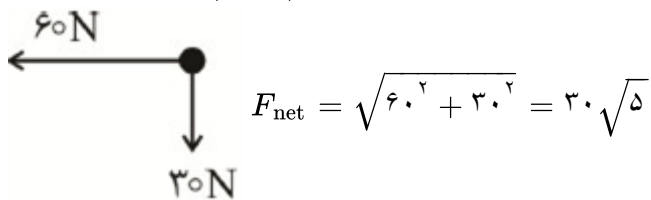
$$v_1^{\downarrow} = I_T^{\downarrow} R_1$$



$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3 \text{ cm}$$

$$F_{CD} = F_{BD} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{(\sqrt{3} \times 10^{-2})^2} = 30 \text{ N}$$

$$F_{AD} = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-6}}{(3 \times 10^{-2})^2} = 30 \text{ N}$$



$$I = \frac{V_{\text{کل}}}{R_{\text{کل}}} = \frac{20 - 2}{2 + 3 + 1} = 3 \text{ A}$$

$$P_1 = \varepsilon I - rI^2 = 20 \times 3 - 2 \times (3)^2 = 42 \text{ W}$$

با جایگزینی آمپرسنج، دیگر جریانی از مقاومت ۳ نمی‌گذرد:

$$I = \frac{V_{\text{کل}}}{R_{\text{کل}}} = \frac{20 - 2}{2 + 1} = 6 \text{ A}$$

$$P_1 = \varepsilon I - rI^2 = 20 \times 6 - 2(6)^2 = 48 \text{ W}$$

$$\Delta P = 48 - 42 = 6 \text{ W}$$

$$\varepsilon = 7$$

$$I = \frac{\varepsilon}{3R + \frac{R}{3}} = 2A \Rightarrow R = 1$$

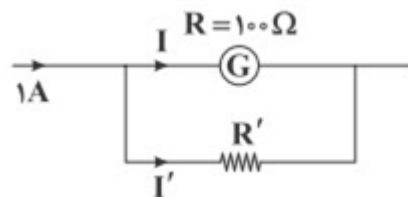
$$\text{ولت } V = V - \frac{1}{3} \times 2 = 6$$

$$I = \frac{\varepsilon}{2R + \frac{R}{2}} = \frac{70}{25} = \frac{14}{5}$$

بعد وصل کلید:

$$V = V - \frac{1}{2} \times \frac{14}{5} = \frac{28}{5} \Rightarrow \frac{\frac{28}{5}}{6} = \frac{14}{15}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای این که گالوانومتر آسیب نبیند باید مقاومتی را به آن به طور موازی ببندیم تا آن مقدار اضافی از جریان که نمی‌تواند از گالوانومتر عبور کند، از این مقاومت عبور نماید.



$$I = 100\text{mA} = 0.1A$$

جریان عبوری از گالوانومتر برابر است با:

$$I' = 1 - 0.1 = 0.9A$$

جریان عبوری از مقاومت برابر است با:

گالوانومتر و مقاومت، موازی با هم هستند، بنابراین اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن با هم برابر است، بنابراین:

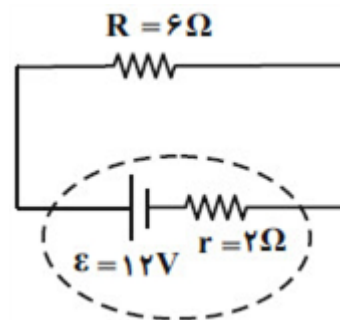
$$IR = I'R' \Rightarrow 0.1 \times 100 = 0.9 \times R'$$

$$R' = \frac{10}{0.9} = \frac{100}{9} \Omega$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا جریان عبوری از مقاومت را می‌یابیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \xrightarrow[r=6\Omega]{r=2\Omega} I = \frac{12}{6+2} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}A$$

$$P = RI^2 \Rightarrow P = 6 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 6 \times \frac{9}{4} = 13.5W$$



می‌دانیم لامپی که توان بیش‌تری دارد، مقاومتش کم‌تر خواهد بود. (طبق رابطه‌ی $P = \frac{V^2}{R}$)

$$\begin{cases} P_1 = 60W \\ P_2 = 100W \end{cases} \Rightarrow P_T = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} = \frac{100 \times 150}{100 + 150} = \frac{15000}{250} = 60W$$

توان مصرفی کل $60W$

حال توان مصرفی هر لامپ را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$P'_1 = \frac{P_T^2}{P_1} = \frac{(60)^2}{100} = \frac{3600}{100} = 36W$$

$$P'_2 = \frac{P_T^2}{P_2} = \frac{(60)^2}{150} = \frac{3600}{150} = 24W$$

نکته: در به هم بستن چند مصرف‌کننده متوالی، می‌توان از روابط زیر استفاده کرد.

$$\frac{1}{P_T} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \dots \Rightarrow P_T = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}, P'_n = \frac{P_T^2}{P_n}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در ابتدا نوع اتصال مقاومت‌ها را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم که اگر اختلاف پتانسیل دو سر شاخه‌ها با هم برابر باشد، آن شاخه‌ها با هم موازیند.

حال اگر هر گره را نام‌گذاری کنیم، درمی‌یابیم که مقاومت‌ها موازی‌اند (چون اختلاف پتانسیل دو سر همه‌ی آن‌ها برابر V_{AB} است)

از طرفی می‌دانیم که جریان از پایانه‌ی مثبت مولد خارج می‌شود (نقطه‌ی B). پس تقسیم جریان را می‌نویسیم. (روی شکل نمایش می‌دهیم.)

با توجه به گره‌ی A می‌توان دریافت که $I' = I_1 + I_2$ است. حال برای یافتن I_1 و I_2 در ابتدا مقاومت معادل، سپس ولتاژ دو سر مولد و در نهایت I_1 و I_2 را می‌یابیم.

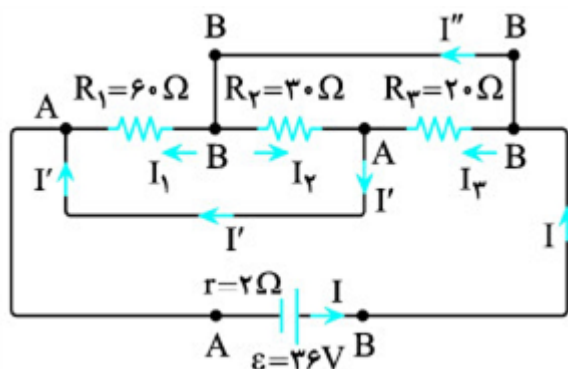
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \xrightarrow{R_1=60\Omega, R_2=30\Omega, R_3=20\Omega} \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{60} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} \Rightarrow R_{eq} = 10\Omega$$

$$V = \frac{R_{eq} \varepsilon}{R_{eq} + r} \xrightarrow{\varepsilon=36V, r=2\Omega, R_{eq}=10\Omega} V = \frac{10 \times 36}{10 + 2} \Rightarrow V = 30V$$

$$V = V_1 = R_1 I_1 \xrightarrow{R_1=60\Omega, V_1=30V} 30 = 60 I_1 \Rightarrow I_1 = 1A$$

$$V = V_2 = R_2 I_2 \xrightarrow{R_2=30\Omega, V_2=30V} 30 = 30 I_2 \Rightarrow I_2 = 1/5A$$

$$I' = I_1 + I_2 = 1 + 1/5 \Rightarrow I' = 2/5A$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار $V - I$ دو سر مولدها، می‌توان دریافت که نیروی محرکه‌ی آن‌ها یکسان است (چرا؟) و مقاومت درونی مولد B ، دو برابر مقاومت درونی مولد A است یعنی $r_B = 2r_A$ است. (چرا؟)

از طرفی می‌دانیم که بیش‌ترین توان خروجی هر مولد از رابطه‌ی $P_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$ محاسبه می‌شود، بنابراین داریم:

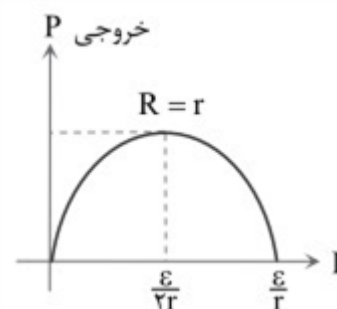
$$P_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4r} \xrightarrow{\substack{\text{برای هر دو یکسان است: } \varepsilon \\ \text{نسبت عکس دارد } r \text{ پس } P_{\max} \text{ با } r}} \frac{(P_{\max})_A}{(P_{\max})_B} = \frac{r_B}{r_A} \xrightarrow{r_B = 2r_A} \frac{(P_{\max})_A}{(P_{\max})_B} = 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مقاومت‌های اهمی با n برابر شدن مقدار V ، مقدار I نیز n برابر می‌شود تا مقدار R تغییر نکند. اما در نمودار $V - I$ نشان داده شده این ویژگی برقرار نیست. به کمک ویژگی‌های خط راست، مقدار V هنگامی که جریان عبوری از مقاومت $4A$ را تعیین می‌کنیم:

$$V = \frac{120 + 60}{2} = 90V \Rightarrow R = \frac{V}{I} = \frac{90}{4} = 22.5\Omega$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با جابه‌جایی از A تا B مقاومت رئوستا و در نتیجه مقاومت کل مدار افزایش می‌یابد و در نتیجه جریان کل مدار کاهش می‌یابد. اختلاف پتانسیل دو سر مولد $(\varepsilon - I_T r)$ افزایش می‌یابد و باید $(V_1 + V_2)$ هم افزایش یابد. با توجه به کاهش V_2 ، $(I_2 R_2)$ باید افزایش یابد. در نتیجه توان مصرفی R_1 افزایش می‌یابد. اما در مورد توان خروجی مولد $(\varepsilon I - r I^2)$ نمودار توان را رسم می‌کنیم:

با توجه به اینکه مقاومت معادل مدار بیش از ۶ اهم است. نیمه سمت چپ نمودار قرار داریم و با افزایش مقاومت و کاهش جریان باید به سمت چپ حرکت کنیم و توان خروجی کاهش می‌یابد.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با بسته شدن کلید مقاومت R_1 به طور موازی به مدار اضافه می‌شود که R_e را کاهش می‌دهد.

کاهش باتری $V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI \Rightarrow$ افزایش $I \Rightarrow R_e$ کاهش

آمپرسنج جریان کل مدار (عبوری از مولد) و ولت سنج V دو سر مولد را نمایش می‌دهد.

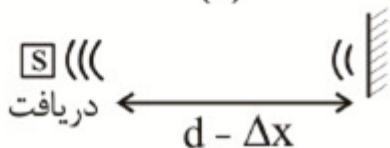
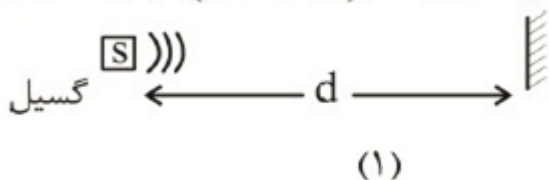
$$V = \lambda f = (3/25 \times 10^{-3})(120 \times 10^3) = 390 \frac{m}{s}$$

اگر فاصله خفاش در لحظه ارسال فراصوت تا مانع d باشد، فاصله اش در لحظه دریافت پژواک $d = \Delta x$ خواهد بود.

$$\Delta x = V \cdot \Delta t = 10 \times 0.5 = 5m$$

صوت از لحظه گسیل تا دریافت مسافت L را طی می کند.

$$L = d + (d - \Delta x) = 2d - 5$$



$L = V \cdot \Delta t$ چون تندی انتشار فراصوت در محیط ثابت است:

$$2d - 5 = 390 \times 0.5 \Rightarrow d = 100m$$

$d - \Delta x = 100 - 5 = 95m$: فاصله خفاش در لحظه دریافت پژواک

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گام ۱: زاویه جبهه موج فرودی با سطح جدایی، برابر زاویه تابش و زاویه جبهه موج شکسته شده با سطح جدایی برابر زاویه شکست است.

بنابراین زاویه برخورد جبهه موج فرودی با مرز جدایی دو محیط برابر است با:

$$\alpha = 90 - 37 = 53^\circ \Rightarrow \theta_1 = \alpha = 53^\circ$$

$$\theta_2 = 37^\circ$$

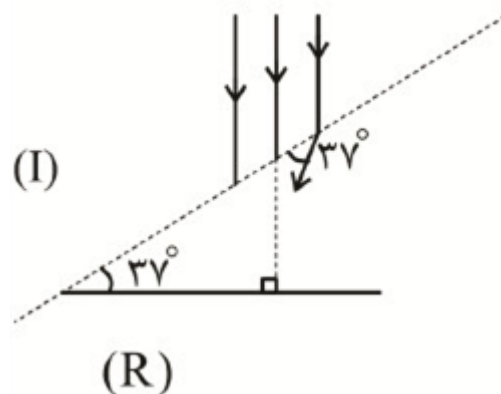
گام ۲: با استفاده از قانون شکست عمومی می توان نوشت:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \xrightarrow{\theta_2=37^\circ, \theta_1=53^\circ} \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin 37^\circ}{\sin 53^\circ} = \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4}$$

هنگام شکست موج و تغییر محیط موج، بسامد موج تغییری نمی کند. ($f_1 = f_2$)

$$\frac{f_2}{f_1} = 1$$

(خطوط موازی هستند)



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. وقتی نور از هوا به طور مایل به یک محیط شفاف می‌تابد و تجزیه می‌شود، میزان شکست و انحراف پرتوی آبی بیشتر است، زیرا ضریب شکست بزرگ‌تری دارد. زاویه شکست برای پرتوی قرمز رنگ را به دست می‌آوریم:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \xrightarrow{n_1=1, \theta_1=53^\circ}$$

$$n_2 = \frac{4}{3}$$

$$1 \times \sin 53^\circ = \frac{4}{3} \times \sin \theta_2 \xrightarrow{\sin 53^\circ = 0.8}$$

$$0.8 = \frac{4}{3} \times \sin \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = 0.6 \Rightarrow \theta_2 = 37^\circ$$

زاویه شکست برای پرتوی آبی رنگ را نیز به دست می‌آوریم:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \xrightarrow{n_1=1, \theta_1=53^\circ}$$

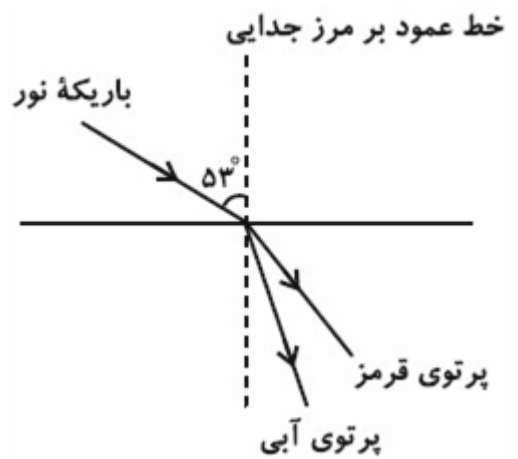
$$n_2 = \frac{1.5}{1}$$

$$1 \times \sin 53^\circ = \frac{1.5}{1} \times \sin \theta_2$$

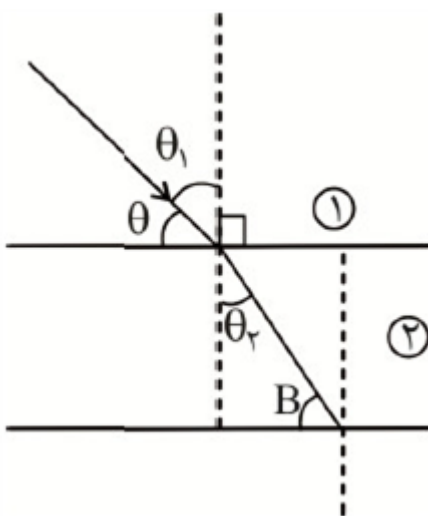
$$\xrightarrow{\sin 53^\circ = 0.8} 0.8 = 1.5 \times \sin \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta_2 = 30^\circ$$

اکنون اختلاف انحراف پرتوهای قرمز و آبی را حساب می‌کنیم:

$$(\theta_2)_{\text{قرمز}} - (\theta_2)_{\text{آبی}} = 37^\circ - 30^\circ = 7^\circ$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

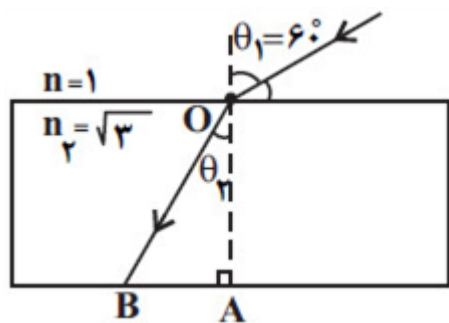


$$\theta_1 = 90 - \theta$$

$$\theta_2 = 90 - \beta$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{\sin (90 - \beta)}{\sin (90 - \theta)} = \frac{\cos \beta}{\cos \theta}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا به کمک قانون شکست اسنل، زاویه شکست را محاسبه و سپس تندی انتشار نور در تیغه را محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_r} = \frac{n_r}{n_1} \Rightarrow \frac{\sin 60^\circ}{\sin \theta_r} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin \theta_r} = \sqrt{3} \Rightarrow \sin \theta_r = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_r = 30^\circ$$

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3 \times 10^8}{v} \Rightarrow v = \sqrt{3} \times 10^8 \frac{m}{s}$$

تندی انتشار نور در تیغه برابر است با:

چون تندی نور ثابت است، به صورت زیر جابه‌جایی نور در تیغه را می‌یابیم، بنابراین مقدار جابه‌جایی نور در تیغه (OB) برابر است با:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t \xrightarrow{\Delta t = \Delta ns = 5 \times 10^{-9} s} \Delta x = \sqrt{3} \times 10^8 \times 5 \times 10^{-9} \Rightarrow \Delta x = 5\sqrt{3} \times 10^{-1} m$$

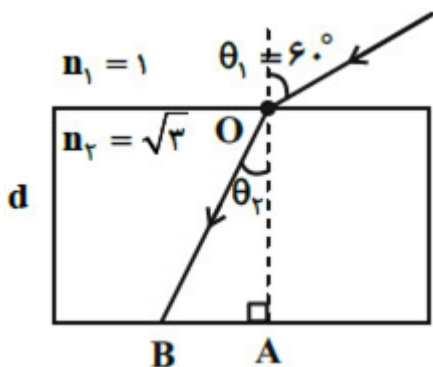
$$\Rightarrow OB = \Delta x = 5/\sqrt{3} m$$

در آخر، در مثلث OAB داریم:

$$\cos \theta_r = \frac{OA}{OB} \xrightarrow{\theta_r = 30^\circ, OB = 5/\sqrt{3} m, OA = d} \cos 30^\circ = \frac{d}{5/\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{5/\sqrt{3}} \Rightarrow d = 5/\sqrt{3} m = 5\sqrt{3} cm$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به کمک قانون شکست اسنل، زاویه شکست را محاسبه و سپس تندی انتشار نور در تیغه را محاسبه می‌کنیم.



$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_r} = \frac{n_r}{n_1} \Rightarrow \frac{\sin 60^\circ}{\sin \theta_r} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin \theta_r} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin \theta_r = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_r = 30^\circ$$

$$n_r = \frac{c}{v_r} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3 \times 10^8}{v_r} \Rightarrow v_r = \sqrt{3} \times 10^8 \frac{m}{s}$$

تندی انتشار نور در تیغه برابر است با:

میزان جابه‌جایی نور در تیغه (OB) برابر است با:

$$\overline{OB} = v_r \Delta t = \sqrt{3} \times 10^8 \times 5 \times 10^{-9} \Rightarrow \overline{OB} = 5\sqrt{3} \times 10^{-1} m$$

در مثلث $\triangle OAB$ داریم:

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{5\sqrt{3} \times 10^{-1}} \Rightarrow d = 5/\sqrt{3} m = 5\sqrt{3} cm$$

بنابراین ضخامت تیغه برابر با ۵ cm می‌باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طبق قانون شکست عمومی، داریم:

$$\frac{v_4}{v_1} = \frac{\sin \theta_4}{\sin \theta_1} \xrightarrow{\theta_4=45^\circ, \theta_1=53^\circ} \frac{v_4}{v_1} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 53^\circ} \xrightarrow{\sin 45^\circ=0.7, \sin 53^\circ=0.8} \frac{v_4}{v_1} = \frac{0.7}{0.8} = \frac{7}{8} \quad (1)$$

از سوی دیگر، طبق توضیحات صورت سؤال، داریم:

$$v_2 = v_1 - \frac{25}{100}v_1 = \frac{75}{100}v_1 = \frac{3}{4}v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{4}{3}v_2 \quad (2)$$

$$v_4 = v_2 + \frac{40}{100}v_2 = \frac{140}{100}v_2 = \frac{7}{5}v_2 \Rightarrow v_4 = \frac{7}{5}v_2 \quad (3)$$

$$\frac{v_4}{v_1} = \frac{7}{8} \xrightarrow{\frac{v_4}{v_2} = \frac{7}{5}, \frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{3}} \frac{7}{8} = \frac{7}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{6} \quad (4)$$

با ترکیب روابط ۱، ۲ و ۳ داریم:

لذا با استفاده از رابطه مقایسه‌ای ضریب شکست، می‌توان نوشت:

$$n = \frac{c}{v} \xrightarrow{\substack{c \text{ ثابت} \\ \text{رابطه مقایسه ای}}} \frac{n_2}{n_3} = \frac{v_3}{v_2} \xrightarrow{(4)} \frac{n_2}{n_3} = \frac{5}{6}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای محاسبه زمان طی مسافت IA باید طول IA معلوم باشد. به همین منظور ابتدا زاویه شکست در شیشه را می‌یابیم. طبق قانون شکست اسنل داریم:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow 1 \times \sin 53^\circ = \frac{4}{3} \times \sin \theta_2$$

$$\frac{\sin 53^\circ = 0.8}{1.0} \rightarrow \frac{8}{10} = \frac{4}{3} \times \sin \theta_2$$

$$\Rightarrow \sin \theta_2 = 0.6 \Rightarrow \theta_2 = 37^\circ$$

اکنون با توجه به رابطه‌های مثلثاتی، ابتدا CA و CB را بر حسب h و به دنبال آن، به صورت زیر IA را می‌یابیم:

$$\tan \theta_2 = \frac{CA}{IC} \xrightarrow{\theta_2=37^\circ} \tan 37^\circ = \frac{CA}{IC} \xrightarrow{IC=h} \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{CA}{h} \Rightarrow CA = \frac{3}{4}h$$

$$CB = CA + AB \xrightarrow{AB=7 \text{ cm}} CB = \frac{3}{4}h + 7$$

در مثلث ICB داریم:

$$\tan 53^\circ = \frac{CB}{h} \xrightarrow{\tan 53^\circ = \frac{4}{3}} \frac{4}{3} = \frac{\frac{3}{4}h + 7}{h} \Rightarrow \frac{4}{3}h - \frac{3}{4}h = 7 \Rightarrow \frac{16h - 9h}{12} = 7$$

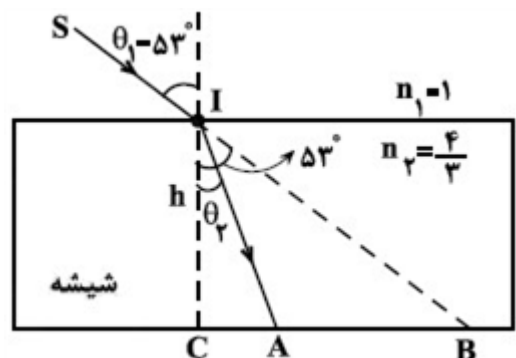
$$\frac{7h}{12} = 7 \Rightarrow h = 12 \text{ cm}$$

$$\cos 37^\circ = \frac{h}{IA} \xrightarrow{\cos 37^\circ = 0.8} \frac{8}{10} = \frac{12}{IA} \Rightarrow IA = 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}$$

در نهایت با محاسبه تندی نور در شیشه، می‌توان با استفاده از رابطه $d = v \Delta t$ ، زمان طی کردن مسافت IA را به دست آورد:

$$v = \frac{c}{n} \xrightarrow{c=3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, n=\frac{4}{3}} v = \frac{3 \times 10^8}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4} \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{0.15}{\frac{9}{4} \times 10^8} \Rightarrow \Delta t = \frac{4}{9} \times 10^{-9} \text{ s} \xrightarrow{10^{-9} \text{ s} = 1 \text{ ns}} \Delta t = \frac{4}{9} \text{ ns}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طول موج، چهار برابر فاصله شکم تا گره مجاورش است. بنابراین:

$$\frac{\lambda_n}{4} = 8 \Rightarrow \lambda_n = 32 \text{ cm}$$

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow 96 = n \times \frac{32}{2} \Rightarrow n = 6 \xrightarrow{\text{تعداد شکم } f \text{ و تعداد گره } \gamma} 6 + 7 = 13$$

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow n_A v_A = n_B v_B \xrightarrow{v = \frac{\Delta x}{\Delta t}} n_A \frac{x_A}{t_A} = n_B \frac{x_B}{t_B}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{x}{2} = n_B \times \frac{2x}{3} \Rightarrow n_B = \frac{9}{8}$$

برای خواسته دوم مسأله داریم:

$$n_A \frac{x_A}{t_A} = n_{\text{هو}} \frac{x_{\text{هو}}}{t_{\text{هو}}} \Rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{x}{2} = 1 \times \frac{x_{\text{هو}}}{4} \Rightarrow x_{\text{هو}} = 3x$$

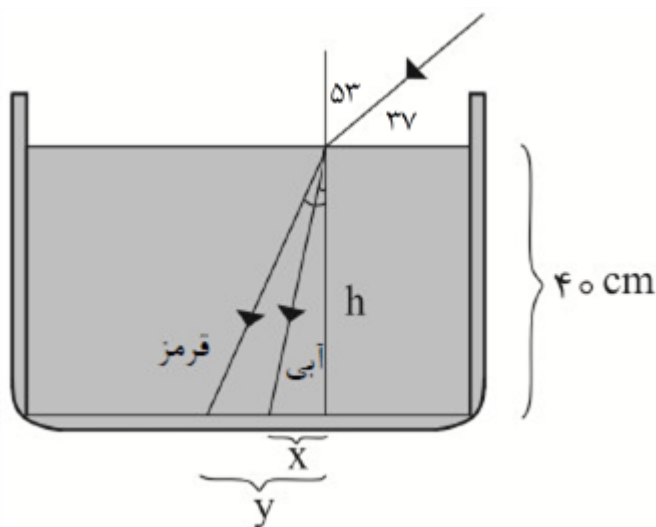
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زاویه شکست برای هر رنگ جداگانه محاسبه می‌شود. توجه کنید زاویه تابش با خط عمود

$$1 \times \sin 53^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sin r \Rightarrow r = 45^\circ \text{ قرمز}$$

سنجیده شده و ۵۳ درجه است.

$$1 \times \sin 53^\circ = \frac{4}{3} \times \sin r \Rightarrow r = 37^\circ \text{ بنفش}$$

به کمک تانژانت هر زاویه، فاصله هر پرتو از راستای قائم محاسبه می‌گردد.



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 37^\circ &= \frac{x}{40} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 30 \text{ cm} \\ \operatorname{tg} 45^\circ &= \frac{y}{40} = 1 \Rightarrow y = 40 \text{ cm} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow ? = y - x \Rightarrow ? = 10 \text{ cm}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هر چه بسامد موج بیشتر شود، ضریب و زاویه‌ی شکست آن نیز بیشتر خواهد بود، در نتیجه

به صورت کلی مقایسه‌ی بین میزان شکست امواج الکترومغناطیسی به صورت زیر است:

نارنجی > زرد > سبز > آبی > نیلی > بنفش > فرابنفش > ایکس > گاما

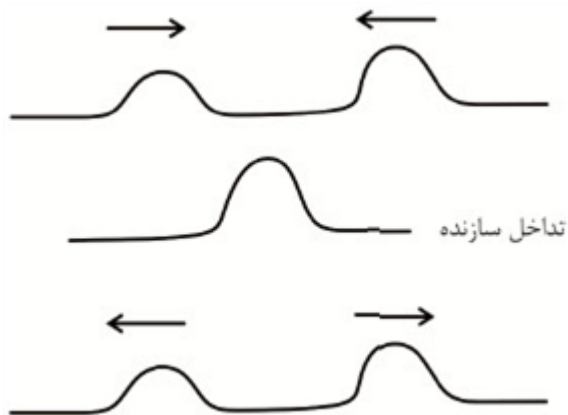
رادیویی > میکروموج > فروسرخ > قرمز

با توجه به مقایسه‌ی فوق، تنها گزینه‌ی (۲) می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با عبور پرتو از محیط رقیق به غلیظ، پرتو به خط عمود بر سطح جداکننده‌ی دو محیط نزدیک

می‌شود و بالعکس و می‌دانیم هر چه طول موج نور بیشتر باشد، میزان شکست آن کمتر است، بنابراین نور آبی نسبت به

نور قرمز بیشتر از خط عمود بر سطح جداکننده‌ی دو محیط دور می‌شود.



$$\lambda_1 > \lambda_2, \lambda = \frac{v}{f}, f \text{ یکسان} \Rightarrow v_1 > v_2$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow n_1 < n_2$$

$$v = \lambda f = (3/35 \times 10^{-3})(100 \times 10^3) = 335 \frac{m}{s}$$

فرض کنید خفاش در لحظه‌ی تولید فراصوت در فاصله‌ی d از مانع است و پس از 0.4 ثانیه در فاصله‌ی $d - \Delta x$ از مانع

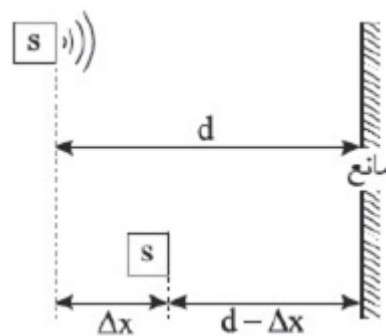
قرار گیرد، مسافت طی‌شده توسط خفاش در 0.4 ثانیه برابر $4m$ است. $\Delta x = 10 \times 0.4 = 4m$ است.

موج فراصوت در 0.4 ثانیه مسافت $2d - \Delta x$ را طی کرده است، پس فاصله‌ی خفاش در هنگام دریافت پژواک 4 متر کمتر یعنی $65m$ است.

$$2d - \Delta x = v \cdot \Delta t$$

$$2d - 4 = 335 \times 0.4$$

$$d = 335 \times 0.4 / 2 = 69m$$



جبهه‌های موج تابشی و بازتابشی یکسان است. با رسم جبهه‌های موج تابشی و بازتابشی می‌توان دریافت که زاویه میان

جبهه‌های موج تابشی و بازتابشی برابر با $180^\circ - 2\theta$ است که در آن θ ، زاویه تابش است. توجه داشته باشیم که زاویه

تابش و بازتابش با زاویه جبهه‌های موج با سطح آینه یکسان است:

$$180^\circ - 2\theta = 120^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

۷۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در بازتاب موج از انتهای بسته طناب، موج وارون می‌شود. علاوه بر این نقاطی که زودتر به انتهای بسته می‌رسند، در موج بازتابی هم جلوتر قرار می‌گیرند.

۷۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$p + |q| = 30 \text{ cm}$$

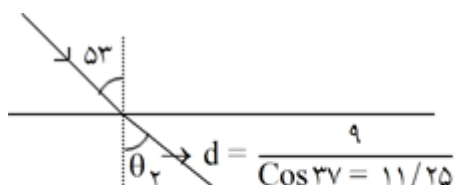
$$m = \frac{|q|}{p} = \frac{1}{3} \Rightarrow p = 3|q| \Rightarrow 4q = -30 \Rightarrow \begin{cases} q = -7.5 \text{ cm} \\ p = 22.5 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{22.5} - \frac{1}{7.5} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = -11.25 \text{ cm} \Rightarrow R = -22.5 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله جسم تا مرکز آینه} = p + |R| = 22.5 + |-22.5| = 45 \text{ cm}$$

۷۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{aligned} n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \sin \theta_2 \\ 1 \times \sin 53^\circ &= \frac{4}{3} \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta_2 = 37^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \sin \theta_3 \\ 1 \times \sin 53^\circ &= 0.8\sqrt{2} \sin \theta_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta_3 = 45^\circ$$

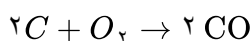
$$\left. \begin{aligned} \Delta t_1 &= \frac{d}{v} = \frac{d}{\frac{c}{n}} = \frac{11/25 \times 10^{-2}}{\frac{3 \times 10^8}{4}} = 50 \text{ ns} \\ \Delta t_2 &= \frac{d}{v} = \frac{d}{\frac{c}{n}} = \frac{12/22 \times 10^{-2}}{\frac{3 \times 10^8}{0.8\sqrt{2}}} = 48 \text{ ns} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 50 + 48 = 98 \text{ ns}$$

۷۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. پیشرفت دانش و فناوری موجب شده است که تولید فراورده‌های کشاورزی و دامی افزایش یابد و غذا به روش صنعتی تولید شود.

۷۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\text{mol } C : 5/6 \text{ L CO} \times \frac{1 \text{ mol}}{22.4/4} \times \frac{2 \text{ mol CO}}{2 \text{ mol C}} = 0.25 \text{ mol C}$$

به ازای ۲ mol CO $\leftarrow 564 \text{ kJ}$ پس به ازای ۰/۲۵ kJ $\leftarrow 70/5$ کیلو ژول

$$(70/5) + (393 \times \text{مول کربن}) = 201/5 \quad x = 0.23 \text{ mol C}$$

$$0.23 \times 12 = 4 \text{ gr کربن}$$

۷۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ظرفیت گرمایی ماده به دما، نوع ماده، مقدار ماده و حالت فیزیکی آن بستگی دارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. آنتالپی پیوند، مقدار انرژی لازم برای شکستن یک مول پیوند اشتراکی در حالت گازی و تبدیل آن به دو مول اتم گازی جدا از هم است. (موارد (T) و (ب))
بررسی عبارتهای نادرست:

مورد پ) نشان‌دهنده‌ی تشکیل شدن یک پیوند جدید است.

مورد ت) حالت فیزیکی I_2 باید گازی باشد، نه جامد!

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. یک نمونه ماده با مقدار آن در دما و فشار معین توصیف می‌شود. در نتیجه باید فشار نیز باید ذکر گردد، به عنوان نمونه ۲۰۰ گرم اتانول در دما و فشار اتاق، یک نمونه ماده محسوب می‌شود.

واکنش: $2O_3 \rightarrow 3O_2$ گرماگیر است و در نتیجه اوزون نسبت به اکسیژن سطح انرژی بیشتر و پایداری کمتری دارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. سه ماده‌ی کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها و پروتئین‌ها، افزون بر تأمین مواد اولیه برای سوخت و ساز یاخته‌ها، منابعی برای تأمین انرژی آن‌ها نیز هستند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طعم و بوی گیاه گشنیز به طور عمده وابسته به گروه عاملی هیدروکسیل ($-OH$) است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$1) \text{Cl}_2\text{O}_7 : x + 2(-2) = 0 \Rightarrow x = +6$$

$$2) \text{Cl}_2\text{O}_7 : 2x + 2(-2) = 0 \Rightarrow x = +3$$

$$3) \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 : 2(+1) + x + 4(-2) = 0 \Rightarrow x = +6$$

$$4) \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 : 2(+1) + 2x + 7(-2) = 0 \Rightarrow x = +6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا حجم بادکنک که برابر با حجم گاز O_2 تولیدی است را تعیین می‌کنیم:

$$\text{حجم } O_2 = \frac{4}{3} \times 3 \times (0/1)^3 = 0/004 m^3 \text{ یا } 4 \text{ LO}_2$$

حال از حجم O_2 به مول KClO_3 مصرفی می‌رسیم:

$$? \text{ mol KClO}_3 = 4 \text{ LO}_2 = \frac{0/004 \text{ g O}_2}{1 \text{ LO}_2} \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{32 \text{ g O}_2} \times \frac{2 \text{ mol KClO}_3}{3 \text{ mol O}_2} = \frac{1}{15} \text{ mol KClO}_3$$

$$\Delta t = 10 \text{ s} = \frac{1}{6} \text{ min} \Rightarrow \bar{R}_{\text{KClO}_3} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{6}} = 0/4 \text{ mol. min}^{-1}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

بررسی موارد:

الف) نادرست، زیرا انرژی گرمایی علاوه بر دما، به جرم ماده نیز بستگی دارد.

ب) درست

ج) درست

د) نادرست، این دو فرآیند گرماگیر هستند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کاهش آنتالپی یک سامانه به این معنی است که سامانه طی یک فرایند ترمودینامیکی گرما از دست می‌دهد، به طبع این گرمای آزاد شده توسط محیط جذب می‌گردد و محیط گرما را از سامانه می‌گیرد نه سامانه از محیط.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا، انرژی گرمایی یک نمونه ماده، کمیتی است که به جرم ماده بستگی دارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق با تعریف، به گرمای لازم برای فروپاشی شبکه بلور یک ترکیب یونی به یون‌های گازی و سازنده آن، آنتالپی شبکه گفته می‌شود. این فرآیند گرماگیر است و مقدار آنتالپی در سمت چپ معادله نوشته

$$\text{MgF}_2 : 24 + 2(19) = 62 \frac{\text{g}}{\text{mol}}, \frac{20}{62} \times 2965 = 956 \text{ kJ} \text{ می‌شود.}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی موارد:

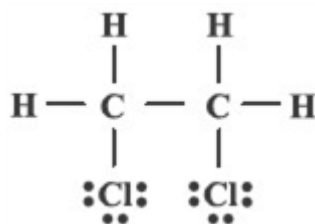
(الف) نادرست است. کربن دی‌سولفید یک ماده ناقطبی است.

(ب) نادرست است. گوگرد دی‌اکسید یک ماده خمیده است، در حالی که کربن دی‌اکسید دارای ساختار خطی است و از لحاظ نقشه پتانسیل و قطبیت نیز با هم دارای تفاوت‌های آشکاری هستند.

(پ) درست است.

(ت) نادرست است. در مولکول‌های دو اتمی ناجور هسته، توزیع الکترون‌ها به صورت نامتقارن است و مولکول قطبیت پیدا می‌کند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در واکنش گاز اتن با Cl_2 ، FeCl_3 یعنی آهن (III) کلرید نقش کاتالیزگر را دارد، پس عبارت داده شده، نادرست است. بررسی گزینه‌ها:



(۱) در ساختار فراورده واکنش:

۷ جفت الکترون پیوندی و ۶ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد و اختلاف آن‌ها برابر با ۱ است.

(۲) با توجه به ساختار لوویس فراورده، تمام اتم‌ها به آرایش گاز نجیب هم‌دوره خود رسیده‌اند.

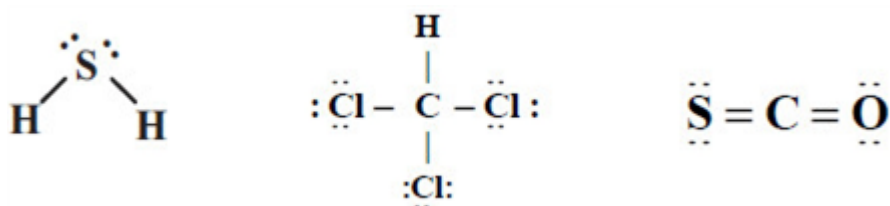
(۳) قرار گرفتن گرمای واکنش در سمت فراورده‌ها نشان از گرماده بودن این واکنش است. در واکنش‌های گرماده انرژی توسط سامانه آزاد می‌شود نه مصرف.

(۴) پیوند $\text{C}-\text{C}$ یگانه در فراورده نشان از سیر شده بودن آن است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی موارد نادرست:

مورد اول: در مدل دریای الکترونی، در میان کاتیون‌ها، سست‌ترین الکترون‌ها وجود دارد.

مورد سوم: با توجه به ساختار لوویس در ترکیبات، روند مقایسه صحیح به شکل $H_2S < SCO < CHCl_3$ است.



مورد چهارم: در واکنش فروپاشی منیزیم کلرید، فراورده‌ها یون‌های گازی هستند این در حالی است که واکنش‌دهنده‌های تشکیل منیزیم کلرید از عناصر سازنده آن، فلز منیزیم و گاز کلر است. پس این دو واکنش معکوس یکدیگر نبوده و تغییر آنتالپی آن‌ها نیز قرینه هم نیست.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها:

(۱) غلط شعاع یونی $\downarrow$ ΔH فروپاشی $\uparrow$ $\leftarrow$ دمای ذوب و جوش $\uparrow$

دمای جوش: $K_2S < Na_2O$

$r_{K^+} > r_{Na^+}$ و $r_{S^{2-}} > r_{O^{2-}}$

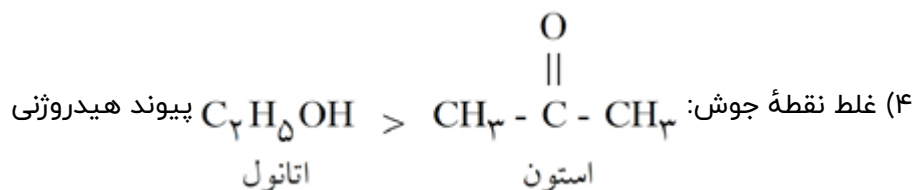
(۲) صحیح ترکیبات یونی $\leftarrow$ نقطه جوش $\uparrow$

CO و اندروالسی $HF >$ پیوند هیدروژنی $\leftarrow CaO > NaBr > HF > CO$

شبکه ΔH : فروپاشی شبکه $Ca^{2+}O^{2-} > Na^+Br^-$

پیوندی هیدروژنی قوی‌تر

(۳) نادرست $NH_3 < HF$: نقطه جوش



پیوند هیدروژنی

C_2H_5OH

$CH_3 - C(=O) - CH_3$

غلط نقطه جوش:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا فرمول شیمیایی بوکسیت Al_2O_3 و سیلیس SiO_2 است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وجود سدیم کلرید و دیگر جامدهای یونی در طبیعت نشان می‌دهد که نیروهای جاذبه میان یون‌های ناهمنام به نیروهای دافعه میان یون‌های همنام غالب است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

هر یک از مولکول‌های A، B و C به ترتیب نشان‌دهنده آمونیاک، گوگرد تری‌اکسید و کربونیل سولفید می‌باشند.

جرم مولی SCO برابر ۶۰ گرم (برابر جرم مولی پروپانول (C_3H_7OH) می‌باشد. جرم مولی فراوان‌ترین ترکیب موجود در خاک رس (SiO_2) نیز ۶۰ گرم می‌باشد. بررسی گزینه‌های درست:

(۱) اتم مرکزی در مولکول‌های B و C و مولکول OF_2 دارای بار جزئی مثبت می‌باشد.

(۲) در هر یک از مولکول‌های NH_3 و SO_3 به ترتیب ۳ و ۴ جفت الکترون پیوندی وجود دارد.

(۳) اتم گوگرد خصلت نافلزی کمتری از اتم O دارد بنابراین بار جزئی مثبت داشته و در نقشه‌ی پتانسیل الکترواستاتیکی رنگ آن آبی است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها:

- (آ) ماده‌ی کووالانسی مجموعه‌ای از اتم‌های بسیاری است که با هم پیوندهای اشتراکی دارند.
 (ب) تنوع حالت فیزیکی (جامد، مایع و گاز) در مواد مولکولی از هر یک از انواع جامدها بیشتر است.
 جامدهای (مواد) کووالانسی، یونی و فلزی (به جز جیوه) درد ما و فشار اتاق جامدند.
 (پ) عنصرهای اصلی سازنده‌ی جامدهای کووالانسی در طبیعت C و Si می‌باشند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌ها:

- (الف) جانداران سالانه مقدار بسیار زیادی از ترکیب‌های کربن‌دار را وارد بخش‌های مختلف کره‌ی زمین می‌کنند.
 (ب) اگر کره‌ی زمین را مسطح در نظر بگیریم، تا ارتفاع بیش از ۲ کیلومتر (۲۰۰۰ متری) آن از آب پوشیده می‌شود.
 (ت) در حدود ۷۵ درصد از سطح زمین از آب پوشیده شده است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. یک ترکیب یونی باید انتخاب کنیم که پتاسیم کلرید KCl می‌باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا، به ترتیب دارای بارهای -۳ ، -۴ ، -۲ و -۱ هستند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زیرا، فلز قلیایی گروه اول است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت «پ» نادرست است. سیلیس (SiO_2) فراوان‌ترین اکسید موجود در پوسته جامد کره زمین است.

بررسی سایر عبارت‌ها:

(آ)

$$\frac{\text{درصد جرمی ترکیب های یونی}}{\text{درصد جرمی ترکیب های مولکولی}} = \frac{37/74 + 1/24 + 0/96 + 0/44}{13/32} = \frac{40/38}{13/32} \cong 3$$

(ب) آرایش الکترونی یون Al^{3+} در Al_2O_3 ، یون Na^+ در Na_2O و یون Mg^{2+} در MgO به گاز نجیب دوره قبل از خود می‌رسند.

(ت) اگر فرض کنیم ۱۰۰ گرم از این خاک رس در اختیار داریم، ۱۳/۳۲ گرم آن حاوی H_2O است:

$$13/32 g H_2O \times \frac{2 \text{ mol } H}{18 g H_2O} \times \frac{1 g H}{1 \text{ mol } H} = 1/48 g H$$

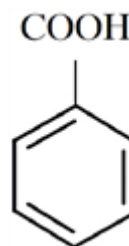
$$\Rightarrow \text{درصد جرمی } H = \frac{1/48 g H}{100 g \text{ خاک}} \times 100 = \%1/48$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زیرا، جزو جامدات کووالانسی است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در گروه عاملی کربوکسیل متصل به حلقه بنزن عدد اکسایش کربن +۳ است.

$$\text{COOH} = 0 \rightarrow C + (-4) + 1 = 0 \rightarrow C = +3$$

ترکیبی که به عنوان رنگدانه قرمز به کار می‌رود، آهن (III) اکسید Fe_2O_3 هست که در آن عدد اکسایش آهن +۳ است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به صفحه ۸۰ کتاب درسی مراجعه شود.

