

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱

$$P = \frac{(\sqrt{3})^2 + 1}{4 - \sqrt{3}} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = \frac{(\sqrt{3} + 1)(3 + 1 - \sqrt{3})}{4 - \sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} + 1 + 2 - \sqrt{3} = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

$$= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۳

$$x^2 + y^2 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy)$$

$$x - y = 3 \xrightarrow{\text{توان}} x^2 + y^2 - 2xy = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2(2) = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 + 4 = 13 (*)$$

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 13 + 2(2) = 17$$

$$\xrightarrow{\substack{y \text{ و } x \text{ مثبت} \\ x+y>0}} x + y = \sqrt{17} (**)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy)$$

$$\xrightarrow{(*) \text{ و } (**)} x^2 + y^2 = \sqrt{17}(13 - 2) \Rightarrow x^2 + y^2 = 11\sqrt{17}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۴

توجه شود که حاصل جمع مقادیر a و b و c برابر صفر است یعنی داریم:

$$a + b + c = (4 - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - 2) + (\sqrt{3} - \sqrt{5} - 2) = 0$$

از طرفی می‌دانیم طبق اتحاد مربع مجموع سه جمله داریم:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$\Rightarrow 0 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$\Rightarrow -2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc} = -2$$

$$5 \pm 2\sqrt{6} = \sqrt{2} + \sqrt{3} \pm 2\sqrt{6} = (\sqrt{2} \pm \sqrt{3})^2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

۵

$$A = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = |\sqrt{2} + \sqrt{3}| - |\sqrt{2} - \sqrt{3}|$$

پس:

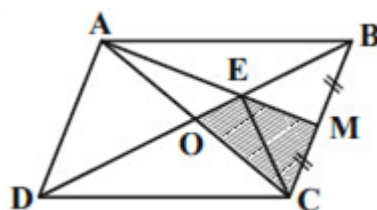
$$= (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}A = 4$$

پس:

۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم اقطار متوازی الاضلاع منصف یکدیگرند، یعنی $OA = OC$.
از طرفی طبق فرض می دانیم که نقطه M وسط ضلع BC است، یعنی $MB = MC$.
در نتیجه نقطه E محل هم‌رسمی میانه‌ها و مرکز ثقل مثلث ABC است و خواهیم داشت:



$$S_{OEMC} = S_{OEC} + S_{MEC} \xrightarrow{S_{OEC}=S_{MEC}=\frac{1}{6}S_{ABC}} S_{OEMC} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABCD}$$

و از طرفی می دانیم که $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ پس:

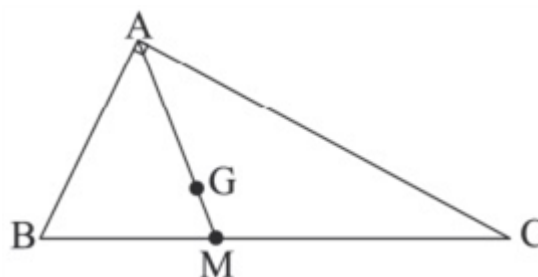
$$S_{OEMC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \xrightarrow{S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}} S_{OEMC} = \frac{1}{6}S_{ABCD}$$

۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

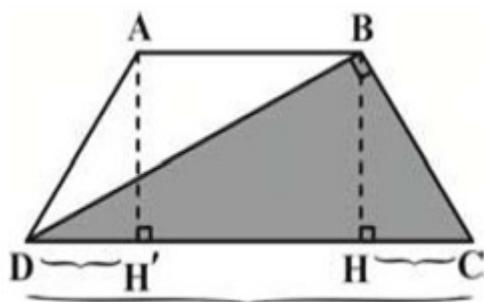
در مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر $\frac{1}{2}$ وتر است. همچنین مرکز ثقل مثلث (G) ، میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. پس داریم:

$$GM = \frac{1}{3}AM = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)BC = \frac{BC}{6}$$



۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های سؤال، شکل مقابل را خواهیم داشت. با رسم ارتفاع‌های BH و AH' خواهیم داشت:



$$DC = 10$$

$$BD = 8$$

$$AB = ?$$

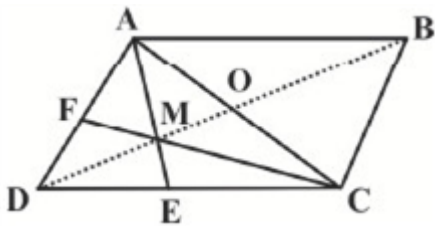
$$BC^2 = DC^2 - BD^2 \Rightarrow BC^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow BC = 6$$

$$BC^2 = CH \times CD \Rightarrow 36 = CH \times 10 \Rightarrow CH = 3/6$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{H} = \widehat{H'} \\ AD = BC \\ AH' = BH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \triangle ADH' \cong \triangle BCH \Rightarrow CH = DH'$$

$$CH = DH' = 3/6 \Rightarrow HH' = CD - (DH' + CH) \Rightarrow HH' = 10 - (3/6 + 3/6) = 10 - 1 = 9$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث ADC ، AE و CF به ترتیب میانه‌های وارد بر اضلاع CD و AD هستند، پس نقطه‌ی M محل تلاقی میانه‌های این مثلث است. می‌دانیم از تلاقی میانه‌های هر مثلث، ۶ مثلث کوچک‌تر هم مساحت ایجاد می‌شود. مثلث AMC شامل ۲ مثلث از این ۶ مثلث کوچک است، بنابراین داریم:

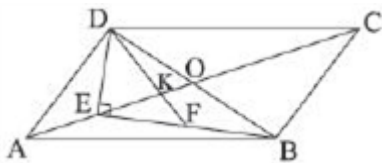


$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ADC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{6} S_{ABCD} = \frac{1}{6} \times 60 = 10$$

$$S_{AMCB} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle AMC} = 30 + 10 = 40$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

در متوازی‌الاضلاع، قطرهای منصف یک‌دیگرند. در مثلث DEB ، DF و EO میانه هستند، پس نقطه‌ی K محل هم‌رسمی میانه‌های مثلث DEB خواهد بود.



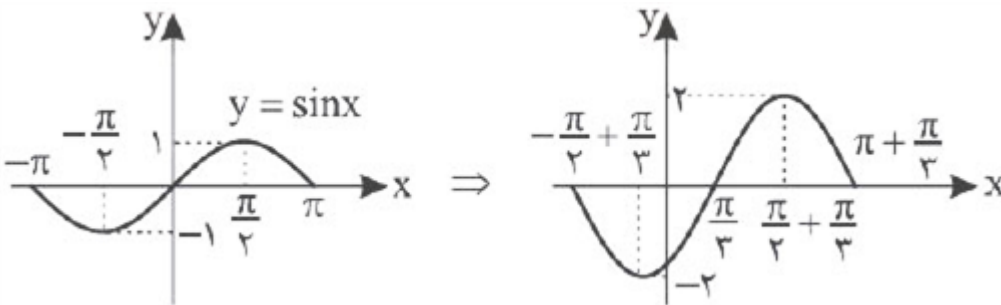
$$AC = 18 \Rightarrow AO = 9 \Rightarrow EO = 5$$

$$\triangle DEB: EO = 5 \Rightarrow DB = 10 \Rightarrow EB = 8$$

$$S_{\triangle EFK} = \frac{1}{6} S_{\triangle DEB} = \frac{1}{6} \left(\frac{6 \times 8}{2} \right) = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار $y = \sin x$ را $\frac{\pi}{3}$ به راست انتقال داده و سپس عرض نقاط را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار

$$y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \text{ حاصل شود.}$$



$$a = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{-3\pi + 2\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}, c = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

پس داریم:

برای محاسبه‌ی b باید در تابع، $x = 0$ را قرار دهیم.

$$y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \xrightarrow{x=0} y = 2 \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -2 \sin \frac{\pi}{3} = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \Rightarrow b = -\sqrt{3}$$

خواسته‌ی سؤال برابر است با:

$$\frac{c-a}{b} = \frac{\frac{4\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6} \right)}{-\sqrt{3}} = \frac{\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}}{-\sqrt{3}} = \frac{\frac{9\pi}{6}}{-\sqrt{3}} = -\frac{3\pi}{2\sqrt{3}} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در یک قطاع دایره به شعاع R و زاویه مرکزی α رادیان، طول کمان از رابطه زیر به دست

می آید: $L = R \times \alpha \Rightarrow 3/4 = 5/4 \times \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{17}{27} \text{ rad}$

براساس رابطه $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ داریم: $\frac{D}{180^\circ} = \frac{17}{27\pi} \Rightarrow D = \frac{17 \times 180^\circ}{27 \times \pi} \simeq \frac{17 \times 180^\circ}{27 \times 3.14} \simeq 36^\circ$

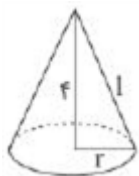
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به ساده کردن هریک از نسبت های مثلثاتی می پردازیم:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \cos\left(-\frac{41\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{41\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{40\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(10\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan\left(\frac{7\pi}{4}\right) &= \tan\left(\frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1 \\ \cotg\left(\frac{13\pi}{3}\right) &= \cotg\left(\frac{12\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cotg\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cotg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &+ (-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + (-3)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 10 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = 0.1 \\ \cos^2 x &= 2 \cos^2 x - 1 = 2(0.1) - 1 = -0.8 \\ \cos^4 x &= 2 \cos^2(2x) - 1 = 2(0.8) - 1 = 1.6 - 1 = 0.6 \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\begin{aligned} S_{\text{جانبی}} &= \pi r l \Rightarrow \pi r l = 15\pi \Rightarrow r l = 15 \\ r^2 + 16 &= l^2 \Rightarrow r^2 + 16 = \frac{225}{r^2} \Rightarrow r = 3 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد کل کلمات ۸ حرفی برابر است با:

حال برای اینکه حروف «غول» کنار هم نباشند، از احتمال متمم استفاده می کنیم و حالاتی را که این حروف کنار هم باشند، با یک دسته در نظر گرفتن حروف «غول» به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \boxed{\text{ن}} \boxed{\text{ا}} \boxed{\text{ت}} \boxed{\text{س}} \boxed{\text{م}} \boxed{\text{ل، و، غ}} &\Rightarrow 6! \times 3! \\ P(A) &= 1 - \frac{6! \times 3!}{8!} = \frac{8! - 6! \times 3!}{8!} = \frac{6!(8 \times 7 - 6)}{8!} = \frac{50}{56} = \frac{25}{28} \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فضای نمونه این آزمایش ۳۶ عضو دارد و حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر ۷ می‌شود در جدول زیر مشخص شده است:

	۲	۲	۳	۴	۴	۵
۲						۷
۲						۷
۳				۷	۷	
۴			۷			
۴			۷			
۵	۷	۷				

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

بنابراین احتمال رخ دادن پیشامد خواسته شده برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + P(A \cap B)$$

چون بیشترین مقدار ممکن برای $P(A \cup B)$ برابر ۱ می‌باشد:

$$1 = \frac{5}{6} + P(A \cap B) \Rightarrow \text{Max } P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

از طرف دیگر:

$$\begin{cases} P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \\ P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \end{cases} \Rightarrow P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = P(A) + P(B) - 2 \times \frac{1}{6}$$

$$\text{Max } (P(A) + P(B)) = \frac{7}{6}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow x + 2x + 2x + x + 2x + x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

اگر A پیشامد رو شدن عددی غیر اول و B پیشامد رو شدن عددی فرد باشد، آن‌گاه داریم:

$$P(B) = P(\{1, 3, 5\}) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

$$P(A \cap B) = P(1) = \frac{1}{9}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰

$$A = \{0, 1, -1\}$$

$$B = \{-1, 1, 3\}$$

$$A \times B = \{(0, -1), (0, 1), (0, 3), (1, -1), (1, 1), (1, 3), (-1, -1), (-1, 1), (-1, 3)\}$$

زوج‌های مرتبی که زیر آن‌ها خط کشیده شده مطلوب هستند (یعنی جمع مؤلفه‌های آن‌ها $(x + y)$ منفی نیست)، پس احتمال موردنظر برابر $\frac{7}{9}$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۱

$$\begin{aligned} 3a &\equiv 1 \xrightarrow{\text{توان ۳}} 27a \equiv 1 \pmod{m} \\ a &\equiv 2 \xrightarrow{\times 27} 27a \equiv 54 \pmod{m} \\ \Rightarrow 54 &\equiv 1 \rightarrow m \mid 53 \\ \xrightarrow{\text{عدد اول ۵۳}} m &= 53 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم d ب.م.م دو عدد مفروض است، باید $d \neq 1$ باشد. ۲۲

$$\left. \begin{aligned} d \mid 3n+1 \\ d \mid 14n-9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d \mid 14(3n+1) - 3(14n-9) \Rightarrow d \mid 41 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 41$$

غ ق ق

$$\Rightarrow 3n+1 \equiv 0 \Rightarrow 3n \equiv -1 \Rightarrow 3n \equiv -42 \Rightarrow n \equiv -14 \Rightarrow n = 41K - 14$$

$$\Rightarrow 100 \leq 41K - 14 \leq 999 \Rightarrow 3 \leq K \leq 243 \Rightarrow \text{تعداد اعداد رقمی با شرایط مسئله} = (24 - 3) + 1 = 22$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۳

بررسی گزینه‌ها:

۱) $2 \mid 3+5 \Rightarrow 2 \nmid 3, 2 \nmid 5$ نادرست

۲) $6 \mid 3 \times 4 \Rightarrow 6 \nmid 3, 6 \nmid 4$ نادرست

۳) $8 \mid 2^4 \Rightarrow 8 \nmid 2$ نادرست

۴) $ab \mid d \Rightarrow d = (ab)q \Rightarrow \begin{cases} d = a(bq) \Rightarrow a \mid d \\ d = b(aq) \Rightarrow b \mid d \end{cases}$ درست

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۴

اول از همه دقت کنید که اگر $d = (5n+3, 2n+1)$ بگیریم:

$$\frac{d \mid 2n+1}{d \mid 5n+3} \xrightarrow{\times 5}{\times -2} d \mid -1 \Rightarrow d = 1$$

چون دو عدد نسبت به هم اول هستند، پس ک.م.م دو عدد برابر ضرب آن‌ها می‌شود.

$$[2n+1, 5n+3] = (2n+1)(5n+3) = 10n^2 + 11n + 3$$

پس:

$$10 \mid 10n^2 + 11n + 3 = 10n^2 + 10n + n + 3 \Rightarrow 10 \mid n + 3$$

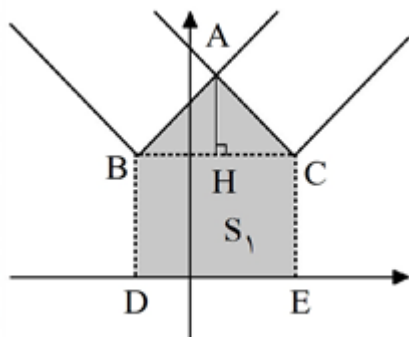
بزرگ‌ترین عدد دورقمی n برابر ۹۷ می‌شود که مجموع ارقام آن برابر ۱۶ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در جابه‌جایی تابع $y = |x - a| + 3$ داریم: (با توجه به گزینه‌ها مقدار a مثبت است).

$$\begin{cases} \text{واحد به راست} \\ x \rightarrow x - a \end{cases} \Rightarrow y = |x - a - a| + 3 = |x - 2a| + 3$$

$$\begin{cases} \text{واحد به چپ} \\ x \rightarrow x + a \end{cases} \Rightarrow y = |x + a - a| + 3 = |x + a| + 3$$

بنابراین در شکل تشکیل شده داریم:



$$\begin{cases} BC = DE = 2a - (-a) = 3a \\ BD = CE = 3 \end{cases} \Rightarrow S_1 = 3(3a) = 9a$$

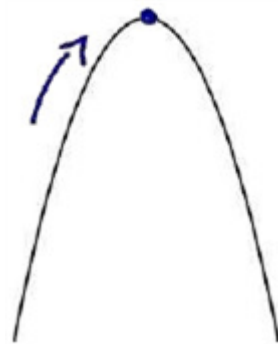
برای یافتن مساحت مثلث ABC داریم:

$$x_A = \frac{2a + (-a)}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow y_A = \left| \frac{a}{2} + a \right| + 3 = \left| \frac{3a}{2} \right| + 3 \Rightarrow AH = \left| \frac{3a}{2} \right|$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{\frac{3a}{2} \times 3a}{2} = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow S = 16 \Rightarrow \frac{9a^2}{4} + 9a = 16 \Rightarrow 9a^2 + 36a - 64 = 0$$

$$\Rightarrow (3a - 4)(3a + 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{16}{3} \text{ غ ق ق} \\ a = \frac{4}{3} \end{cases}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{a}{10} = 2/5 \Rightarrow a = 25$$

$$y_s = y(2/5) = -5 \times 6/25 + 25 \times 2/5 - 8 = 23/25$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$P(x) = (x - 2)(x + 1)q(x) + 4x + 1$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 خارج قسمت باقی مانده

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow P(2) = 4(2) + 1 \Rightarrow P(2) = 9$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P(-1) = 4(-1) + 1 \Rightarrow P(-1) = -3$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow g(1) = P(-1) + P(2) + 3(1)^2 + 2$$

$$g(1) = (-3) + 9 + 3 + 2 = 11$$

$$x - 1 \text{ بر } g(x) \text{ تقسیم باقی مانده تقسیم } g(1) = 11$$

$$p(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^6 + 3x^5 + 16a \xrightarrow{n=1} p(-2) = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$p(x) = x^6 + 3x^5 + x^4 + 2x^3 + 32$$

$$p(x) = (x^2 + 2x - 3)Q(x) + R(x) \xrightarrow{x=1} p(1) = R(1) = 39$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x = 1$ برابر ۳۹ میشود: $-5x + 44$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای تبدیل به نمودار موردنظر داریم:

$$f(x) \xrightarrow{\text{انتقال یک واحدی به سمت چپ}} f(x+1)$$

$$f(x+1) \xrightarrow{\text{انعکاس نسبت به محور } y \text{ ها}} f(-x+1)$$

$$f(1-x) \xrightarrow{\text{انعکاس نسبت به محور } x \text{ ها}} -f(1-x)$$

$$-f(1-x) \xrightarrow{\text{انقباض عمودی } \frac{1}{4} \text{ واحدی}} -\frac{1}{4}f(1-x)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ماتریس AB سطرها مضرب یکدیگرند (مثلاً سطر اول m برابر سطر دوم است). پس دترمینان آن صفر است. از طرفی:

$$BA = [-m + m - 1] \Rightarrow |BA| = |[-1]| = -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۱

باید ماتریسی پیدا کنیم تا در $A - I$ ضرب شود و حاصل، ماتریس همانی شود، برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A^3 = 3I \Rightarrow A^3 - I = 2I \Rightarrow (A - I)(A^2 + A + I) = 2I$$

$$\Rightarrow (A - I) \left(\frac{A^2 + A + I}{2} \right) = I \Rightarrow (A - I)^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 + A + I)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۲

با توجه به خواص جمع‌پذیری و تساوی ماتریس‌ها، ماتریس‌های B و I (همانی) از مرتبه ۳ می‌باشند.

$$A = KI = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} m & 2m & 3m \\ 2m & 4m & 6m \\ 3m & 6m & 9m \end{bmatrix}$$

$$2A + B = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 2m & 3m \\ 2m & 4m & 6m \\ 3m & 6m & 9m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2k+m & 2m & 3m \\ 2m & 2k+4m & 6m \\ 3m & 6m & 2k+9m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به این که $2k + m = 2k + 4m = 2k + 9m = 1$ است، بنابراین باید $m = 0$ و $2k = 1$ باشد، پس $\left(k = \frac{1}{2}\right)$

مجموع درایه‌های A برابر $3k = \frac{3}{2}$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید ماتریس قطری موردنظر به صورت $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ باشد. اگر هریک از درایه‌های این ماتریس را در شماره‌ی سطر و ستون آن ضرب کنیم، آن‌گاه ماتریس $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 4b & 0 \\ 0 & 0 & 9c \end{bmatrix}$ حاصل می‌شود و در نتیجه داریم:

$$\frac{|B|}{|A|} = \frac{a \times 4b \times 9c}{a \times b \times c} = \frac{36abc}{abc} = 36$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ پس $B^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ پس $C^{-1} = \frac{1}{5-6} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow BAC = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

حال طرفین این تساوی را از چپ در B^{-1} و از راست در C^{-1} ضرب می‌کنیم تا ماتریس A به دست آید.

$$BAC = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = B^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} C^{-1} \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

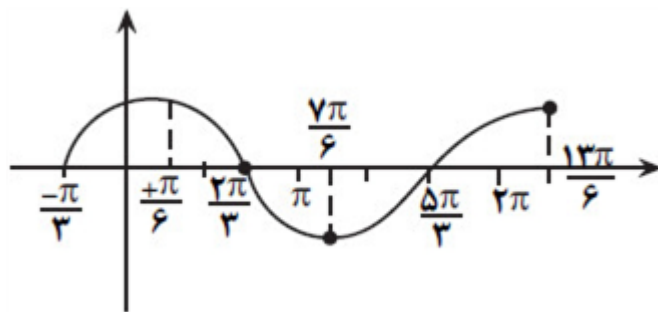
$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -21 \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

پس سطر اول ماتریس A برابر $[12 \quad -21]$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - a$ برابر $p(a)$ است. داریم:

$$p(-2) = 2(-8) + 2a + 3 = -1 \Rightarrow a = 6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای رسم نمودار تابع $f(x)$ کافیس $\sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{3}$ به سمت منفی در روی محور x انتقال بدهیم. با توجه به نمودار، منحنی در بازه $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right)$ اکیداً صعودی است. پس در $\left(\frac{7\pi}{6}, 2\pi\right)$ هم اکیداً یکنوا و طبیعتاً یکنواست.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\xrightarrow{x \leq -1} y = -2x - 2 + \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x - 4 \xrightarrow{y \geq -\frac{5}{2}} f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}, x \geq -\frac{5}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ریشه‌های داخل قدرمطلق ۲ و ۱ هستند، سه ناحیه برای تابع ایجاد می‌شود.

$$x \leq 1 \Rightarrow y = -x + 2 + k(-x + 1) + x = -kx + k + 2$$

$$1 < x \leq 2 \Rightarrow y = -x + 2 + k(x - 1) + x = kx + 2 - k$$

$$x > 2 \Rightarrow y = x - 2 + k(x - 1) + x = (k + 2)x - 2 - k$$

اگر تابع صعودی اکید باشد باید شیب هر سه خط به دست آمده مثبت باشد.

$$\begin{cases} -k > 0 \Rightarrow k < 0 \\ k > 0 \\ k + 2 > 0 \Rightarrow k > -2 \end{cases} \quad \cap \rightarrow k \in \emptyset$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مجموعه‌های A و B را به ترتیب مجموعه‌ی مضارب ۴ و ۵ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{\left(\left[\frac{500}{4}\right] - \left[\frac{100}{4}\right]\right) - \left(\left[\frac{500}{20}\right] - \left[\frac{100}{20}\right]\right)}{400}$$

$$= \frac{(125 - 25) - (25 - 5)}{400} = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}$$

$$n(s) = 500 - 100 = 400 \quad \text{توجه:}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a = 171q + r \quad 0 \leq r < 171 \Rightarrow a = 171q + 2q^3 - 3$$

$$0 \leq 2q^3 - 3 < 171 \Rightarrow 3 \leq 2q^3 < 174 \Rightarrow 1/5 \leq q^3 < 87$$

عدد a هم ۳ حالت دارد. $q = 2, 3, 4$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$0 \Rightarrow 6s \Rightarrow \begin{cases} x_A = 2t^2 \\ x_B = t^2 + 68 \end{cases}$$

$$-12 \leq x_A - x_B \leq 12 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 68 \leq 12 \Rightarrow t \leq 4\sqrt{5} \Rightarrow \text{غ ق ق} \\ t^2 - 68 \geq -12 \Rightarrow t \geq 2\sqrt{14} \Rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$6s \Rightarrow 10s \Rightarrow \begin{cases} x_A = 24t' + 72 \\ x_B = t'^2 + 12t + 104 \end{cases}$$

$$-12 \leq x_A - x_B \leq 12 \Rightarrow \begin{cases} -t'^2 + 12t - 32 \leq 12 \Rightarrow 12 = \text{ندارد} \\ -t'^2 + 12t - 32 \geq -12 \Rightarrow t' = 2 \Rightarrow t = 8 \end{cases}$$

پس از بازه ۸ تا ۱۰ ثانیه (به مدت ۲ ثانیه) فاصله این دو متحرک کمتر یا مساوی ۱۲ است.

$$10s \Rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} x_A = 24t'' + 168 \\ x_B = 20t'' + 168 \end{cases}$$

$$-12 \leq x_A - x_B \leq 12 \Rightarrow \begin{cases} 4t'' \leq 12 \Rightarrow t'' = 3 \Rightarrow t = 13 \\ 4t'' \geq -12 \Rightarrow t'' = -3 \Rightarrow \text{غ ق ق} \Rightarrow t = 10 \end{cases}$$

پس از بازه ۱۰ تا ۱۳ ثانیه (به مدت ۳ ثانیه) فاصله این دو متحرک کمتر یا مساوی ۱۲ است.

در نتیجه در مجموع ۵ ثانیه (از $t = 8s$ تا $t = 13s$) فاصله دو متحرک کمتر یا مساوی ۱۲ می‌باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل مقابل، ابتدا لحظه تغییر جهت متحرک را می‌یابیم. به همین منظور، از تشابه مثلث‌های s_2 و s_3 استفاده می‌کنیم.

$$\frac{12}{6} = \frac{t-2}{14-t} \Rightarrow 28 - 2t = t - 2 \Rightarrow 30 = 3t \Rightarrow t = 10s$$

اکنون به بررسی هر یک از عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) نادرست است. زیرا، اگر مساحت سطح بین نمودار $v-t$ و محور t تا لحظه تغییر جهت ($t = 10s$) حساب کنیم و با مکان اولیه جمع نماییم، مکان $x = +44m$ به دست می‌آید.

$$\Delta x = s_1 + s_2 = \left(\left(\frac{4+12}{2} \right) \times 2 \right) + \left(\frac{12 \times (10-2)}{2} \right) = 16 + 48 = 64m$$

$$x_{t=10s} = x_0 + \Delta x \xrightarrow{x_0 = -20m} x_{t=10s} = -20 + 64 = 44m$$

ب) درست است. ابتدا Δx و L را می‌یابیم و سپس اختلاف آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\Delta x = s_1 + s_2 + s_3 = \left(\frac{12+4}{2} \times 2 \right) + \left(\frac{12 \times 8}{2} \right) + \left(\frac{-6 \times (14-10)}{2} \right)$$

$$\Delta x = 16 + 48 - 12 = 52m$$

$$L = |s_1| + |s_2| + |s_3| = |16| + |48| + |-12| = 76m$$

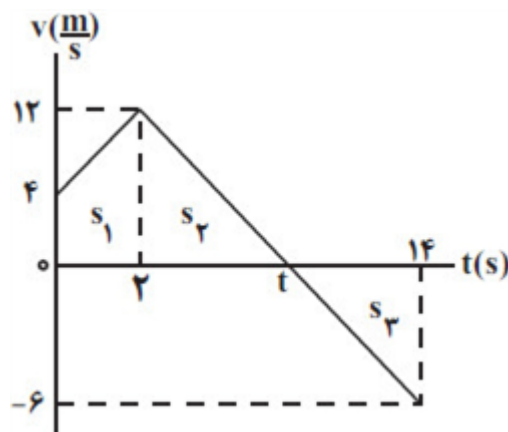
$$L - \Delta x = 76 - 52 = 24m$$

پ) درست است. متحرک در بازه زمانی $0s$ تا $10s$ که $v > 0$ است، در جهت محور x حرکت می‌کند. بنابراین داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{t=10s} - v_{t=0s}}{10 - 0} = \frac{-4 - 4}{10} = -\frac{8}{10} = -0.8 \frac{m}{s^2} \Rightarrow |a_{av}| = 0.8 \frac{m}{s^2}$$

ت) نادرست است. در بازه زمانی ($0s$ تا $2s$) و ($10s$ تا $14s$) که تندی متحرک در حال افزایش است (در این بازه‌های زمانی $a_v > 0$ است) حرکت آن تندشونده می‌باشد.

بنابراین، تا لحظه $t = 12s$ به مدت $\Delta t = (2-0) + (12-10) = 4s$ حرکت تندشونده خواهد بود.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار سرعت - زمان این حرکت را رسم می‌کنیم. مجموع مساحت S_1 و S_2 جابه‌جایی $7s$ اول یعنی $14m$ است.

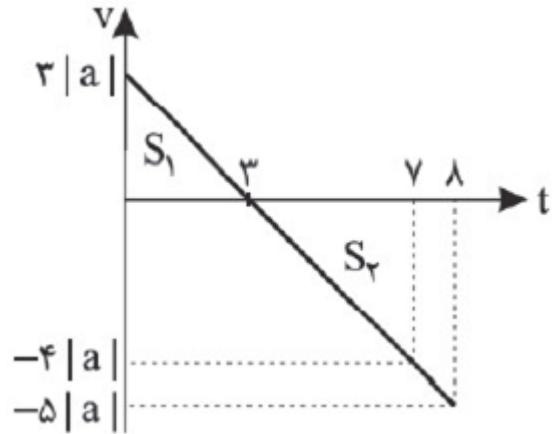
$$S_1 = \frac{3 \times 3 |a|}{2} = \frac{9 |a|}{2}$$

$$S_2 = \frac{4(-4 |a|)}{2} = -\frac{16 |a|}{2}$$

$$\Delta x = S_1 + S_2 = \frac{9 |a|}{2} - \frac{16 |a|}{2} = -\frac{7 |a|}{2} = -14m$$

$$\Rightarrow |a| = 4 \frac{m}{s^2}$$

$$t = 8s \Rightarrow v = -5 |a| = -20 \frac{m}{s}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله خودرو را می‌نویسیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v \cdot t + x_0 \xrightarrow{x_0=0} x = \frac{1}{2} \times 2t^2 + 0 \Rightarrow x = t^2$$

اکنون معادله حرکت کامیون را می‌نویسیم. دقت کنید کامیون $2/4s$ کمتر از خودرو در حرکت بوده است.

$$x' = vt' + x_0' \xrightarrow{x_0'=0, v'=36 \div 3/6=10 \frac{m}{s}} x' = 10(t - 2/4) \Rightarrow x' = 10t - 24$$

حال می‌توان لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند را حساب می‌کنیم:

$$x' = x \Rightarrow t^2 = 10t - 24 \Rightarrow t^2 - 10t + 24 = 0$$

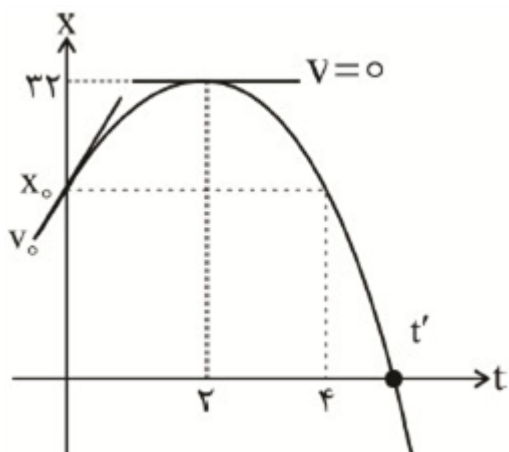
$$(t - 4)(t - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4s \\ t_2 = 6s \end{cases}$$

کامیون در لحظه $t_1 = 4s$ از خودرو سبقت می‌گیرد و خودرو در لحظه $t_2 = 6s$ از کامیون سبقت می‌گیرد. پس کامیون مدت

$\Delta t = 6 - 4 = 2s$ از خودرو جلوتر است و مسافت زیر را در این مدت می‌پیماید:

$$\Delta x = vt = 10 \times 2 = 20m$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از رأس سهمی تا ریشه سهمی (t') بردار مکان در جهت محور X و بردار سرعت خلاف جهت آن است. ابتدا معادله سهمی و سپس ریشه آن را به دست می آوریم:



$$t = 4s \text{ تا } t = 0 \text{ بازه: } l = S_{av} \times \Delta t = 4 \times 4 = 16m$$

$$= 2 \times (32 - x_0) \Rightarrow x_0 = 24m$$

$$t = 2s \text{ تا } t = 0 \text{ بازه: } \Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \times \Delta t$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{v_1 + 0}{2} \times 2 \Rightarrow v_1 = 8 \frac{m}{s}$$

$$t = 2s \text{ تا } t = 0 \text{ بازه: } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 8}{2} = -4 \frac{m}{s^2}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_1t + x_0 = -2t^2 + 8t + 24 \xrightarrow{\text{ریشه}} t' = 6s$$

بازه موردنظر از $t = 2s$ تا $t' = 6s$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در بازه زمانی $4s$ تا $8s$ دو متحرک خلاف جهت هم حرکت می کنند. ابتدا به کمک مساحت زیر نمودار مکان هر متحرک را در لحظه $t_1 = 4s$ به دست می آوریم.

$$x_A = \frac{-4 \times 4}{2} = -8m$$

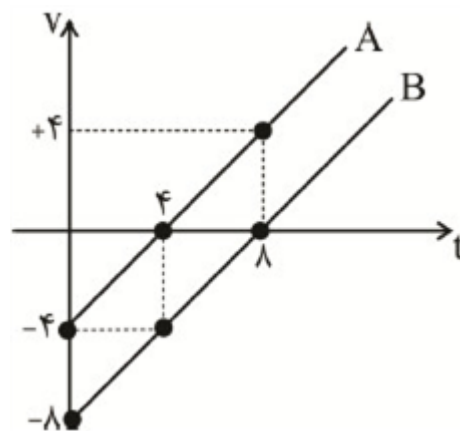
$$x_B = \frac{-8 + (-4)}{2} \times 4 = -24m$$

سپس با کمک مساحت زیر نمودار جابه جایی هر کدام را در بازه زمانی $4s$ تا $8s$ حساب می کنیم:

$$\Delta x_A = \frac{4 \times 4}{2} = +8m$$



$$\Delta x_B = \frac{-4 \times 4}{2} = -8m$$



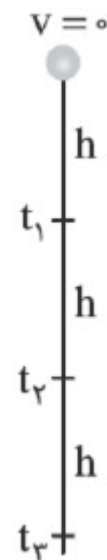
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از معادله مکان زمان در سقوط آزاد (بدون سرعت اولیه) استفاده می‌کنیم.

$$\Delta x_{t_1} = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt_1^2 \quad (1)$$

$$\Delta x_{t_2} = \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt_2^2 \quad (2)$$

با تقسیم طرفین معادله‌های ۲ بر ۱ داریم:

$$\frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} = \frac{\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_1}}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم حرکت قطارها در جهت مثبت محور X باشد و طی گام‌های زیر، مسأله را حل می‌کنیم. در بازه زمانی صفر تا ۲s جابه‌جایی هریک از قطارها را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 + v_{\cdot A} t$$

حرکت قطار A با شتاب ثابت است.

$$\Rightarrow \Delta x_A = \frac{1}{2} (-2)(2)^2 + 20(2) = 36m$$

$$\Delta x_B = v_B t = 60(2) = 120m$$

حرکت قطار B با سرعت ثابت است.

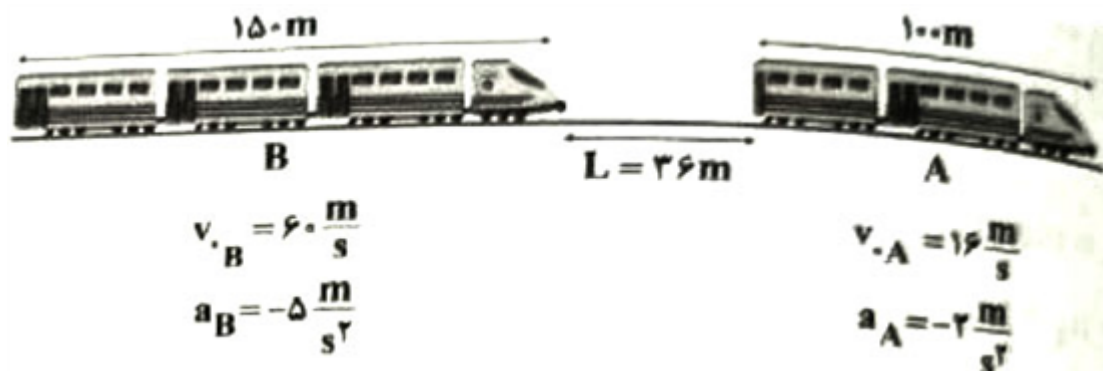
$$\Rightarrow \Delta x_B - \Delta x_A = 120 - 36 = 84m$$

پس در دو ثانیه اول حرکت، قطار B به اندازه ۸۴ متر به قطار A نزدیک می‌شود و با توجه به اینکه فاصله اولیه دو قطار، ۱۲۰ متر بود، بنابراین فاصله دو قطار به $120 - 84 = 36m$ می‌رسد.

سرعت قطار A را در لحظه $t = 2s$ به دست می‌آوریم:

$$v_A = a_A t + v_{\cdot A} = -2(2) + 20 = 16 \frac{m}{s}$$

حالا لحظه $t = 2s$ را مبدأ زمان جدید گرفته و تحلیل را ادامه می‌دهیم:



با یک تحلیل ساده می‌توان فهمید که در لحظه‌ای که قطار A متوقف می‌شود، هنوز قطار B از آن به طور کامل سبقت نگرفته است. بنابراین جابه‌جایی قطار A را تا لحظه توقف حساب می‌کنیم:

$$v_A^2 - v_{\cdot A}^2 = 2a_A \Delta x_A \Rightarrow 0^2 - 16^2 = 2(-2)\Delta x_A \Rightarrow \Delta x_A = 64m$$

پس برای این که قطار B بتواند به طور کامل از قطار A سبقت بگیرد باید داشته باشیم:

$$\Delta x_B = L + L_A + L_B + \Delta x_A \Rightarrow \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{\cdot B} t = 36 + 100 + 150 + 64 \Rightarrow -\frac{5}{2} t^2 + 60t = 350$$

$$\Rightarrow t^2 - 24t + 140 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 10)(t - 14) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 10s \quad (\checkmark) \\ \text{یا} \\ t = 14s \quad (\times) \end{cases}$$

دقت کنید $t = 14s$ غیرقابل قبول است، زیرا قطار B پس از $12s$ متوقف می‌شود. سرعت قطار B در لحظه $t = 10s$ برابر است با:

$$v_B = a_B t + v_{\cdot B} = -5t + 60 \xrightarrow{t=10s} v_B = -50 + 60 = 10 \frac{m}{s}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون ذره حرکت با شتاب ثابت دارد و در دو لحظه‌ی $t_1 = 8s$ و $t_2 = 12s$ از یک مکان عبور کرده است، حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده بوده است و در لحظه‌ی $t = \frac{t_1 + t_2}{2} = 10s$ جهت حرکت تغییر کرده است.

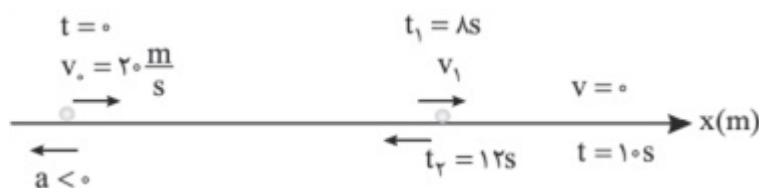
$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 10a + 20 \Rightarrow a = -2 \frac{m}{s^2}$$

$$v_1 = at + v_0 \Rightarrow v_1 = (-2 \times 8) + 20 = 4 \frac{m}{s}$$

$$d = \left(\frac{v + v_0}{2} \right) \times \Delta t = \left(\frac{4 + 20}{2} \right) \times 8 = 12 \times 8 = 96m$$

نکته: در حرکت با شتاب ثابت بر خط راست اگر ذره پس از مدت زمان‌های t_1 و t_2 از شروع حرکت از مکانی به فاصله‌ی d از محل شروع حرکت عبور کند، داریم:

$$d = \frac{1}{2}|a| t_1 t_2 \Rightarrow d = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 \times 12 = 96m$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گام اول: با توجه به این که نمودار مکان - زمان به صورت یک خط با شیب ثابت است، حرکت با سرعت ثابت می‌باشد و معادله مکان آن به صورت $x = vt + x_0$ است. با جایگذاری دو نقطه معلوم، معادله مکان این حرکت را به دست می‌آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 4s \\ x = -6m \end{array} \Rightarrow -6 = 4v + x_0 \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} t = 12s \\ x = 26m \end{array} \Rightarrow 26 = 12v + x_0 \right. \Rightarrow 32 = 8v \Rightarrow v = 4 \frac{m}{s}$$

$$-6 = 4 \times 4 + x_0 \Rightarrow x_0 = -22m$$

پس معادله مکان متحرک به صورت $x = 4t - 22$ است.

گام دوم: لحظه تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظه‌ای که $x = 0$ می‌شود. این لحظه را پیدا می‌کنیم:

$$x = 4t - 22 \xrightarrow[t=t_1]{x=0} 0 = 4t_1 - 22 \Rightarrow t_1 = 5.5s$$

گام سوم: لحظه‌ای را که بردار مکان متحرک به صورت $\vec{x} = 14\vec{i}$ است به دست می‌آوریم:

$$x = 4t - 22 \xrightarrow[t=t_2]{x=14m} 14 = 4t_2 - 22 \Rightarrow t_2 = 9s$$

$$t_2 - t_1 = 9 - 5.5 = 3.5s$$

گام چهارم: فاصله زمانی خواسته شده بین t_1 تا t_2 را به دست می‌آوریم:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$d_1 = 120 \times \frac{10}{60} = 20km$$

$$d_2 = 45 \times \frac{20}{60} = 15km$$

$$\frac{S_{av}}{V_{av}} = \frac{L}{d} = \frac{20 + 15}{20 - 15} = \frac{35}{5} = 7$$

در بازه‌ی صفر تا ۴s داریم:

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$$

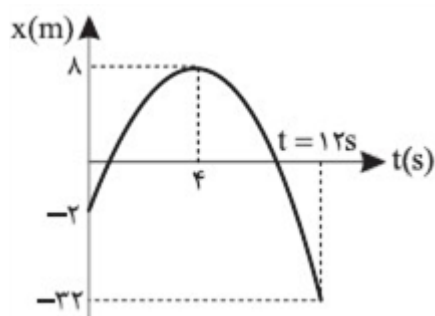
$$10 = -\frac{1}{2}a \times 4^2 + (0 \times 4) \Rightarrow 10 = -8a \Rightarrow a = -\frac{5}{4} \frac{m}{s^2}$$

در بازه‌ی ۴s تا ۱۲s می‌توانیم سرعت اولیه را صفر فرض کنیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v \cdot t$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} \times -\frac{5}{4} \times (8)^2 + (0 \times 8) = -40 \text{ m}$$

بنابر محاسبات فوق نمودار مکان - زمان به صورت زیر است:



بنابراین مسافت طی شده برابر است با:

$$d = 10 + 40 = 50 \text{ m}$$

$$S_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{50}{12} = \frac{25}{6} \frac{m}{s}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون متحرک A نسبت به متحرک B، در مدت زمان یکسان مسافت بیش‌تری طی کرده است تا به نقطه‌ی O برسد، اندازه‌ی سرعت آن بیش‌تر است و متحرک سریع‌تر محسوب می‌شود.

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی جابه‌جایی در حرکت با سرعت ثابت، ابتدا مدت زمانی که متحرک A (تندتر) از نقطه‌ی A به O می‌رسد را می‌یابیم:

$$\Delta x = v \Delta t \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0/2 AB = v_A \times 3 \\ 0/8 AB = v_A \times t_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0/2 AB}{0/8 AB} = \frac{v_A \times 3}{v_A \times t} \Rightarrow t = 12 \text{ s}$$

این ۱۲ ثانیه مدت زمان حرکت متحرک تندتر (A) از A تا O است.

از آنجایی که هر دو متحرک هم‌زمان شروع به حرکت کرده‌اند و در نقطه‌ی O به هم رسیده‌اند، لذا، متحرک کندتر (B) در همان مدت ۱۲ ثانیه از نقطه‌ی B تا نقطه‌ی O را طی می‌کند. پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0/2 AB = v_B \times 12 \\ 0/8 AB = v_B \times t_2 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{0/2 AB}{0/8 AB} = \frac{v_B \times 12}{v_B \times t_2} \Rightarrow t = 48 \text{ s}$$

بنابراین ۴۸ ثانیه طول می‌کشد تا متحرک B از نقطه‌ی O به نقطه‌ی A برسد.

۵۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر کل زمان سقوط گلوله را t فرض کنیم، با در نظر گرفتن محل رها کردن گلوله به عنوان مبدأ مکان و با استفاده از معادله‌ی حرکت در سقوط آزاد برای لحظه‌های $t_1 = 1s$ ، $t_2 = (t-1)s$ و $t_3 = t$ داریم:

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{t_1=1s} y_1 = \frac{1}{2} \times 10 \times 1^2 = 5m \xrightarrow{t_2=(t-1)s} y_2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (t-1)^2$$

$$\Rightarrow y_3 = 5t^2 - 10t + 5 \xrightarrow{t_3=t} y_3 = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow y_3 = 5t^2$$

طبق فرض صورت سؤال داریم:

$$y_3 - y_2 = 5y_1 \Rightarrow 5t^2 - (5t^2 - 10t + 5) = 5 \times 5 \Rightarrow 10t - 5 = 25 \Rightarrow t = 3s$$

بنابراین مدت زمان کل حرکت برابر با $3s$ است. در نتیجه ارتفاع h برابر است با:

$$h = y_3 = \frac{1}{2} \times 10 \times (3)^2 = 45m$$

۵۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گلوله اول ۲ ثانیه زودتر حرکت کرده، یعنی ۲ ثانیه بیش‌تر در راه بوده است.

$$t_1 = (t_2 + 2)s \quad (I)$$

در ضمن، مکان گلوله اول ۴۵ متر، بیش‌تر بوده $(y_1 = y_2 + 45)m$ و جهت مثبت را رو به پایین فرض می‌کنیم.

$$y_1 = y_2 + 45 \Rightarrow \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}gt_2^2 + 45 \xrightarrow{(I)}$$

$$5(t_2 + 2)^2 = 5t_2^2 + 45 \Rightarrow t_2^2 + 4t_2 + 4 = t_2^2 + 9$$

و زمان گلوله اول

$$\Rightarrow t_2 = 1/25 \Rightarrow t_1 = t_2 + 2 \Rightarrow t_1 = 1/25 + 2 = 3/25$$



۵۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. جابه‌جایی متحرک را در مدت حرکت با سرعت $v_1 = 20 \frac{m}{s}$ را با Δx_1 و در مدت حرکت با سرعت

$v_2 = 30 \frac{m}{s}$ را با Δx_2 و زمان کل مسیر را با Δt و طول کل مسیر را با Δx نشان می‌دهیم، بنابراین:

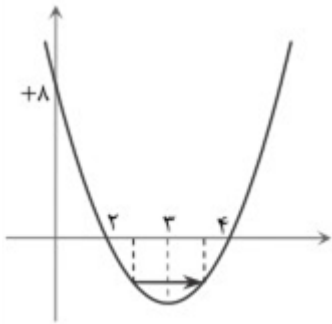
$$\Delta x_1 = v_1 \Delta t_1 = 20 \times \frac{2}{5} \Delta t = 8\Delta t$$

$$\Delta x_2 = v_2 \Delta t_2 = 30 \times \frac{3}{5} \Delta t = 18\Delta t$$

بنابراین سرعت متوسط متحرک در کل مسیر برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t} = \frac{8\Delta t + 18\Delta t}{\Delta t} = \frac{26\Delta t}{\Delta t} = 26 \frac{m}{s}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار مکان زمان آن را رسم می کنیم.
اگر $t_2 - 3 > 3 - t_1$ باشد جابه جایی و سرعت متوسط آن مثبت است.



$$t_2 - 3 > 3 - t_1 \\ \Rightarrow t_2 + t_1 > 6$$

تنها در گزینه ی «۲» این شرط برقرار است:

$$3/21 + 2/83 = 6/0.4 > 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای تعیین شتاب متوسط باید سرعت جسم را در دو لحظه $t_1 = 3s$ و $t_2 = 6s$ تعیین کنیم و در رابطه شتاب متوسط $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ قرار دهیم:

$$a_{av} = \frac{v(6) - v(3)}{6 - 3} \Rightarrow a_{av} = \frac{(-6^2 + 10 \times 6 \times 24) - (-3^2 + 10 \times 3 \times 24)}{3} = 1 \frac{m}{s^2}$$

$$\begin{cases} t_1 = 5s \\ x_1 = 20m \\ t_2 = 10s \\ x_2 = 50m \end{cases} \quad \text{گزینه ۲ پاسخ صحیح است.}$$

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{50 - 20}{10 - 5} = \frac{30}{5} = 6 \frac{m}{s} \quad \text{اول سرعت متحرک را حساب می کنیم (سرعت ثابت)}$$

بعد معادله مکان - زمان را می نویسیم (برای t_1 و x_1) تا x_2 را به دست آوریم.

$$20 = 6 \times 5 + x_1 \Rightarrow 20 = 30 + x_1 \Rightarrow x_1 = -10m$$

$$x = 6t - 10 \quad \text{حال با دانستن } x \text{ معادله مکان - زمان را می نویسیم:}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به اصل پایستگی انرژی مکانیکی خواهیم داشت:

$$E_2 = E_1 \Rightarrow E_2 = U_1 + K_1 \Rightarrow E_2 = mgh + \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Rightarrow E_2 = 2 \times 10 \times 1/5 + \frac{1}{2} \times 2 \times (4)^2 \Rightarrow E_2 = 30 + 16 = 46J$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تندی آب ثابت است، بنابراین:

$$K_1 = K_2 \quad \Rightarrow W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_{pump} = 0 \Rightarrow W_{pump} = -W_{mg}$$

$$\xrightarrow{\Delta U = -W_{mg}} W_{pump} = \Delta U \Rightarrow P_{pump} = \frac{W_{pump}}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t}$$

$$1/8 P_A \Rightarrow \frac{P_B}{P_A} = \frac{m_B}{m_A} \times \frac{\Delta h_B}{\Delta h_A} \times \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} \xrightarrow{\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V} \frac{\Delta h_B = 1 - (1.5) = 0.5m}{\Delta h_A = 2.4m}$$

$$1/8 = \frac{\rho V_B}{\rho V_A} \times \frac{2.4}{1.0} \times \frac{2.0}{\Delta t} \xrightarrow{V_B = 1.0m^3, V_A = 4m^3} 1/8 = \frac{1.0}{4} \times \frac{2.4 \times 2}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 100s$$

$$h' = x \sin 30^\circ = \frac{x}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۲

$$h = h' + 0.2 = \frac{x}{2} + 0.2$$

$$E_A = E_C \Rightarrow mgh + K_A = U_C + K_C$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mg\left(\frac{x}{2} + 0.2\right) = 10 \Rightarrow (2)(10)\left(\frac{x}{2} + 0.2\right) + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 10$$

$$\frac{x}{2} + 0.2 = 0.3 \Rightarrow x = 2(0.1) = 0.2m = 20 \text{ cm}$$

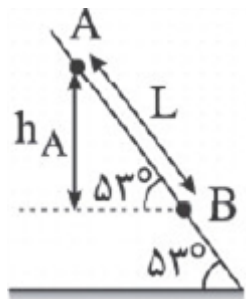
$$W_{mg} = +mgh = +2(10)(10) = +200 \text{ J}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه قانون پایستگی انرژی بین دو نقطه A و B می توان نوشت: ۶۴

$$E_B - E_A = W_{f \text{ اتلاقی}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B\right) - \left(\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A\right) = W_f$$

اگر سطح B را به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل در نظر بگیریم، $h_B = 0$ و $h_A = L \sin 53^\circ = 2/4m$ در نظر گرفته خواهد شد و داریم:



$$\left(\frac{1}{2} \times 2 \times 36 + 0\right) - (0 + 2 \times 10 \times 2/4) = W_f \Rightarrow W_{f \text{ اتلاقی}} = -12 \text{ J}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کافی است از اصل پایستگی انرژی مکانیکی به شکل زیر استفاده کنیم: ۶۵

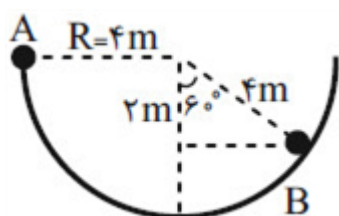
$$E_B - E_A = W_{f \text{ تلفات}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B\right) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A\right)}_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_B^2 = 10(h_A - h_B) \Rightarrow v_B^2 = 40 \Rightarrow v_B = \sqrt{40} \frac{m}{s} (*)$$

$$E_C - E_A = W_{f \text{ تلفات}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C\right) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A\right)}_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_C^2 = 10(h_A - h_C) \Rightarrow v_C^2 = 20 \Rightarrow v_C = \sqrt{20} (**)$$

$$\xrightarrow{(**), (*)} \frac{v_B}{v_C} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{20}} \Rightarrow \left|\frac{v_B}{v_C}\right| = \sqrt{2}$$



$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_{f_k} + W_{F_N} = \Delta K$$

$$\Rightarrow mg|\Delta h| - f_k d + 0 = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)$$

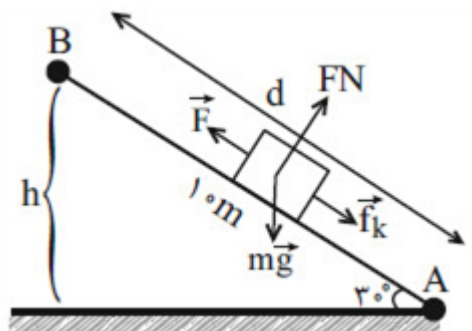
$$\Rightarrow 2 \times 10 \times 2 - 2 \times 10 = v_B^2 - 0$$

$$d = \frac{150^\circ}{360^\circ}(\pi R) = 10m$$

$$|\Delta h| = R \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$v_B = 5 \frac{m}{s}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه حرکت جسم با تندی ثابت انجام می‌گیرد، لذا: ۶۷



$$\Delta K = 0 \xrightarrow{\text{طبق قضیه کار - انرژی جنبشی}} \Delta K = W_t \Rightarrow W_t = 0$$

$$h = d \sin 30^\circ \Rightarrow h = 10 \times \frac{1}{2} = 5m$$

$$W_t = W_F + W_{mg} + W_{f_k} + W_{F_N}$$

$$\Rightarrow +Fd - mgh - f_k d + 0 = 0 \Rightarrow 10F - 2 \times 10 \times 5 - 5 \times 10 = 0$$

$$\Rightarrow F = 15N$$

نکته: کار در هر نیرو، حاصل ضرب مقدار نیرو در جابه‌جایی هم‌راستا با آن است. چون نیروهای $\vec{F}$ و اصطکاک هر دو در راستای AB بودند، طول AB را به عنوان جابه‌جایی در رابطه قرار دادیم، اما چون نیروی وزن در راستای محور y است، لذا تغییر ارتفاع را به عنوان جابه‌جایی‌اش در نظر گرفتیم.

اگر نیرو و جابه‌جایی هم‌سو باشند، کار آن نیرو مثبت و اگر در خلاف جهت باشند، کار نیرو منفی خواهد بود. لفظ «در شرایط خلا»، تضمین‌کننده صفر بودن نیروی مقاومت هوا است.

$$K_2 = K_1 + \frac{125}{100}K_1 = \frac{225}{100}K_1 = 2.25K_1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶۸

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{2.25K_1}{K_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = 1.5 \\ K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_2 = 2 \times 1.5 = 3 \frac{m}{s} \Rightarrow 6 - 4 = 2 \frac{m}{s} \end{array} \right.$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از قانون پایستگی انرژی برای دو نقطه ۱ و ۲، نیروی مقاومت هوا را محاسبه می‌کنیم:

$$W_f = E_2 - E_1 \Rightarrow -fh(U_2 + K_2) - (U_1 + K_1)$$

$$\Rightarrow -fh = mgh - \frac{1}{2}mv^2$$

$$-f \times 4 = 2 \times 10 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 100 \Rightarrow -4f = 80 - 100 \Rightarrow f = 5N$$

در مسیر بازگشت در نقطه ۳ به ارتفاع h' داریم:

$$U_2 = \frac{4}{5}K_2 \Rightarrow K_2 = \frac{5}{4}U_2 (*)$$

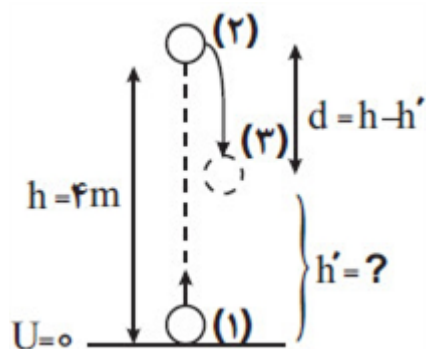
بار دیگر از قانون پایستگی انرژی بین دو نقطه ۲ و ۳ استفاده می‌کنیم:

$$W'_f = E_3 - E_2 = (U_3 + K_3) - (U_2 + K_2) \xrightarrow{(*)} -fd = \left(U_3 + \frac{5}{4}U_3\right) - U_2$$

$$\Rightarrow -fd = \frac{9}{4}U_3 - U_2 \Rightarrow -fd = \frac{9}{4}mgh' - mgh \xrightarrow[h=4m, f=5N]{d=h-h'=4-h'}$$

$$-5 \times (4 - h') = \frac{9}{4} \times 20h' - 2 \times 10 \times 4 \Rightarrow -20 + 5h' = 45h' - 80 \Rightarrow h' = 1/5m$$

دقت کنید که d جابه‌جایی بین دو نقطه ۲ و ۳ است.



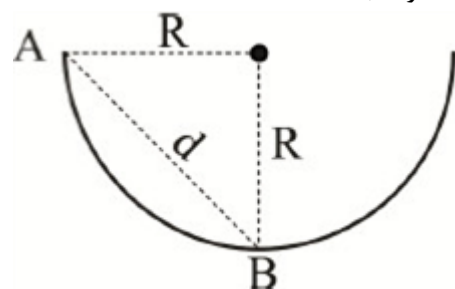
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مسیر طی شده برابر ربع دایره است، اما نیروی وزن در طول مسیر به اندازه شعاع R و با زاویه صفر کار انجام می‌دهد.

$$\begin{cases} d=R \\ \theta=0 \end{cases} \quad \begin{array}{c} A \\ \downarrow mg \\ \text{Quarter Circle} \\ B \end{array} \quad \begin{aligned} W_{mg} &= Mg \times R \times \frac{\cos(0)}{1} \\ W_{mg} &= 2/5 \times 9/8 \times 5 \times 1 \Rightarrow W_{mg} = 122/5 J \end{aligned}$$

$$d = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}m$$

توضیح:

اما در مسیر d همواره نیروی وزن در دو جهت عمود و همسو با جابه‌جایی تجزیه می‌شود که کار در مسیر عمود صفر و در مسیر همسو مثبت است.



$$\begin{cases} \Delta U = mg(\Delta h) \\ h_1 = 1500m \Rightarrow \Delta h = 1200m \\ h_2 = 2700m \\ g = 10 \frac{N}{kg} \\ m = 85 kg \end{cases} \Rightarrow \Delta U = 85 \times 10 \times (2700 - 1500) \\ \Rightarrow \Delta U = 850 \times 1200 = 1020000 J \Rightarrow \Delta U = 1020 kJ$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا به کمک قضیه کار و انرژی جنبشی، کار برابند نیروهای وارد شده به جسم را در کل مسیر حرکت به دست می‌آوریم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 2 \times (10^2 - 20^2) = -300 J$$

بنابراین در کل حرکت، اندازه‌ی کار برابند نیروها بر روی گلوله برابر ۳۰۰ J است و داریم:

$$W_t = W_{\text{وزن}} + W_{\text{مقاومت هوا}} \xrightarrow{W_{\text{وزن}}=0} W_{\text{مقاومت هوا}} = -300 J$$

با توجه به این که نیروی مقاومت هوا ثابت فرض شده است، اگر در کل حرکت، کار نیروی مقاومت هوا برابر ۳۰۰ J - باشد، اندازه‌ی کار نیروی مقاومت هوا از شروع حرکت تا نقطه‌ی اوج (بیشترین ارتفاع از سطح زمین) برابر ۱۵۰ J - است و داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{\text{مقاومت هوا}} + W_{\text{وزن}} = \frac{1}{2} m (v^2 - v_1^2) \\ \xrightarrow{v=0 \text{ در نقطه ی اوج}} -150 + W_{\text{وزن}} = \frac{1}{2} \times 2 \times (-20)^2 \Rightarrow W_{\text{وزن}} = -250 J$$

$$\frac{W_{\text{وزن}}}{W_{\text{مقاومت هوا}}} = \frac{-250}{-150} = \frac{5}{3}$$

بنابراین:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 \times (12^2 - 2^2) \\ \Rightarrow W_t = 140 \times 10^2 J = 140 kJ$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق قضیه کار و انرژی جنبشی، می‌دانیم طی یک جابه‌جایی معین، کار کل نیروهای وارد بر جسم، با تغییرات انرژی جنبشی جسم برابر است، بنابراین:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \quad (1)$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \quad (2)$$

با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت داریم:

با توجه به روابط ۱ و ۲ داریم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m (2a\Delta x) \Rightarrow W_t = \Delta K = ma\Delta x \Rightarrow W_t = 2 \times 3 \times (11 - 7) = 24 J$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از معادله‌ی مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2} at^2 + v \cdot t \xrightarrow[\Delta t = 8s]{\Delta x = 80m} 80 = \frac{1}{2} a(8)^2 + v \cdot (8) \Rightarrow 80 = 32a + 8v$$

$$\Rightarrow 10 = 4a + v \quad (1)$$

از طرفی با استفاده از معادله‌ی سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v = at + v \xrightarrow[t = 8s]{v = 15 \frac{m}{s}} 15 = 8a + v \quad (2)$$

$$\begin{cases} 4a + v = 10 \\ 8a + v = 15 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5}{4} \frac{m}{s^2}$$

بنابراین با استفاده از معادلات (۱) و (۲) داریم:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$pH = -\text{Log} [H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-4/7} = 10^{0/7} \times 10^{-5} = 2 \times 10^{-5}$$

$$[H^+] = M_A n \alpha \xrightarrow[M_A = 0.1M]{n=1} \alpha = \frac{[H^+]}{M_A} = \frac{2 \times 10^{-5}}{0.1} = 2 \times 10^{-4} \quad \text{درجه یونش}$$

$$\% \alpha = 2 \times 10^{-2} \quad \text{درصد یونش}$$

$$25^\circ C \text{ در دمای } \Rightarrow [H^+] [OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [OH^-] = \frac{10^{-14}}{2 \times 10^{-5}} = 0.5 \times 10^{-9} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$\frac{[H^+]}{[OH^-]} = \frac{2 \times 10^{-5}}{0.5 \times 10^{-9}} = 4 \times 10^4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. آمونیاک از جمله بازهای ضعیف است. به طوری که در محلول آن افزون بر مقدار کمی از یون‌های آب

پوشیده (OH^-, NH_4^+) ، شمار بسیاری از مولکول‌های آمونیاک (NH_3) یافت می‌شود. اما دقت کنید که در این محلول

افزون بر یون‌های ذکر شده، یون‌های H^+ نیز حضور دارند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان دریافت:

$$M_{HA} = 3M_{HB}$$

$$\alpha_{HB} = 2\alpha_{HA} \Rightarrow \alpha_{HA} = \frac{1}{2}\alpha_{HB}$$

$$HA \text{ در اسید } : [H^+] = M_{HA} \cdot \alpha_{HA} = 3M_{HB} \cdot \frac{1}{2}\alpha_{HB} = \frac{3}{2}M_{HB} \cdot \alpha_{HB}$$

$$\Rightarrow pH_{HA} = -\text{Log} [H^+] = -\text{Log} \frac{3}{2}M_{HB} \cdot \alpha_{HB} = -\text{Log} \frac{3}{2} - \text{Log} M_{HB} \alpha_{HB}$$

$$HB \text{ در اسید } : [H^+] = M_{HB} \cdot \alpha_{HB} \Rightarrow pH_{HB} = -\text{Log} [H^+] = -\text{Log} M_{HB} \cdot \alpha_{HB}$$

اکنون می‌توان اختلاف میان pH دو محلول را محاسبه کرد:

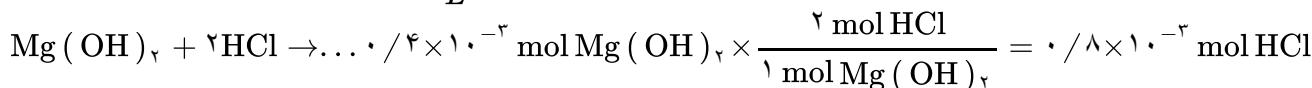
$$pH_{HB} - pH_{HA} = -\text{Log} M_{HB} \alpha_{HB} - \left[-\text{Log} \frac{3}{2} - \text{Log} M_{HB} \alpha_{HB} \right] = \text{Log} \frac{3}{2}$$

$$= \text{Log} 3 - \text{Log} 2 = 0.5 - 0.3 = 0.2$$

$$200 \times 10^{-3} g \times \frac{11/6 g Mg(OH)_2}{100 g} \times \frac{1 \text{ mol } Mg(OH)_2}{58 g} = 0/4 \times 10^{-3} \text{ mol } Mg(OH)_2$$

$$200 \times 10^{-3} g \times \frac{21 g NaHCO_3}{100 g} \times \frac{1 \text{ mol } NaHCO_3}{84 g} = 0/5 \times 10^{-3} \text{ mol } NaHCO_3$$

$$pH = 1/7 \Rightarrow [H^+] = 2 \times 10^{-2} \frac{\text{mol}}{L}$$



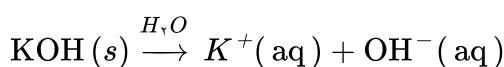
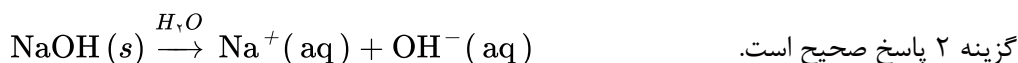
در مجموع $1/3 \times 10^{-3}$ مول HCl خنثی می‌کنند.

$$1/3 \times 10^{-3} \text{ mol } HCl \times \frac{1 L HCl}{2 \times 10^{-2} \text{ mol } HCl} = 65 \times 10^{-3} L = 65 \text{ mL}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت‌های دوم و سوم درست هستند. بررسی عبارت‌های نادرست:

• یافته‌های تجربی آرنیوس نشان داد که محلول اسیدها و بازها رسانای برق هستند، هر چند میزان رسانایی آن‌ها با یکدیگر یکسان نیست.

• مدل آرنیوس، خاصیت اسیدی یا بازی مواد را در محیط‌های غیرآبی می‌تواند توجیه کند.



$$pH(NaOH) = 12 \Rightarrow pOH = 2 \Rightarrow [OH^-] = 10^{-2} M$$

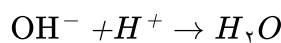
$$pH(KOH) = 12/4 \Rightarrow pOH = 1/6 \Rightarrow [OH^-] = 10^{-1/6} = 2/5 \times 10^{-2}$$

از آنجا که نسبت‌های مولی فرآورده‌ها با هم برابر است؛ بنابراین غلظت یون‌های فلزی با یون‌های هیدروکسید موجود در محلول با

$$\frac{[Na^+]}{[K^+]} = \frac{10^{-2}}{2/5 \times 10^{-2}} = 0/4 \quad \text{هم برابر است، بنابراین:}$$

$$\left. \begin{aligned} 0/05 L \times 10^{-2} M &= 5 \times 10^{-4} \text{ mol } (OH^-) \\ 0/05 L \times 2/5 \times 10^{-2} &= 12/5 \times 10^{-4} \text{ mol } (OH^-) \end{aligned} \right\} \quad \text{و در ادامه داریم:}$$

$$\text{جمع مول‌های یون هیدروکسید} = 1/75 \times 10^{-3} \text{ mol } (OH^-)$$



$$1/75 \times 10^{-3} (\text{mol}) = V \times 3/5 \Rightarrow V = 0/5 \text{ mL}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فقط مورد آ درست است.

آ) محلول HBr اسید قوی بوده و غلظت اولیه HBr با غلظت نهایی H^+ و Br^- برابر است.



$$M_1 : 0.5 \quad . \quad .$$

$$\Delta M : -0.5 \quad 0.5 \quad 0.5$$

$$M_2 : . \quad 0.5 \quad 0.5$$

ب) محلول HCN اسید ضعیف بوده و غلظت نهایی $[H^+]$ و $[CN^-]$ کمتر از $0.3M$ است.

پ) محلول HI اسید قوی بوده و به هیچ وجه $[I^-] = [H^+] = [HI]$ نیست زیرا تمام مولکول‌های HI به H^+ و I^- تفکیک می‌شوند.

ت) محلول HF اسید ضعیف بوده که اگر درجه یونش آن از 0.5 بزرگ‌تر باشد $[F^-] > [H^+] = [HF]$ برقرار خواهد بود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{8.55 \text{ g Ba(OH)}_2}{171 \text{ g Ba(OH)}_2} \times \frac{1 \text{ mol Ba(OH)}_2}{1} = 0.05 \text{ mol Ba(OH)}_2$$

$$M = \frac{0.05 \text{ mol}}{2.5 \text{ L}} = 0.02 \text{ mol. L}^{-1}$$

$$[OH^-] = 0.02 \times 2 = 0.04 \text{ mol. L}^{-1} \Rightarrow [H^+] = 25 \times 10^{-14} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$\text{pH} = -\text{Log} [H^+] = 14 - \text{Log } 25 = 14 - 1.4 = 12.6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا مول باز MOH را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol MOH} : \frac{4}{80} \text{ g MOH} \times \frac{1 \text{ mol MOH}}{80 \text{ g MOH}} = 6 \times 10^{-2} \text{ mol MOH}$$

$$M = \frac{n}{V} = \frac{6 \times 10^{-2} \text{ mol}}{2 \text{ L}} = 3 \times 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$$

سپس مولاریته این باز را محاسبه می‌کنیم:

$$K_b = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow \frac{1}{5} \times 10^{-3} = \frac{3 \times 10^{-2} \alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow 20\alpha^2 = 1-\alpha \Rightarrow 20\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 4(-1)(20) = 81 \Rightarrow \alpha = \frac{-1 \pm 9}{40} \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق } -\frac{1}{4} \\ \text{ق ق } \frac{8}{40} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

در نتیجه درجه یونش این باز 0.2 خواهد بود.

$$[OH^-] = 3 \times 10^{-2} \times \frac{1}{5} = 6 \times 10^{-3}$$

$$[OH^-] [H^+] = 10^{-14} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{6 \times 10^{-3}} = \frac{10^{-11}}{6}$$

$$\text{pH} = -\text{Log} [H^+] = -\text{Log} \frac{10^{-11}}{6} = \text{Log } 6 + 11 = 11.8$$

$$\text{pH} = 4/7 \Rightarrow H^+ = 10^{-4/7} = 10^{-5} \times 10^{1/7} = 2 \times 10^{-5} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [OH^-] = \frac{10^{-14}}{2 \times 10^{-5}} = 5 \times 10^{-10} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$\text{pH} = 11/4 \Rightarrow H^+ = 10^{-11/4} = 10^{-12} \times 10^{1/4} = 4 \times 10^{-12} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$\text{نسبت خواسته شده} = \frac{5 \times 10^{-10}}{4 \times 10^{-12}} = 125$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{pH} = -\text{Log}[H^+] \text{ و } [H^+] = 10^{-\text{pH}} \\ A : [H^+] = 10^{-2/15} = 7 \times 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1} \\ C : [H^+] = 10^{-11/4} = 4 \times 10^{-12} \text{ mol. L}^{-1} \\ B : \text{pH} = 4 \\ D : [H^+] = 10^{-1} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A \times C}{B \times D} = \frac{28 \times 10^{-15}}{4} = 7 \times 10^{-15}$$

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M} \Rightarrow [H^+]^2 = 2 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-2} \Rightarrow [H^+] = 2 \times 10^{-4} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$K_b = \frac{[OH^-]^2}{M} \Rightarrow [OH^-]^2 = 4 \times 10^{-6} \times 10^{-2} \Rightarrow [OH^-] = 2 \times 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-2}} = 0/1$$

$$K_a = M\alpha_a^2 \Rightarrow \alpha_a = \sqrt{\frac{2 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-2}}} = 0/1$$

$$K_b = M\alpha_b^2 \Rightarrow \alpha_b = \sqrt{\frac{4 \times 10^{-6}}{10^{-2}}} = 0/2 \Rightarrow \frac{0/2}{0/1} = 2$$

$$\text{pH} = 2 \Rightarrow [H^+] = M \cdot \alpha = 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$$

با توجه به آن که مقدار ثابت یونش کوچک است می توان نوشت:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M} \Rightarrow 2 \times 10^{-4} = \frac{10^{-4}}{M} \Rightarrow M = 0/5 \text{ mol. L}^{-1}$$

$$?g\text{HCOOH} = 400 \text{ mL} \times \frac{1L}{1000 \text{ mL}} \times \frac{0/5 \text{ mol HCOOH}}{1L} \times \frac{46g \text{HCOOH}}{1 \text{ mol HCOOH}} = 9/2g \text{HCOOH}$$

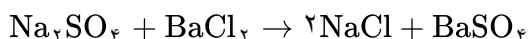
$$\frac{n_{Na^+}}{n_{K^+}} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{M(Na^+)}{M(K^+)} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{M(NaOH)}{M(KOH)} = \frac{1}{3} \rightarrow M(KOH) = 0/6M$$

KOH و NaOH هر دو بازهای قوی هستند و از هر مول آن ها در آب یک مول OH⁻ تولید می شود.

$$M(OH^-) = M(KOH) + M(NaOH) = 0/6 + 0/2 = 0/8M$$

$$\text{POH} = -\text{Log}[OH^-] = -\text{Log } 0/8 = 0/9 \rightarrow \text{pH} = 14 - \text{POH} = 13/9$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



ابتدا با استفاده از اطلاعات داده شده، جرم یون کلرید موجود در محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$?g\text{Cl}^- = 0.2L \times \frac{2 \text{ mol Na}_2\text{SO}_4}{1L} \times \frac{2 \text{ mol Cl}^-}{1 \text{ mol Na}_2\text{SO}_4} \times \frac{35.5g\text{Cl}^-}{1 \text{ mol Cl}^-} = 99.4g\text{Cl}^-$$

حجم نهایی محلول برابر با $1600 \text{ mL} = (200 + 1400)$ بوده و جرم نهایی آن برابر است با:

$$d = \frac{\text{جرم محلول}}{\text{حجم محلول}} \Rightarrow \text{جرم محلول} = 1/25 \times 1600 = 2000g$$

اکنون می‌توان درصد جرمی یون Cl^- در محلول را محاسبه نمود:

$$\text{Cl}^- \text{ درصد جرمی} = \frac{\text{جرم Cl}^-}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \frac{99.4}{2000} \times 100 = 4.97\%$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

{ در هر 10^6 گرم محلول، $400g$ حل‌شونده موجود است } $400 \text{ ppm} \Rightarrow$

در هر گرم محلول $\frac{400}{10^6}$ گرم یا 0.4 میلی گرم حل‌شونده وجود دارد $\Rightarrow$

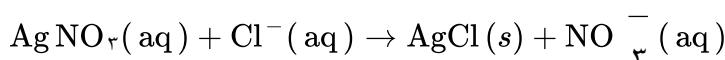
در هر کیلوگرم محلول، 400 میلی گرم (0.4 گرم) حل‌شونده وجود دارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$? \text{ mol Mg}^{2+} = 20 \text{ kg محلول} \times \frac{5400 \text{ kg Mg}^{2+}}{10^6 \text{ kg محلول}} \times \frac{1000g}{1 \text{ kg}} \times \frac{1 \text{ mol Mg}^{2+}}{24g\text{Mg}^{2+}} = 4.5 \text{ mol Mg}^{2+}$$

$$?g\text{MgCl}_2 = 4.5 \text{ mol Mg}^{2+} \times \frac{1 \text{ mol MgCl}_2}{1 \text{ mol Mg}^{2+}} \times \frac{95g\text{MgCl}_2}{1 \text{ mol MgCl}_2} = 427.5g\text{MgCl}_2$$

$$? \text{ mol Cl}^- = 4.5 \text{ mol Mg}^{2+} \times \frac{2 \text{ mol Cl}^-}{1 \text{ mol Mg}^{2+}} = 9 \text{ mol Cl}^-$$



$$? \text{ mol Cl}^- = 68g \text{ AgNO}_3 \times \frac{1 \text{ mol AgNO}_3}{170g \text{ AgNO}_3} \times \frac{1 \text{ mol Cl}^-}{1 \text{ mol AgNO}_3} = 10 \text{ mol Cl}^-$$

$$? \text{ mol Cl}^- = 10 - 9 = 1 \text{ mol Cl}^- \text{ در کلسیم کلرید}$$

$$?g\text{CaCl}_2 = 1 \text{ mol Cl}^- \times \frac{1 \text{ mol CaCl}_2}{2 \text{ mol Cl}^-} \times \frac{111g\text{CaCl}_2}{1 \text{ mol CaCl}_2} = 55.5g\text{CaCl}_2$$

$$\frac{\text{جرم MgCl}_2}{\text{جرم CaCl}_2} = \frac{427.5}{55.5} \approx 7.7$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا غلظت مولی محلول حاصل از مخلوط شدن محلول‌های ۱ و ۲ را محاسبه می‌کنیم:

$$M_{\text{مخلوط نهایی}} = \frac{\text{mol}_{(1)} + \text{mol}_{(2)}}{V_{(1)} + V_{(2)}} = \frac{(4 + 8) \times 0.2 \text{ mol}}{0.1L} = 24 \text{ mol. L}^{-1}$$

$$24 = \frac{10 \times 1/8 \times d}{15} \Rightarrow d = 2g \cdot \text{mL}^{-1}$$

با استفاده از رابطه $M = \frac{10 \text{ ad}}{\text{جرم مولی}}$ داریم:

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم نمک}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 560 = \frac{x}{800} \times 10^6 \Rightarrow x = 0.448 \text{ g نمک}$$

$$\text{جرم مولی نمک} = \frac{0.448 \text{ g}}{2 \times 10^{-3} \text{ mol}} = 224 \text{ g. mol}^{-1}$$

$$\text{Cu}_2\text{SO}_4 : 224 \text{ g. mol}^{-1}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا حجم محلول اولیه را به دست می‌آوریم: ۹۶

$$\text{حجم محلول اولیه} = 750 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mL}}{1.25 \text{ g}} = 600 \text{ mL}$$

$$\text{مول حل‌شونده محلول اولیه} = 600 \text{ mL} \times \frac{8 \text{ mol NaOH}}{1000 \text{ mL}} = 4/8 \text{ mol NaOH}$$

با اضافه کردن محلول، غلظت اولیه ۲ مولار کاهش می‌یابد (یعنی از ۸ مولار به ۶ مولار می‌رسد).

$$\text{غلظت مولی محلول نهایی} = \frac{\text{مجموع مول‌های حل‌شونده}}{\text{مجموع حجم‌های محلول}} \Rightarrow 6 = \frac{(4/8 + x) \text{ mol}}{(0.6 + 0.4) \text{ L}} \Rightarrow x = 1/2 \text{ mol}$$

حالا از رابطه زیر درصد جرمی محلول را به دست می‌آوریم:

$$M = \frac{n}{V} \Rightarrow \frac{1/2 \text{ mol}}{0.4 \text{ L}} = 3 \text{ mol. L}^{-1}$$

$$M = \frac{\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی} \times 10}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow 3 = \frac{10 \times a \times 1/2}{40} \Rightarrow a = 10\%$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی پرسش‌ها: ۹۷

الف) ساختار لوویس گونه‌های داده شده به صورت زیر است. در مولکول SOCl_2 سه جفت الکترون پیوندی و در NO^+ چهار جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.



ب) SiCl_4 جزو ترکیب‌های مولکولی است پس در نام‌گذاری آن از پیشوندهای یونانی استفاده می‌شود. نام این ترکیب سیلیسیم تتراکلرید است که پیشوند تترا نشان‌دهنده‌ی تعداد اتم کلر است.

پ) در هواکره گاز SO_2 به SO_3 تبدیل شده و از واکنش این گاز با آب، سولفوریک اسید تولید می‌شود.

ت) در واکنش‌های شیمیایی طبق قانون پایستگی جرم، شمار کل اتم‌ها، تعداد اتم‌های هر عنصر و همچنین مجموع جرم مواد در دو سمت واکنش برابر است. توجه کنید هیچ الزامی به برابر بودن مولکول‌های دو طرف معادله نیست.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فقط عبارت دوم درست است. ۹۸

بررسی عبارت‌ها:

شماری از ترکیب‌های یونی NH_4Cl ، NH_4NO_3 و ... فاقد عنصر فلزی هستند.

از آن‌جا که آنیون‌ها به آرایش گاز نجیب هم‌دوره‌ی خود می‌رسند، پس فرمول آنیون این ترکیب به صورت B^{2-} و در نتیجه فرمول کاتیون ترکیب به صورت A^+ است. از طرفی چون کاتیون و آنیون، هم‌الکترون هستند، فلز A متعلق به گروه ۱ بوده و جزو دسته‌ی s محسوب می‌شود.

ترکیب‌های یونی دوتایی، ترکیب‌هایی هستند که فقط از دو عنصر تشکیل شده‌اند.

ترکیب‌های یونی، خنثی هستند، زیرا مجموع بار مثبت کاتیون‌ها با مجموع بار منفی آنیون‌های آن‌ها برابر است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. غلظت یون سولفات (SO_4^{2-}) در محلول اولیه‌ی آلومینیم سولفات برابر است با:

$$855 \text{ ppm } Al_2(SO_4)_3 \times \frac{3(96)g SO_4^{2-}}{342g Al_2(SO_4)_3} = 720 \text{ ppm}$$

برای محلول نهایی می‌توان نوشت:

= غلظت یون سولفات

(جرم محلول سدیم سولفات $\times$ غلظت سولفات) + (جرم محلول آلومینیم سولفات $\times$ غلظت سولفات)

جرم محلول نهایی

$$\Rightarrow 560 = \frac{(720 \times 2) + (x \times 4)}{(2 + 4)} \Rightarrow x = 480 \text{ ppm}$$

بنابراین غلظت یون سولفات در محلول سدیم سولفات برابر با ۴۸۰ ppm بوده است و غلظت محلول سدیم سولفات برحسب ppm به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$480 \text{ ppm } SO_4^{2-} \times \frac{142g Na_2SO_4}{96g SO_4^{2-}} = 710 \text{ ppm}$$

$$710 \times (10^{-4}) = \%0.71$$

و از آن‌جا درصد جرمی محلول به راحتی به دست می‌آید:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فراوانی یون پتاسیم در آب دریا، کم‌تر از یون منیزیم است. ۱۰۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ساختار کروم (III) سولفید (Cr_2S_3) ، نسبت میان شمار آنیون‌ها به کاتیون‌ها برابر با ۱/۵ است. مقدار این نسبت در ساختار اسکاندیم اکسید، آلومینیم سولفات و گالیم کربنات نیز برابر با ۱/۵ است. ۱۰۱

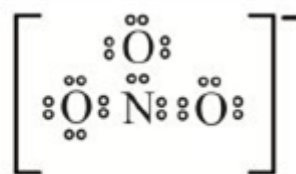
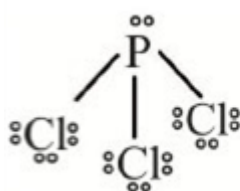
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از آن‌جا که می‌خواهیم تنها با افزودن آب خالص به یک محلول، غلظت آن‌را به ۷۵٪ مقدار اولیه برسانیم، خواهیم داشت: ۱۰۲

$$\frac{\text{غلظت اولیه}}{\text{غلظت ثانویه}} = \frac{75}{100} \Rightarrow \frac{\frac{n_1}{V_1}}{\frac{n_2}{V_2}} = \frac{3}{4} \xrightarrow{n_1=n_2} \frac{V_2}{V_1} = \frac{4}{3} \Rightarrow V_2 = \frac{4}{3}V_1$$

با توجه به رابطه‌ی بالا به اندازه‌ی $\frac{1}{3}$ حجم محلول اولیه باید به آن آب اضافه کنیم و با این عمل غلظت ماده‌ی حل شونده ۲۵ درصد کاهش می‌یابد.

$$\text{درصد تغییرات غلظت } Na^+ = \frac{\text{غلظت اولیه} - \text{غلظت نهایی}}{\text{غلظت اولیه}} \times 100 = \frac{\frac{n \times 23}{\frac{4}{3}V_1} - \frac{n \times 23}{V_1}}{\frac{n \times 23}{V_1}} \times 100 = -25\%$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا، با رسم ساختار لوویس این ترکیبات مشاهده می‌کنیم که یون نیتрат و مولکول فسفر تری کلرید به ترتیب دارای ۸ و ۶ الکترون پیوندی هستند، ولی شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی لایه‌ی بیرونی اتم‌ها در یون نیترات و مولکول فسفر تری کلرید به ترتیب برابر ۸ و ۱۰ است. ۱۰۳



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زیرا، نسبت شمار کاتیون به آنیون در باریم کلرید برابر با $\frac{1}{4}$ و نسبت شمار آنیون به کاتیون در لیتیم

کربنات برابر $\frac{1}{4}$ است.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{جرم حل شونده} = \frac{\text{جرم محلول}}{\text{جرم محلول}} \times 100$$

$$14 = \frac{\text{جرم حل شونده}}{155} \times 100 \rightarrow \text{جرم حل شونده} = 21.7 \text{ g}$$

