

۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

$$|BA - I| = |BA - BB^{-1}| = |B| |A - B^{-1}| = |A - B^{-1}| |B| = |AB - I| \quad \text{درست} \quad (۱)$$

$$|ABA^{-1} - 2I| = |ABA^{-1} - 2AA^{-1}| = |A| |B - 2I| |A^{-1}| = |B - 2I| \quad \text{درست} \quad (۲)$$

(۳) نادرست؛ برای ماتریس‌های مربعی A و B از مرتبه ۳ داریم:

$$|A - B| = |-(B - A)| = (-1)^3 |B - A| = -|B - A|$$

$$|(A^{-1}BA)^T| = |A^{-1}B^T A| = |A^{-1}| |B|^T |A| = |B|^T \quad \text{درست} \quad (۴)$$

۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق فرض داریم:

$$\overline{xyx} \equiv 1 \Rightarrow 100x + 10y + x \equiv 1 \Rightarrow 101x + 10y \equiv 1$$

نکته: اگر k مقسوم‌علیه طبیعی (و بزرگ‌تر از یک) عدد طبیعی n باشد و داشته باشیم $x \equiv y \pmod{n}$ ، آنگاه با استفاده از تعریف هم‌نهشتی

$$x \equiv y \pmod{k} \quad \text{ثابت می‌شود:}$$

از آنجا که ۵ و ۶ مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۰ هستند، پس:

$$\begin{cases} 101x + 10y \equiv 1 \Rightarrow x \equiv 1 \xrightarrow{0 < x \leq 9} x = 1, 6 \quad (۱) \\ 101x + 10y \equiv 1 \Rightarrow 5x + 4y \equiv 1 \quad (۲) \end{cases}$$

از عبارت‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} x = 1 \xrightarrow{(۲)} 5 + 4y \equiv 1 \Rightarrow 4y \equiv -4 \equiv 8 \Rightarrow y \equiv 2 \xrightarrow{0 \leq y \leq 9} y = 2, 5, 8 \\ \Rightarrow \overline{xyx} = 121, 151, 181 \\ x = 6 \xrightarrow{(۲)} 30 + 4y \equiv 1 \Rightarrow 4y \equiv 1 \quad (\text{معادله در } Z \text{ فاقد جواب است}) \end{cases}$$

بنابراین بزرگ‌ترین عدد سه رقمی ۱۸۱ و کوچک‌ترین عدد سه رقمی ۱۲۱ می‌باشد و اختلاف این دو عدد برابر ۶۰ است.

توجه: معادله هم‌نهشتی $4y \equiv 1$ به دلیل اینکه $1 \nmid (4, 6)$ ، فاقد جواب است.

۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا از طرفین ماتریس A دترمینان می‌گیریم.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ |A| & 2 & m \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر اول}} |A| = -1(-2 + m) + 1(-|A| - 4) \Rightarrow |A| = 2 - m - |A| - 4$$

$$\Rightarrow 2|A| = -m - 2 \Rightarrow |A| = \frac{-m - 2}{2} = -\frac{m}{2} - 1$$

می‌دانیم عدد از دترمینان بیرون بیاید به توان مرتبه ماتریس می‌رسد. پس:

$$\underbrace{(|A| + 1)}_{\text{عدد}} A^3 = 8 \Rightarrow (|A| + 1)^3 |A|^3 = \left(-\frac{m}{2} - 1\right)^3 \left(-\frac{m}{2} - 1\right)^3 = 8$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{m}{2}\right)^3 \left(-\frac{m}{2} - 1\right)^3 = 2^3 \Rightarrow \left[\frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} + 1\right)\right]^3 = 2^3 \Rightarrow \frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} + 1\right) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{4} + \frac{m}{2} = 2 \xrightarrow{\times 4} m^2 + 2m - 8 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} -2$$

۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع f با دامنه $[-4, 4]$ اکیداً نزولی است.

$$f(x^2 + 4x - 1) \geq f(4) \Rightarrow x^2 + 4x - 1 \leq 4 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 \leq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 1$$

از طرفی باید $-4 \leq x^2 + 4x - 1 \leq 4$ باشد.

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 1 \leq 4 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 \leq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 4x - 1 \geq -4 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq -3, x \geq -1 \end{cases}$$

اشتراک هر سه شرط بالا به صورت $-5 \leq x \leq -3$ و $-1 \leq x \leq 1$ است که شامل ۶ عدد صحیح است.

۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو عدد وقتی رقم یکان یکسانی دارند که به پیمانه ۱۰ هم‌نهشت باشند، بنابراین داریم:

$$a^2 - 3a \equiv a + 2 \pmod{10} \Rightarrow a^2 - 4a - 2 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow a^2 - 4a - 12 \equiv 0 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow (a - 6)(a + 2) \equiv 0 \pmod{10} \quad (*)$$

دو عدد $(a - 6)$ و $(a + 2)$ که ۸ واحد اختلاف دارند، یا هر دو زوج‌اند یا هر دو فرد؛ از رابطه هم‌نهشتی (*) نتیجه می‌گیریم که هر دو عدد فوق، زوج هستند، یعنی a نیز زوج می‌باشد. از طرفی زمانی حاصل ضرب این دو عدد مضرب ۵ می‌شود که یکی از آن‌ها مضرب ۵ باشد:

$$\begin{cases} a - 6 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow a \equiv 6 \xrightarrow{\text{زوج } a} a = 6, 16, \dots \\ a + 2 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow a \equiv -2 \xrightarrow{\text{زوج } a} a = 8, 18, \dots \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین عدد طبیعی دو رقمی a برابر ۱۶ و بزرگ‌ترین عدد طبیعی یک رقمی a برابر ۸ بوده و نسبت خواسته شده برابر $\frac{16}{8} = 2$ می‌باشد.

۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} |A| &= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 \\ &= \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{=1} + 2 \sin \alpha \cos \alpha - \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha)}_{=1-2 \sin \alpha \cos \alpha} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |A| = 4 \sin \alpha \cos \alpha = 2(2 \sin \alpha \cos \alpha) = 2 \sin 2\alpha \quad (1)$$

حال با توجه به مقدار $|A|$ ، ماتریس B را بازنویسی می‌کنیم و دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2 \sin 2\alpha}{2} & \frac{2 \sin 2\alpha}{2} \times \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \\ 2 \sin 2\alpha \times \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} & 2 \sin 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ 2 \cos 2\alpha & 2 \sin 2\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 2 \sin^2 2\alpha - 2 \cos^2 2\alpha$$

می‌دانیم: $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ ، پس:

$$|B| = -2(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha) = -2 \cos 4\alpha \quad (2) \xrightarrow{(1), (2)} \frac{|A|}{|B|} = \frac{2 \sin 2\alpha}{-2 \cos 4\alpha} = -\frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha}$$

می‌توانستیم به جای α یک مثال عددی در ناحیه اول بزنیم و حل کنیم.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حتماً چندجمله‌ای $f(x)$ باید عوامل زوج $(x - ۲)$ و فرد $(x + ۱)$ را داشته باشد، پس
 $f(۲) = f(-۱) = ۰$ داریم:

$$x \text{ بر } f(x) \text{ باقیمانده} = f(۰) \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} -۱ \Rightarrow \text{fof}(۰) = f(-۱) = ۰$$

$$x + ۱ \text{ بر } f(x) \text{ باقیمانده} = f(-۱) = ۰ \Rightarrow \text{fof}(-۱) = f(۰) = -۱$$

پس fof بر x بخش پذیر و در -۱ باید -۱ باشد، یعنی باقیمانده‌اش بر $x + x^۲$ حتماً x است.

$$\begin{cases} ab \equiv ۱^m \\ ac \equiv ۳^m \\ bc \equiv ۲^m \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب}} (abc)^۲ \equiv ۶^m$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} ab \equiv ۱^m \xrightarrow{\times c} c \equiv abc \\ ac \equiv ۳^m \xrightarrow{\times b} ۳b \equiv abc \Rightarrow ۲a + ۲b + c \equiv ۳abc \\ bc \equiv ۲^m \xrightarrow{\times a} ۲a \equiv abc \end{cases}$$

$$(۲a + ۲b + c)^۲ \equiv (۳abc)^۲ \equiv ۹(abc)^۲ \equiv ۵۴$$

$$(A - B)(A + B) = A^۲ + AB - BA - B^۲$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(A - B)(A + B) = (A^۲ + AB) - (B^۲ + BA)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} (A - B)(A + B) &= \begin{bmatrix} -۶ & -۸ \\ ۹ & ۵ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۷ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۹ & -۱۲ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \xrightarrow{(A-B)^{-۱} \times} \\ A + B &= (A - B)^{-۱} \times \begin{bmatrix} -۹ & -۱۲ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \frac{۱}{۳-۶} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۹ & -۱۲ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \\ \Rightarrow A + B &= \frac{-۱}{۳} \begin{bmatrix} -۳ & ۳ \\ -۱۲ & -۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

حال ماتریس A را می‌یابیم.

$$\left. \begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \\ A + B &= \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} ۲A = \begin{bmatrix} ۴ & -۴ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \xrightarrow{\times \frac{۱}{۲}} A = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های} = ۳$$

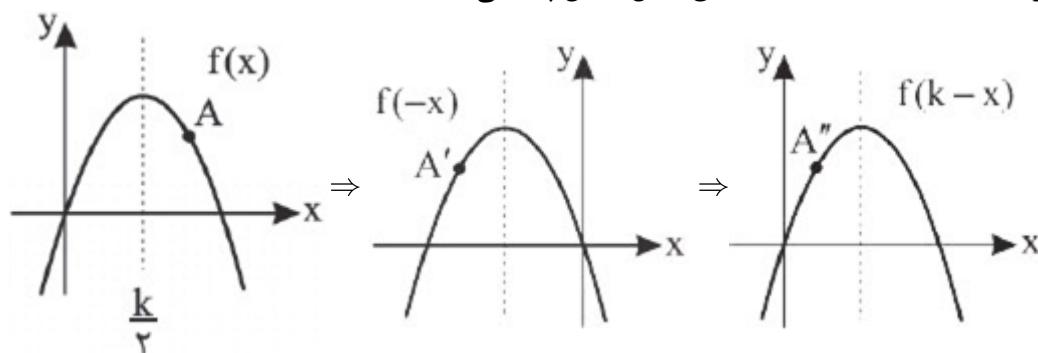
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰

$$y = kx - x^2 \xrightarrow[\text{محور عرض ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = k(-x) - (-x)^2 = -kx - x^2$$

اگر نمودار را k واحد به راست انتقال دهیم، آنگاه:

$$y = -k(x - k) - (x - k)^2 = -kx + k^2 - x^2 - k^2 + 2kx = kx - x^2$$

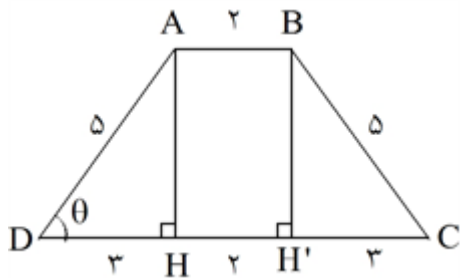
نمودار بر خودش منطبق می‌شود. اما نقطه A به نقطه A'' مطابق شکل انتقال پیدا می‌کند:



$A'' = (k - x, y)$ A'' قرینه A نسبت به خط $x = \frac{k}{2}$ است. یعنی:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ذوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ هر دو ارتفاع BH' و AH را رسم می‌کنیم. در این صورت ۱۱

$\triangle ADH$ و $\triangle BCH'$ مستطیل و دو مثلث قائم الزاویه و $HH' = 2$ و $DH = CH'$ خواهد بود زیرا چهارضلعی $ABH'H$ مستطیل و دو مثلث قائم الزاویه $\triangle ADH$ و $\triangle BCH'$ هستند. داریم:



$$\triangle ADH : \cos \theta = \frac{DH}{AD} \xrightarrow{\cos \theta = \frac{3}{5}} \frac{3}{5} = \frac{DH}{5}$$

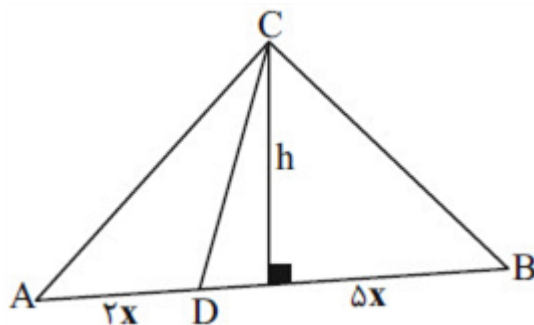
$$\Rightarrow DH = 3 \Rightarrow CH' = 3$$

$$\triangle ADH : AH^2 = AD^2 - DH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow AH = 4$$

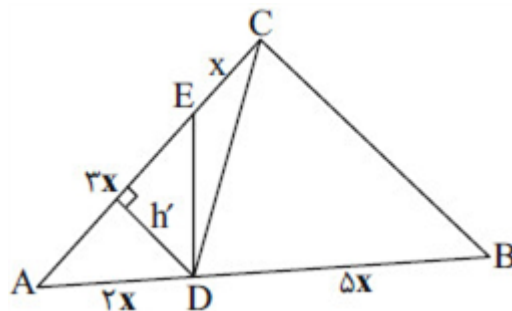
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AH (AB + DC) = \frac{1}{2} (4) (2 + 8) = 20$$

بنابراین:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در دو مثلث BDC و ADC ارتفاع h یکسان است. ۱۲



در دو مثلث ADE و CDE، ارتفاع h' یکسان است.



$$S_{\triangle BDC} = \frac{\Delta x h}{2}, S_{\triangle ADC} = \frac{2x h}{2} = xh$$

$$\frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow \begin{cases} S_{\triangle BDC} = \Delta a \\ S_{\triangle ADC} = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{\triangle CDE} = \frac{xh'}{2} \\ S_{\triangle ADE} = \frac{2xh'}{2} \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = 2S_{\triangle CDE}$$

$$S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle CDE} = 2S_{\triangle CDE} = 2a \Rightarrow S_{\triangle CDE} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{\Delta a}{\frac{a}{2}} = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از فرض سؤال داریم: ۱۳

$$\tan x + \cot x = -3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -3 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = -3 \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = -3$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{1}{3}$$

از تغییر متغیر $t = \cos x - \sin x$ استفاده می‌کنیم:

$$t = \cos x - \sin x \Rightarrow t^2 = \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x \Rightarrow t^2 = 1 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

$$2\pi < x < 3\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \quad \text{توجه کنید که:}$$

$$\Rightarrow \cos x - \sin x < 0 \Rightarrow t < 0, t^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow t = -\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow t = \cos x - \sin x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$\frac{3}{\sqrt{11}-2} \times \frac{\sqrt{121} + 2\sqrt{11} + 4}{\sqrt{121} + 2\sqrt{11} + 4} = \frac{3(\sqrt{121} + 2\sqrt{11} + 4)}{11-8} = \frac{3(\sqrt{121} + 2\sqrt{11} + 4)}{3}$$

$$= \sqrt{121} + 2\sqrt{11} + 4$$

$$\frac{38}{\sqrt{121}-2\sqrt{11}+4} \times \frac{\sqrt{11}+2}{\sqrt{11}+2} = \frac{38(\sqrt{11}+2)}{11+8} \Rightarrow \frac{38(\sqrt{11}+2)}{19} = 2(\sqrt{11}+2) = 2\sqrt{11}+4$$

$$\frac{3}{\sqrt{11}-2} - \frac{38}{\sqrt{121}-2\sqrt{11}+4} \Rightarrow (\sqrt{121} + 2\sqrt{11} + 4) - (2\sqrt{11} + 4) = \sqrt{121}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از فرض‌های مسئله مقادیر صحیح d, c, b, a را به دست می‌آوریم.

$$B^T = {}^2I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+ac & 0 & a+ad \\ 0 & 2b^2 & 0 \\ c+dc & 0 & ac+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} 1+ac=2 \Rightarrow ac=1 \Rightarrow a \neq 0, c \neq 0 \\ 2b^2=2 \Rightarrow b^2=1 \Rightarrow b=\pm 1 \\ c+dc=0 \Rightarrow c(1+d)=0 \xrightarrow{c \neq 0} 1+d=0 \Rightarrow d=-1 \end{cases}$$

$$|A|=2 \Rightarrow ad-bc=2 \xrightarrow[b=1]{d=-1} -a-c=2 \Rightarrow a+c=-2$$

$$\xrightarrow{ac=1} a=-1, c=-1$$

$$\text{حالت دوم } |A|=2 \Rightarrow ad-bc=2 \xrightarrow[b=-1]{d=-1} -a+c=2 \xrightarrow{c=-\frac{1}{a}} -a+\frac{1}{a}=2$$

$$\Rightarrow -a^2+1=2a \Rightarrow a^2+2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$$

این مقدار برای a قابل قبول نیست چون a صحیح است. پس $a=-1$ و $c=-1$ و $d=-1$ و $b=1$ می‌باشد. داریم:

$$B^T = B^T \times B = {}^2I \times B = {}^2B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

در نتیجه حاصلضرب درایه‌های غیرصفر ماتریس B^T برابر $2(-2)(2\sqrt{2})(-2)(-2) = -32\sqrt{2}$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خطوط AM و CN موازی اند و چهارضلعی AMCN مستطیل است و همچنین

$$BP = PQ = QD = 5$$

در مثلث قائم الزاویه $\triangle BMP$ داریم:

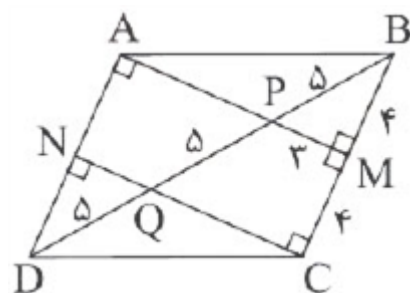
$$5^2 = 3^2 + BM^2 \Rightarrow BM = 4 \Rightarrow MC = 4$$

و در مثلث $\triangle BQC$ طبق تعمیم قضیه تالس می توان نوشت:

$$\frac{BM}{BC} = \frac{PM}{QC} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{3}{QC} \Rightarrow QC = 6$$

$$S = \frac{(3+6) \times 4}{2} = 18$$

و مساحت ذوزنقه $PMCQ$ برابر است با:

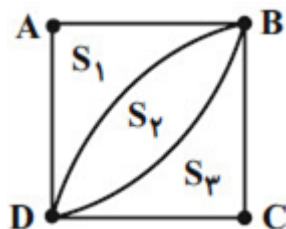


گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$S_4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 - (S_1 + S_2 + S_3) = a^2 \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right)$$

$$\underbrace{\frac{a^2 \pi}{4}} + \underbrace{\frac{a^2 \pi}{4}} - \underbrace{a^2}$$

در نتیجه:



$$S_1 = S_2 = a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

امتیاز برابر عددی از ۴ تا ۶ نخواهد شد اگر هیچ تیری به بخش ۴ امتیازی نخورد پس:

$$P(\text{امتیاز بین تا شدن ۶۴}) = P(\text{به بخش امتیازی نخورد ۴}) = \left(1 - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right)^2 = \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$$

$$P(\text{امتیاز بین تا شدن ۶۴}) = 1 - \frac{\pi^2}{16} = \frac{15}{16} \pi^2$$

پس:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۸

$$\sin^4 x - \sin^2 x = -\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = -\sin^2 x \cos^2 x = -(\sin x \cos x)^2$$

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 x\right)^2 = -\frac{1}{4} \sin^4 x$$

$$\cos^4 x = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2 \cos^4 x - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos^4 x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^4 x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} \sin^4 x = -\frac{1}{16} \\ \text{یا} \\ \cos^4 x = -\frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{5}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} \sin^4 x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

فقط مقدار $-\frac{1}{16}$ در گزینه‌ها موجود است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به دایر C_2 و C_3 داریم: ۱۹

$$l_3 = l_2 \Rightarrow r_3 \theta_3 = r_2 \theta_2 \Rightarrow 1/5 \theta_3 = 4/5 \left(\frac{7\pi}{5}\right) \Rightarrow \theta_3 = \frac{21\pi}{5}$$

$$\theta_2 = \theta_3 \Rightarrow \theta_2 = \frac{21\pi}{5} \quad \text{دایر } C_2 \text{ و } C_3 \text{ هم‌مرکزند، پس:}$$

با توجه به دایر C_1 و C_2 داریم:

$$l_1 = l_2 \Rightarrow r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2 \Rightarrow 3 \theta_1 = 7/5 \left(\frac{21\pi}{5}\right) \Rightarrow \theta_1 = \frac{21}{5} \pi$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حاصل کل عبارت زیر رادیکال باید 1401^{40} باشد تا جذر آن 1401^{20} شود. بنابراین اگر 1401^{12} به ۲۰

تعداد 1401^{38} بار تکرار شود، حاصل کل عبارت زیر رادیکال برابر 1401^{40} می‌شود.

$$\sqrt{\underbrace{1401^{12} + 1401^{12} + \dots + 1401^{12}}_{38 \text{ مرتبه}}} = \sqrt{1401^{38} (1401)^2} = \sqrt{1401^{40}} = 1401^{20}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به کمک جبر مجموعه‌ها و اصول احتمال، می‌توانیم بنویسیم:

$$۱) P(A \cup B) - P(A) = \cancel{P(A)} + P(B) - P(A \cap B) - \cancel{P(A)} = P(B) - P(A \cap B) (*)$$

$$۲) P(A' \cup B) - P(A \cap B') = \underbrace{P(A') + P(B) - P(A' \cap B')}_{= P(A - B)} - \underbrace{(P(A) - P(A \cap B))}_{= P(A \cup B)'} \\ = \cancel{P(A)} - P(A) + P(B) - (\cancel{P(A)} - P(A \cap B)) - P(A) + P(A \cap B) \\ = P(A \cup B) - ۲P(A) + P(B) + P(A \cap B) (**)$$

اکنون (*) را جایگزین سمت چپ برابری و (**) را جایگزین سمت راست برابری در صورت سؤال می‌کنیم. داریم:

$$P(A \cup B) - P(A) = P(A' \cup B) - P(A \cap B') \xrightarrow{(*).(**)} \cancel{P(B)} - P(A \cap B) \\ = P(A \cup B) - ۲P(A) + \cancel{P(B)} + P(A \cap B) \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) \\ = P(A \cup B) - (P(A) - P(A \cap B)) \Rightarrow P(A - B) = P(B) \\ = P(A - B)$$

$$\Rightarrow \frac{n(A - B)}{n(S)} = \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow n(A - B) = n(B)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با رسم قطر AC، در مثلث ABC پاره‌خط‌های AE و CN میانه مثلث‌اند بنابراین:

$$S_{\triangle ANS} = S_{\triangle CES} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle AMT} = S_{\triangle TFC} = \frac{1}{6} S_{\triangle ADC}$$

$$S_{\text{کل سایه زده}} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC} + \frac{1}{6} S_{\triangle ABC} + \frac{1}{6} S_{\triangle ADC} + \frac{1}{6} S_{\triangle ADC} = \frac{1}{3} (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}) \\ = \frac{1}{3} S_{\text{چهار ضلعی ABCD}} = \frac{1}{3} \times ۹۶ = ۳۲$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا قضیه تقسیم را می‌نویسیم:

$$f(1 - x) = (x - ۲)Q(x) + R \xrightarrow{x=۲} f(-۱) = R$$

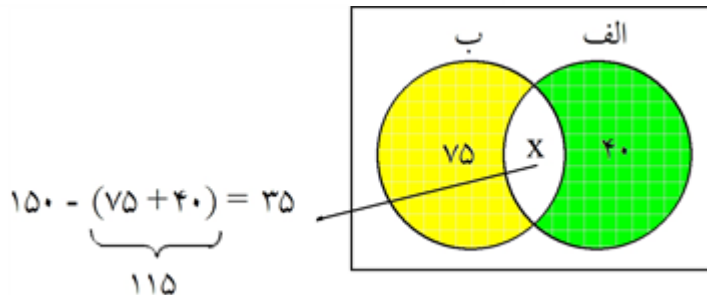
$$f(x) = \frac{x^{۱۶} - ۱}{۲(x + ۱)}, (x \neq -۱) \quad \text{حال طبق فرض داریم:}$$

چون f یک چندجمله‌ای است، پس در تمام نقاط (حتی $x = -۱$ که ریشه مخرج است) پیوسته است، یعنی:

$$f(-۱) = \lim_{x \rightarrow -۱} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۱} \frac{x^{۱۶} - ۱}{۲(x + ۱)} = \lim_{x \rightarrow -۱} \frac{(x + ۱)(x^{۱۵} - x^{۱۴} + x^{۱۳} - \dots - ۱)}{۲(x + ۱)} \\ = \frac{1}{۲} (-۱ - ۱ - ۱ - \dots - ۱) = \frac{1}{۲} (-۱۶) = -۸ \Rightarrow R = -۸$$

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{40 + x}{75 + x} = \frac{40 + 35}{75 + 35} = \frac{75}{110} = \frac{15}{22}$$

Max



باید اشتراک حداکثر شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر پیشامد بخش پذیر بودن n بر ۴ را A و پیشامد بخش پذیر بودن n بر ۶ را B نمایش دهیم، پیشامد مطلوب، پیشامد $(A - B)$ خواهد بود. پس داریم:

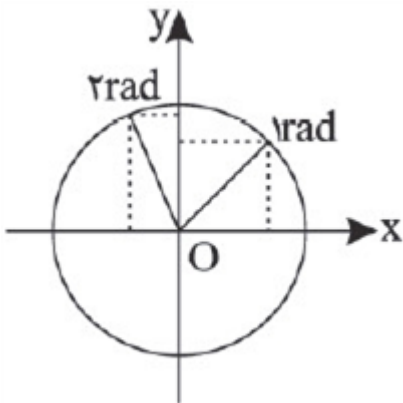
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{1000}{4}\right] - \left[\frac{1000}{12}\right]}{1000} = \frac{250 - 83}{1000} = \frac{167}{1000} = 0.167$$

توجه شود که برای محاسبه $P(A \cap B)$ ، باید احتمال این که عدد n مضرب ۴ و ۶ باشد را محاسبه کنیم، که در این صورت باید عدد n مضرب ۱۲ باشد $[4, 6] = 12$ یعنی به طور کلی اگر عدد n هم مضرب a و هم مضرب b باشد، باید n مضرب $[a, b]$ باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. منظور از $\sin 1$ همان سینوس یک رادیان است و می دانیم که یک رادیان تقریباً برابر 57° است. بنابراین:

$$2 \text{ رادیان} \simeq 114^\circ$$

و با توجه به دایره مثلثاتی داریم:



$$\begin{aligned} \cos 1 - \sin 1 &< 0, \cos 1 + \cos 2 > 0 \\ \Rightarrow \text{عبارت} &= -\cancel{\cos 1} + \sin 1 + \cancel{\cos 1} + \cos 2 = \sin 1 + \cos 2 \\ &= \sin 1 + 1 - 2 \sin^2 1 = -2t^2 + t + 1 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به آنکه تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است، پس:

$$f(x) \geq f^{-1}(x) \Rightarrow f(x) \geq x \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{4-x} + 2 \geq x \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{4-x} \geq x - 2$$

طرفین نامعادله بالا دو تابع اکیداً صعودی هستند که در $x = 2$ صفر می‌شوند. برای حل این نامعادله دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$0 \leq x \leq 2$$

حالت اول:

در این حالت طرفین نامعادله نامثبت هستند و وقتی به توان ۲ برسانیم جهت نامساوی تغییر می‌کند:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{4-x})^2 \leq (x-2)^2 \Rightarrow x + (4-x) - 2\sqrt{x(4-x)} \leq x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{4x-x^2} \geq 4x-x^2 \Rightarrow 4x-x^2 \in [0, 4] \Rightarrow 4-(x-2)^2 \in [0, 4]$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 \in [0, 4] \xrightarrow{x \in [0, 2]} x \in [0, 2]$$

$$2 < x \leq 4$$

حالت دوم:

در این حالت طرفین نامعادله مثبت هستند و وقتی به توان ۲ برسانیم جهت نامساوی تغییر نمی‌کند:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{4-x})^2 \geq (x-2)^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow 2\sqrt{4x-x^2} \leq 4x-x^2$$

$$\Rightarrow 4x-x^2 \in \{0\} \cup [4, +\infty) \Rightarrow 4-(x-2)^2 \in \{0\} \cup [4, +\infty)$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 \in \{4\} \cup (-\infty, 0] \xrightarrow{x \in (2, 4]} x = 4$$

بنابراین جواب نامعادله به صورت زیر می‌شود:

$$x \in [0, 2] \cup \{4\} \Rightarrow x \in (0, 2) \cup \{0, 2, 4\} \Rightarrow a+b+c+d+e = 0+2+4+0+2 = 8$$

$$a|(11m+4)$$

و

$$a|(7m+2)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

بنابراین:

$$a|(7(11m+4) - 11(7m+2)) \Rightarrow a|6 \Rightarrow a = 1, 2, 3, 6 \xrightarrow{a>3} a = 6$$

$$6k+3 = 3(2k+1)$$

چون:

پس $6k+3$ هیچگاه عدد اول بزرگتر از ۳ نمی‌باشد.

فضای نمونه $216 = 6 \times 6 \times 6$ عضو دارد.

اگر $x = -2$ ریشه معادله باشد در معادله صدق می‌کند، پس حالت‌هایی مطلوب هستند که $4a - 2b + c = 3$.

$$\begin{aligned} a = 1 &\Rightarrow 4 - 2b + c = 3 \Rightarrow 2b - c = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \text{ و } c = 1 \\ b = 2 \text{ و } c = 3 \\ b = 3 \text{ و } c = 5 \end{cases} \\ a = 2 &\Rightarrow 8 - 2b + c = 3 \Rightarrow 2b - c = 5 \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \text{ و } c = 1 \\ b = 4 \text{ و } c = 3 \\ b = 5 \text{ و } c = 5 \end{cases} \\ a = 3 &\Rightarrow 12 - 2b + c = 3 \Rightarrow 2b - c = 9 \Rightarrow \begin{cases} b = 5 \text{ و } c = 1 \\ b = 6 \text{ و } c = 3 \end{cases} \\ a = 4 &\Rightarrow 16 - 2b + c = 3 \Rightarrow 2b - c = 13 \text{ جواب ندارد.} \end{aligned}$$

به ازای $a = 5, 6$ نیز معادله جوابی ندارد (با توجه به این که a و b و c عضو $\{1, 2, \dots, 6\}$ هستند)، پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{8}{216} = \frac{1}{27}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - x - 71 \Rightarrow f(x) = x^3 + 2x - 72$$

مختصات نقطه $(-P + 4, P)$ را در این ضابطه قرار می‌دهیم:

$$f(-P + 4) = (-P + 4)^3 + 2(-P + 4) - 72 \Rightarrow P = -P^3 + 6P^2 + 12P^2 - 48P - 2P + 8 - 72$$

$$-P + 12P^2 - 50P = P \Rightarrow P^3 - 12P^2 + 51P = 0$$

$$P(P^2 - 12P + 51) = 0$$

از آنجا که Δ ی معادله $P^2 - 12P + 51 = 0$ منفی است، فقط مقدار $P = 0$ قابل قبول است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۳

$$A = \frac{\sin(-270^\circ - 15^\circ) + 2 \cos(-90^\circ - 15^\circ)}{2 \sin(180^\circ - 15^\circ) + 3 \sin(360^\circ + 15^\circ)} = \frac{\cos 15^\circ - 2 \sin 15^\circ}{2 \sin 15^\circ + 3 \sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - 2 \sin 15^\circ}{5 \sin 15^\circ}$$

$$= \frac{1}{5} \cot 15^\circ - \frac{2}{5}$$

$$\tan 15^\circ = \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{\tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \cot 15^\circ = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$A = \frac{1}{5}(2 + \sqrt{3}) - \frac{2}{5} = +\frac{1}{5}\sqrt{3} = 0.2\sqrt{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر یک مرتبه بازی کنند فضای نمونه ۹ عضو دارد ($3 \times 3 = 9$) و از این حالت در ۳ حالت جمال

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

برنده است، پس احتمال این که هریک برنده شوند برابر است با:

(جمال هر ۳ دست نبرد) $P = 1 - P(\text{جمال حداقل یک مرتبه برنده شود})$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{27 - 8}{27} = \frac{19}{27}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع f به صورت مقابل است:

و برای تعیین وضعیت یکنوایی تابع $f \circ f$ ، لازم است که ضابطه(های) آن را به دست آوریم:

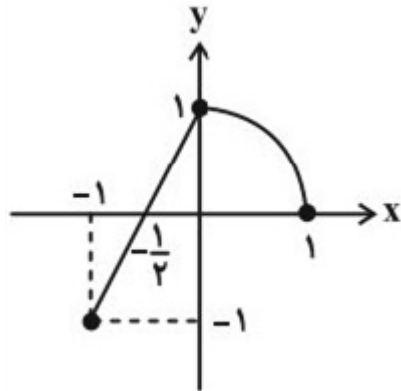
$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} 2f(x) + 1 & ; -1 \leq f(x) < 0 \\ \sqrt{1 - f(x)} & ; 0 \leq f(x) \leq 1 \end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع f مشخص است که در بازه $\left[-1, -\frac{1}{4}\right)$ ، $-1 \leq f(x) < 0$ و در بازه $\left[-\frac{1}{4}, 1\right]$ ، $0 \leq f(x) \leq 1$ است.

$$\Rightarrow (f \circ f)(x) = \begin{cases} 2(2x + 1) + 1 & ; -1 \leq x < -\frac{1}{4} \\ \sqrt{1 - (2x + 1)} & ; -\frac{1}{4} \leq x < 0 \\ \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}} & ; 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f \circ f)(x) = \begin{cases} 4x + 3 & ; -1 \leq x < -\frac{1}{4} \\ \sqrt{-2x} & ; -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}} & ; 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن اکیداً نزولی است، بازه $\left[-\frac{1}{4}, 0\right]$ است. در نتیجه بیشترین مقدار $b - a$ برابر $\frac{1}{4}$ است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^r = (r)^r \Rightarrow x^r + \frac{1}{x^r} + rx^r \times \frac{1}{x} + rx \times \frac{1}{x^r} = 27$$

$$\Rightarrow x^r + \frac{1}{x^r} + r \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{=r} = 27 \Rightarrow x^r + \frac{1}{x^r} = 18$$

$$A = \frac{3\sqrt{3} - 8}{7 + 2\sqrt{3}} \times \frac{7 - 2\sqrt{3}}{7 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = \frac{21\sqrt{3} + 16\sqrt{3} - 56 - 18}{49 - 12} + \underbrace{|2 + \sqrt{3}|}_{\text{عبارت مثبت}}$$

$$= \frac{37\sqrt{3} - 74}{37} + 2 + \sqrt{3} = \frac{\cancel{37}(\sqrt{3} - 2)}{\cancel{37}} + 2 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{عبارت موردنظر سؤال} = A^r + B + 1 = (2\sqrt{3})^r + 18 + 1 = 31$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $P(A' \cap B') = P[(A \cup B)']$ بنابراین:

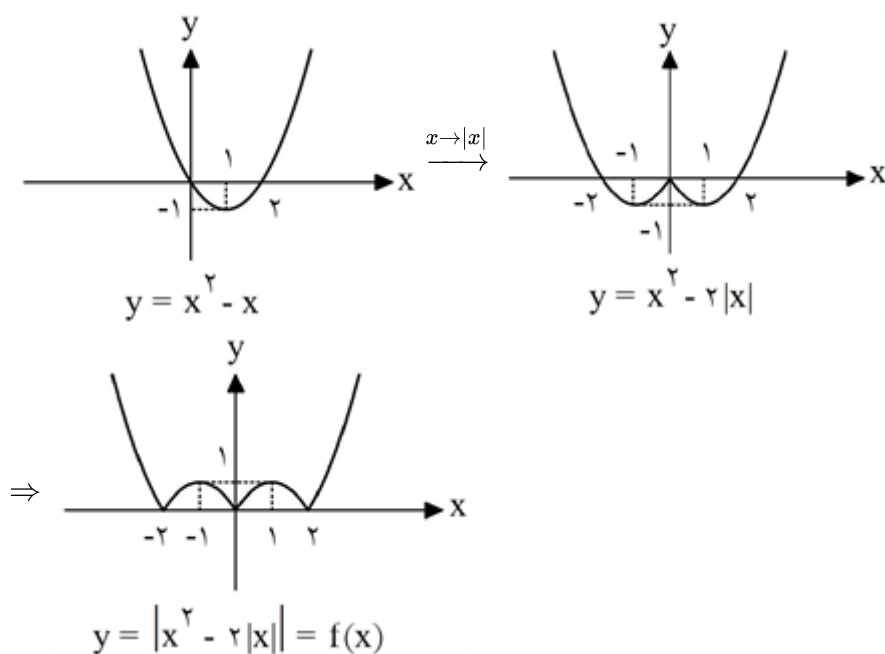
۳۷

$$P(A' \cap B') = ۰/۳۵ \Rightarrow P(A \cup B) = ۱ - ۰/۳۵ = ۰/۶۵$$

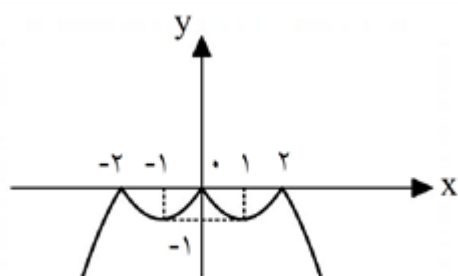
$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۶۵$$

$$\Rightarrow \underbrace{(P(B) - P(A \cap B))}_{P(B \cap A') = ۰/۳} + P(A) = ۰/۶۵ \Rightarrow P(A) = ۰/۳۵$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار $f(x)$ را با مراحل زیر رسم می‌کنیم.

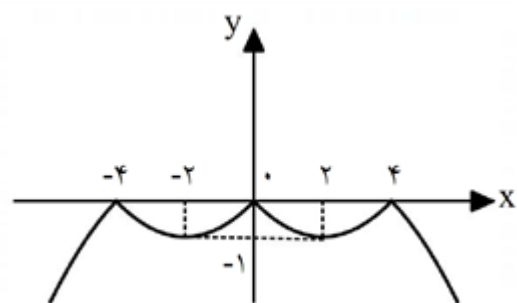


حالا تبدیلات روی تابع $f(x) = |x^2 - 2|x||$ را به ترتیب اعمال می‌کنیم.
(۱) قرینه نسبت به محور x ها

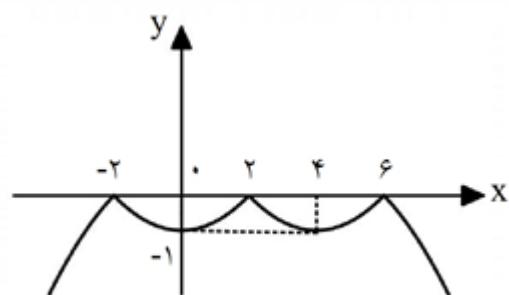


$$y = -|x^2 - 2|x||$$

(۲) انبساط ۲ برابری در راستای محور x ها



$$y = -|x^2 - 2|x|| \xrightarrow{x \rightarrow \frac{x}{2}} y = -\left|\frac{x^2}{4} - |x|\right|$$



(۳)

$$y = -\left|\frac{x^2}{4} - |x|\right| \xrightarrow{x \rightarrow x-2} y = -\left|\frac{(x-2)^2}{4} - |x-2|\right|$$

ملاحظه می‌شود نمودار نهایی در بازه $[0, 2]$ و همچنین در بازه $[4, 6]$ اکیداً صعودی است. پس بیشترین مقدار α برابر ۲ و بیشترین مقدار β برابر ۶ خواهد بود و بیشترین مقدار $\alpha + \beta$ برابر است با:

$$2 + 6 = 8$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۹

$$A^5 = 2^{-1} \times 2^{-2} \times 2^{-3} \times \dots \times 2^{-9} = 2^{-(1+2+3+\dots+9)} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

$$A^5 = 2^{-45} \Rightarrow A = \sqrt[5]{2^{-45}} \Rightarrow A = 2^{-9} \xrightarrow{\text{ریشه ششم معکوس } A} \frac{1}{\sqrt[6]{A}} = A^{-\frac{1}{6}}$$

$$\xrightarrow{A=2^{-9}} (2^{-9})^{-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$$

$$\frac{A^{-\frac{1}{6}}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر $[a, b] = c, (a, b) = d$ فرض شود داریم: $(d, c \in \mathbb{N})$ ۴۰

$$\sqrt{12 + \sqrt{c}} + \sqrt{12 - \sqrt{c}} = d \xrightarrow{\text{توان ۲}} 24 + 2\sqrt{144 - c} = d^2$$

$$c > 0 \Rightarrow 144 - c < 144 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{144 - c} < 12$$

$$\Rightarrow 24 \leq 24 + 2\sqrt{144 - c} < 48 \Rightarrow 24 \leq d^2 < 48$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2 = 25 \Rightarrow d = 5 \\ d^2 = 36 \Rightarrow d = 6 \end{cases}$$

چون ۲۴ و $2\sqrt{144 - c}$ هر دو زوج هستند پس $24 + 2\sqrt{144 - c}$ هم زوج است بنابراین $d = 6$ خواهد بود.

$$24 + 2\sqrt{144 - c} = 36 \Rightarrow 2\sqrt{144 - c} = 12 \Rightarrow \sqrt{144 - c} = 6$$

$$\Rightarrow 144 - c = 36 \Rightarrow c = 108$$

$$\begin{cases} a = a'd \\ b = b'd \end{cases} \Rightarrow (a', b') = 1$$

$$\Rightarrow [a, b] = 108 \Rightarrow [a'd, b'd] = 108 \xrightarrow{d=6} 6[a', b'] = 108$$

$$\xrightarrow{[a', b'] = a'b'} 6a'b' = 108 \Rightarrow a'b' = 18$$

چون $(a', b') = 1$ و $a' = 2$ و $b' = 9$ پس $a' = 2$ و $b' = 9$ بخش پذیر نیستند، پس $a' = 2$ و $b' = 9$

$$a + b = a'b + b'd = d(a' + b') = 6 \times 11 = 66$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. آهو پس از دیدن یوزپلنگ با ۲ ثانیه تأخیر شروع به دویدن می کند. در نتیجه یوزپلنگ نسبت به آهو ۴۱

۲ ثانیه زودتر به سرعت حداکثر خود می رسد و با آن سرعت می دود.

$$\Delta D = Vt = 95 \times \frac{2}{60 \times 60} = 0.053 \text{ Km} = 53 \text{ m}$$

یوزپلنگ حداکثر یک دقیقه می تواند با سرعت حداکثر بدود. فرض می کنیم که یوزپلنگ پس از یک دقیقه به آهو برسد. باتوجه به

این که در این مدت یوزپلنگ با سرعت $95 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$ و آهو با سرعت $65 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$ می دوند و یوزپلنگ به آهو نزدیک می شود، خواهیم

داشت:

$$D = (95 - 65) \times \frac{1}{60} = 0.5 \text{ Km} = 500 \text{ m}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta D}{D} = \frac{53}{500} = 0.106 = 10.6\%$$

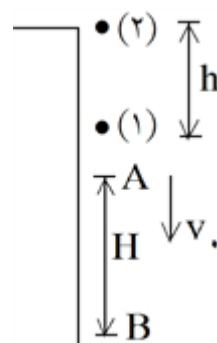
گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. فاصله‌ی زمانی بین رها شدن دو گلوله t می‌باشد. از آن جایی که حرکت دو گلوله کاملاً یکسان و مشابه هم می‌باشد، تمام مراحل حرکت گلوله‌ی دوم t ثانیه بعد از همان مرحله از حرکت گلوله‌ی اول اتفاق می‌افتد. پس اختلاف زمانی بین گذشتن گلوله‌ها از هر نقطه‌ی مشخص همواره برابر t است. فاصله‌ی زمانی رسیدن دو گلوله به نقطه‌ی A ، برابر T ثانیه است. در نتیجه $T = t$ خواهد بود.

روش اول: در هر لحظه، سرعت گلوله‌ی اول از سرعت گلوله‌ی دوم بیش‌تر است. پس می‌توان نتیجه گرفت که گلوله‌ی اول همواره در حال دور شدن از گلوله‌ی دوم است. یعنی فاصله‌ی دو گلوله همواره در حال افزایش است. از آن جایی که فاصله‌ی اولیّه‌ی آن‌ها h بوده و پس از زمان T این فاصله به مقدار H رسیده‌است، $H > h$ خواهد بود.

روش دوم: هنگام رها شدن گلوله‌ی دوم، گلوله‌ی اول به اندازه‌ی h سقوط کرده و گلوله‌ی دوم t ثانیه پس از گلوله‌ی اول رها شده است. پس $h = \frac{1}{2}gt^2$ خواهد بود. و از آن جایی که $T = t$ است، $h = \frac{1}{2}gT^2$ می‌باشد. هنگامی که گلوله‌ی اول به نقطه‌ی A برسد دارای سرعتی است که آن را V در نظر می‌گیریم. وقتی گلوله‌ی اول به B می‌رسد گلوله‌ی دوم به A رسیده‌است. فاصله‌ی زمانی گذشتن دو گلوله از کنار A برابر است با فاصله‌ی زمانی که طول می‌کشد تا گلوله اول با سرعت اولیّه‌ی V از A حرکت کرده و به B برسد. یعنی زمان T طول می‌کشد تا مسافت H را طی کند. در نتیجه فاصله‌ی H از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$H = \frac{1}{2}gt^2 + V \cdot t$$

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{2}gT^2 + V \cdot T \\ h &= \frac{1}{2}gT^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow H > h$$



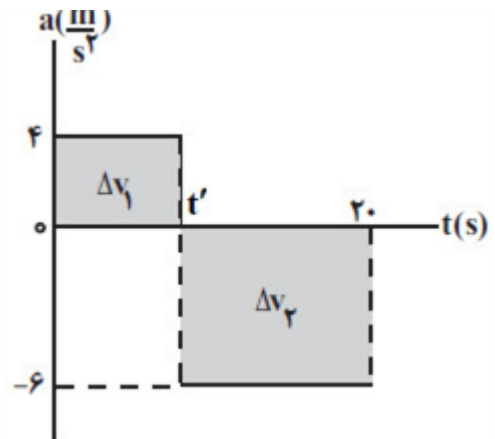
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم مساحت سطح بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان برابر تغییر سرعت است. بنابراین، ابتدا با محاسبه Δv و استفاده از رابطه شتاب متوسط، لحظه تغییر اندازه و جهت شتاب (t') را پیدا می‌کنیم:

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = (4 \times t') + (-6 \times (20 - t'))$$

$$\Rightarrow \Delta v = 4t' - 120 + 6t' = 10t' - 120$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 20s]{a_{av} = -\frac{r}{\tau} \frac{m}{s}} -\frac{r}{\tau} = \frac{10t' - 120}{20}$$

$$\Rightarrow -30 = 10t' - 120 \Rightarrow 90 = 10t' \Rightarrow t' = 9s$$

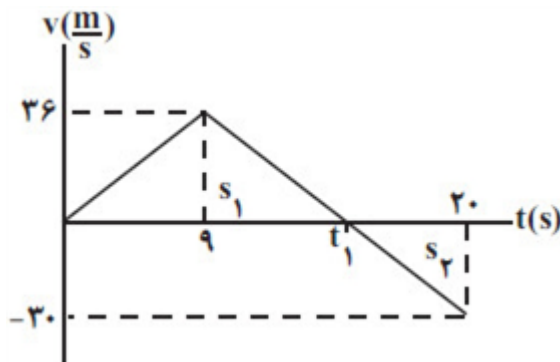


اکنون نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم می‌کنیم. به همین منظور، ابتدا سرعت در لحظه $t' = 9s$ و لحظه‌ای را که متحرک تغییر جهت می‌دهد، می‌یابیم:

$$v_{(t'=9s)} = v_0 + \Delta v_1 \xrightarrow[\text{از حال سکون آغاز کرده}]{\Delta v_1 = 4t' = 4 \times 9 = 36 \frac{m}{s}} v_{(t'=9s)} = 0 + 36 = 36 \frac{m}{s}$$

$$v_{(t=20s)} = v_{(t=9s)} + \Delta v_2 = 36 + (-6 \times (20 - 9)) = -30 \frac{m}{s}$$

در این مرحله، لحظه t_1 را پیدا می‌کنیم. با استفاده از تشابه مثلث‌های s_1 و s_2 داریم:



$$\frac{36}{30} = \frac{t_1 - 9}{20 - t_1} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{t_1 - 9}{20 - t_1} \Rightarrow t_1 = 15s$$

در ۲۰ ثانیه اول حرکت، متحرک در بازه زمانی ۰s تا ۱۵s که $v > 0$ است، در جهت مثبت محور X حرکت می‌کند. بنابراین، با استفاده از مساحت سطح زیر نمودار، مسافت طی شده را حساب می‌کنیم:

$$L = \Delta x = \frac{36 \times t_1}{2} \xrightarrow[t_1 = 15s]{} L = 18 \times 15 = 270m$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا مدت زمان سقوط گلوله اول را حساب می‌کنیم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -125 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t = 5s$$

اکنون مسافتی که گلوله دوم در مدت $5 - 2 = 3s$ سقوط می‌کند را حساب می‌کنیم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2} \times 10 \times 3^2 = -45m$$

بیشترین فاصله دو گلوله هنگامی است که گلوله اول به زمین برخورد می‌کند و برابر ارتفاع گلوله دوم از زمین است.

$$\Delta y_{\max} = 125 - 45 = 80m$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در نمودار مکان - زمان، سرعت در هر لحظه دلخواه t ، برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در آن لحظه است. بنابراین برای محاسبه سرعت در لحظه $t = 20s$ ، شیب خط مماس بر نمودار در این لحظه را پیدا می‌کنیم.

با توجه به نمودار مکان - زمان شکل زیر و رابطه تندی متوسط، ابتدا مسافت طی شده و سپس مکان اولیه (x_0) را می‌یابیم. دقت کنید، km را به m تبدیل کرده‌ایم.

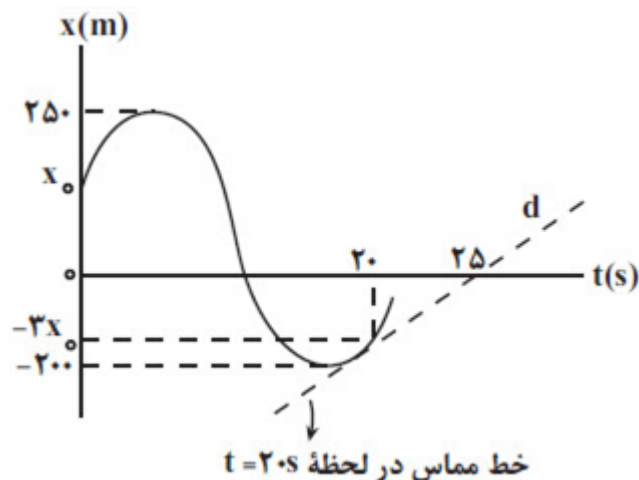
$$L = |250 - x_0| + |-200 - 250| + |-3x_0 - (-200)|$$

$$\Rightarrow L = 250 - x_0 + 450 + 200 - 3x_0$$

$$\Rightarrow L = 900 - 4x_0$$

$$s_{av} = \frac{L}{\Delta t} \xrightarrow{s_{av} = 35 \frac{m}{s}, \Delta t = 20s} 35 = \frac{900 - 4x_0}{20}$$

$$\Rightarrow 700 = 900 - 4x_0 \Rightarrow 4x_0 = 200 \Rightarrow x_0 = 50m$$



با داشتن x_0 شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در لحظه $t = 20s$ را که برابر سرعت در این لحظه است، می‌یابیم:

$$v = \text{شیب خط } d = \frac{0 - (-3x_0)}{25 - 20} \xrightarrow{x_0 = 50m} v = \frac{3 \times 50}{5} = 30 \frac{m}{s}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر فرض کنیم ایران ۷۰ میلیون جمعیت دارد و تعداد لامپ‌های مورد استفاده را تقریباً به ازای هر نفر یک لامپ در نظر بگیریم، می‌توان تعداد لامپ‌های مورد استفاده در ایران را ۱۰۰ میلیون عدد در نظر گرفت. همچنین فرض می‌کنیم توان متوسطی که هر لامپ معمولی مصرف می‌کند، ۱۰۰ وات است.

$$\text{وات } ۲۰ = ۱۰۰ \times \frac{۱}{۵} = \text{توان هر لامپ کم مصرف}$$

$$\text{وات } ۸۰ = ۱۰۰ - ۲۰ = \text{صرفه جویی به ازای هر لامپ کم مصرف}$$

$$\text{وات } ۱۰^۱۰ \times ۸ = ۱۰۰۰۰۰۰۰ \times ۸۰ = \text{کل توان صرفه جویی شده}$$

حتی اگر تعداد لامپ‌ها را همان ۷۰ میلیون فرض کنیم، عدد محاسبه شده برابر $۵/۶ \times ۱۰^۹$ خواهد بود. هر دوی این اعداد به $۱۰^۱۰ w$ نزدیک هستند.

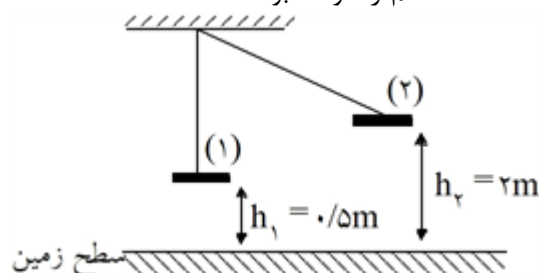
گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. هنگامی که تاب در بیشترین ارتفاع از سطح زمین قرار می‌گیرد ($h_2 = ۲m$) سرعت آن صفر است، زیرا در غیر این صورت تاب با سرعتی که دارد به ارتفاع بالاتری خواهد رفت. در این حالت تاب دارای بیش‌ترین انرژی پتانسیل گرانشی و حداقل انرژی جنبشی که برابر صفر است می‌باشد. وقتی تاب به سمت پایین می‌آید با کاهش ارتفاع و انرژی پتانسیل گرانشی آن، سرعت و انرژی جنبشی آن افزایش می‌یابد، پس هنگامی که تاب به پایین‌ترین ارتفاع خود از سطح زمین می‌رسد ($h_1 = ۰/۵m$) دارای حداکثر انرژی جنبشی و بیشترین سرعت است. اگر سطح زمین را به عنوان مبنای انرژی پتانسیل گرانشی در نظر بگیریم با استفاده از قانون بقای انرژی مکانیکی بین دو وضعیت (۱) و (۲) می‌توانیم بیشترین سرعت تاب را محاسبه کنیم. یعنی مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل گرانشی در وضعیت (۱) را برابر مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل گرانشی در وضعیت (۲) قرار می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$E_1 = E_2 \rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow \frac{1}{2} m V_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2} m V_2^2 + mgh_2$$

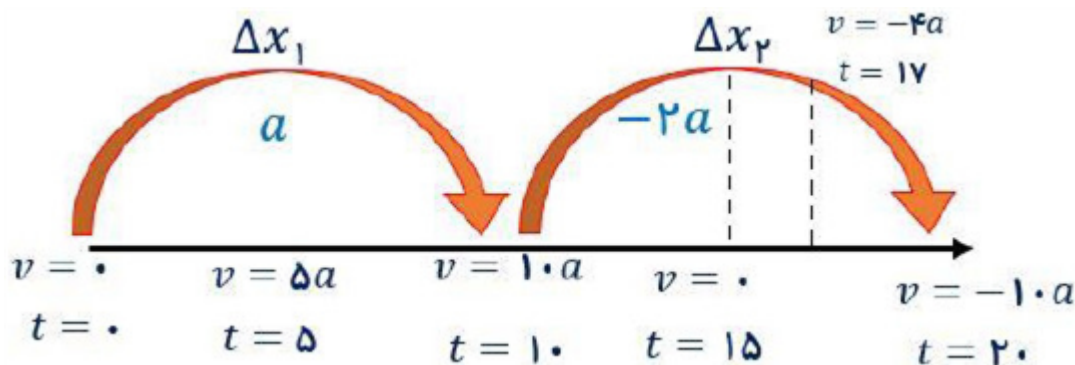
$$\rightarrow \frac{1}{2} \times V_{\max}^2 + ۹/۸ \times ۰/۵ = \frac{1}{2} \times ۰^2 + ۹/۸ \times ۲ \rightarrow \frac{1}{2} V_{\max}^2 + ۴/۹ = ۱۹/۶$$

$$\rightarrow V_{\max}^2 = ۲۹/۴ \rightarrow V_{\max} = \sqrt{۲۹/۴} \approx ۵/۴ \frac{m}{s}$$

در عمل به علت وجود نیروی اصطکاک مقداری از انرژی مکانیکی به انرژی درونی تبدیل می‌شود و در نتیجه سرعت تاب از مقدار به دست آمده کمتر خواهد بود.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل سرعت‌ها را در زمان‌های کلیدی به دست می‌آوریم.



$$\Delta x = 200m$$

طبق رابطه مستقل از شتاب داریم: (چون مسافت را می‌خواهیم، Δx_2 را به این شکل نوشتیم)

$$\Delta x = \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) \Delta t \Rightarrow \Delta x_1 = \left(\frac{0 + 10a}{2} \right) 10 = 50a$$

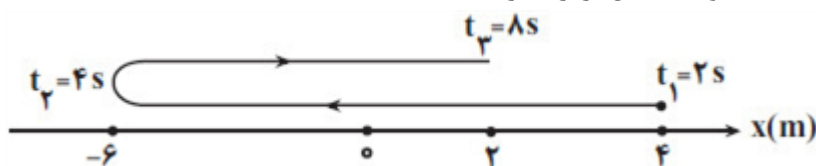
$$\Delta x_2 = \left(\frac{10a + 0}{2} \right) 5 + \left(\frac{0 + (-10a)}{2} \right) 5 = 50a$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow 100a = 200 \Rightarrow a = 2$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-4a - 5a}{17 - 5} = \frac{-9a}{12} = -1/5 \frac{m}{s^2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

آ) درست است. ساده‌ترین مسیر حرکت متحرک مطابق شکل زیر است. این شکل نشان می‌دهد متحرک حداقل یکبار تغییر جهت داده است و تندی آن برابر صفر شده است.



ب) نادرست است. با توجه به شکل فوق، تندی متوسط برابر است با:

$$L = |-6 - 4| + |2 - (-6)| = 10 + 8 = 18m$$

$$s_{av} = \frac{L}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = 8 - 2 = 6s} s_{av} = \frac{18}{6} = 3 \frac{m}{s}$$

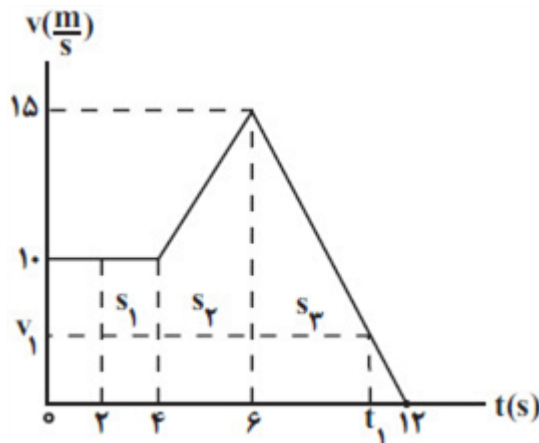
پ) نادرست است. با توجه به داده‌های سؤال، در مورد جهت بردار سرعت در لحظه $t = 7s$ نمی‌توان اظهار نظر قطعی نمود و ممکن است متحرک در لحظه $t = 7s$ مدتی توقف کرده باشد و بردار سرعت آن صفر باشد.

ت) درست است. بردار سرعت متوسط با بردار جابه‌جایی متحرک هم‌جهت است. چون $x_2 < x_1$ است، لذا بردار سرعت متوسط در خلاف جهت محور X می‌باشد. از طرف دیگر، چون $x_2 < 0$ است، بنابراین بردار مکان در این لحظه در خلاف جهت محور X است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا جابه‌جایی متحرک را می‌یابیم:

$$\Delta \vec{x} = \vec{x}_r - \vec{x}_s \quad \begin{matrix} \vec{x}_r = (+75m) \vec{i} \\ \vec{x}_s = (-10m) \vec{i} \end{matrix} \quad \Delta \vec{x} = (75m) \vec{i} - (-10m) \vec{i} = (+85m) \vec{i}$$

با توجه به این که مساحت سطح بین نمودار $v - t$ و محور t برابر جابه‌جایی متحرک است، باید مجموع مساحت‌های s_1 ، s_2 و s_3 برابر Δx باشد. بنابراین، در این حالت، شتاب متحرک در بازه زمانی $6s$ تا $12s$ را می‌یابیم و سپس، سرعت در لحظه t_1 را حساب می‌کنیم.



اکنون مساحت s_3 را می‌یابیم:

$$\Delta x = s_1 + s_2 + s_3 \xrightarrow{\Delta x = 85m} 85 = (10 \times (4 - 2)) + \left(\frac{10 + 15}{2} \times (6 - 4) \right) + s_3$$

$$\Rightarrow 85 = 20 + 25 + s_3 \Rightarrow s_3 = 40m$$

در آخر با استفاده از مساحت s_3 (مساحت دوزنقه)، لحظه t_1 را پیدا می‌کنیم:

$$s_3 = \frac{15 + v_1}{2} \times (t_1 - 6) \xrightarrow[v_1 = -2/5t_1 + 30]{s_3 = 40m} 40 = \frac{15 - 2/5t_1 + 30}{2} \times (t_1 - 6)$$

$$\Rightarrow 80 = (45 - 2/5t_1)(t_1 - 6) \Rightarrow 80 = 45t_1 - 270 - 2/5t_1^2 + 15t_1$$

$$\Rightarrow 2/5t_1^2 - 60t_1 + 350 = 0 \Rightarrow t_1^2 - 24t_1 + 140 = 0 \Rightarrow (t_1 - 10)(t_1 - 14) = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = 10s, t_1 = 14s$$

$t_1 = 14s$ بزرگ‌تر از $t = 12s$ است و قابل قبول نیست.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله حرکت متحرک با حرکت یکنواخت را به دست می‌آوریم:

$$x_A = v_A t + x_{A.0} \xrightarrow{x_{A.0}=20m, v_A=12 \frac{m}{s}} x_A = 12t + 20$$

اکنون ابتدا سرعت اولیه متحرک با شتاب ثابت را به دست می‌آوریم، سپس معادله مکان - زمان آن را می‌نویسیم:

$$v_B = a_B t + v_{B.0} \xrightarrow[t_{B.0}=-8 \frac{m}{s}, a_B=4 \frac{m}{s^2}]{} -8 = 4 + v_{B.0} \Rightarrow v_{B.0} = -12 \frac{m}{s}$$

اکنون معادله مکان - زمان متحرک B را می‌نویسیم:

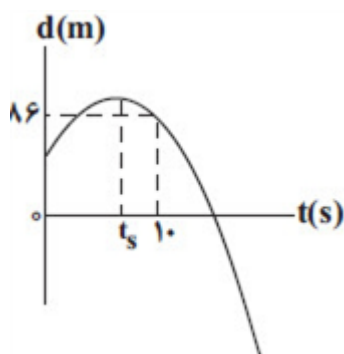
$$x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{B.0} t + x_{B.0} \xrightarrow[a_{B.0}=-12 \frac{m}{s^2}, x_{B.0}=-10m]{a_B=4 \frac{m}{s^2}, t=2s} x_B = 2t^2 - 12t - 10$$

$$-10 = 2 \times 2^2 - 12 \times 2 + x_{B.0} \Rightarrow x_{B.0} = 14m$$

بنابراین فاصله دو متحرک در لحظه t برابر است با:

$$d = x_A - x_B = (12t + 20) - (2t^2 - 12t + 14) = -2t^2 + 24t + 6$$

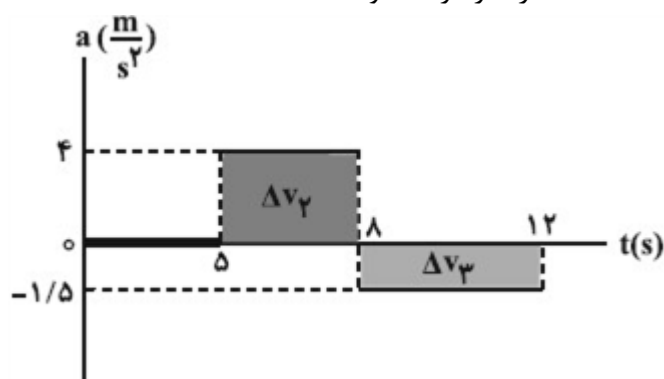
اگر نمودار فاصله دو متحرک را رسم کنیم داریم:



$$t_s = \frac{-V_0}{a} = \frac{12}{4} = 3s \Rightarrow d = -2 \times 3^2 + 24 \times 3 + 6 = 104m$$

نکته: در لحظه‌ای فاصله متحرک B از متحرک A کم می‌شود که داشته باشیم $v_B = v_A$ ، تا قبل از این لحظه دو متحرک به صورت پیوسته در حال دور شدن از یکدیگرند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در نمودار شتاب - زمان، مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان در هر بازه زمانی، برابر با تغییر سرعت (Δv) در آن بازه زمانی است. برای سطحی که بالای محور زمان است، $\Delta v > 0$ و برای سطحی که زیر محور زمان است، $\Delta v < 0$ در نظر گرفته شود.

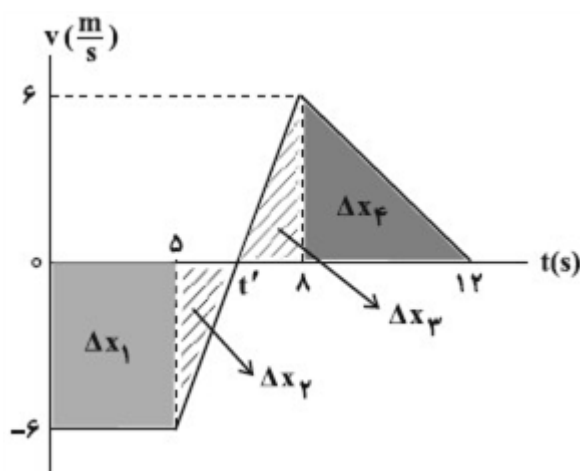


$$\Delta v_1 = 0$$

$$\Delta v_2 = 4(8 - 5) = 12 \frac{m}{s}$$

$$\Delta v_3 = -1/5(12 - 8) = -4/5 \frac{m}{s}$$

بر این اساس و با توجه به اینکه $v_0 = -6 \frac{m}{s}$ است، نمودار سرعت - زمان متحرک را در ۱۲ ثانیه اول حرکت رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار داریم:



$$t' = \frac{5 + 8}{2} = 6.5 \text{ s}$$

مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان در هر بازه زمانی، برابر با جابه‌جایی متحرک در آن بازه است.

$$\Delta x_1 = -6(5 - 0) = -30 \text{ m}$$

$$\Delta x_2 = \frac{(6/5 - 5)(-6)}{2} = -4/5 \text{ m}$$

$$\Delta x_3 = \frac{(8 - 6/5)6}{2} = 4/5 \text{ m}$$

$$\Delta x_4 = \frac{(12 - 8)6}{2} = 12 \text{ m}$$

در پایان، جابه‌جایی متحرک در ۱۲ ثانیه اول و سرعت متوسط آن را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 = -30 - 4/5 + 4/5 + 12 = -18 \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-18}{12 - 0} = -1.5 \frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}_{av} = \left(-1.5 \frac{m}{s}\right) \vec{i}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا از معادله سرعت - زمان استفاده می‌کنیم و سرعت گلوله را در لحظه‌های $t = ۲s$ و $t' - ۲$ و t' به دست می‌آوریم:

$$v = -gt + v_0 \xrightarrow{g=۱۰ \frac{m}{s^2}, t=۲s, v_0=v_1, v_1=۰} v_1 = -۱۰ \times ۲ = -۲۰ \frac{m}{s}$$

به همین ترتیب داریم:

$$v_{t'} = -gt' + v_0 = -۱۰t'$$

$$v_{t'-۲} = -g(t' - ۲) + v_0 = -۱۰(t' - ۲)$$

رابطه مستقل از شتاب را برای دو ثانیه اول حرکت و دو ثانیه آخر حرکت می‌نویسیم طبق صورت سؤال داریم:

$$\Delta y_2 = ۶ \Delta y_1 \Rightarrow \left(\frac{v_{t'-۲} + v_{t'}}{۲} \right) \times ۲ = ۶ \times \left(\frac{v_0 + v_1}{۲} \right) \times ۲$$

$$\xrightarrow{v_{(t'-۲)} = -۱۰(t'-۲), v_{t'} = -۱۰t', v_0=۰, v_1=-۲۰ \frac{m}{s}}$$

$$-۱۰(t' - ۲) + (-۱۰t') = ۶(۰ - ۲۰) \Rightarrow -۱۰t' + ۲۰ - ۱۰t' = -۱۲۰ \Rightarrow -۲۰t' = -۱۴۰ \Rightarrow t' = ۷s$$

تندی در لحظه برخورد به زمین به اندازه $v_{t'}$ است.

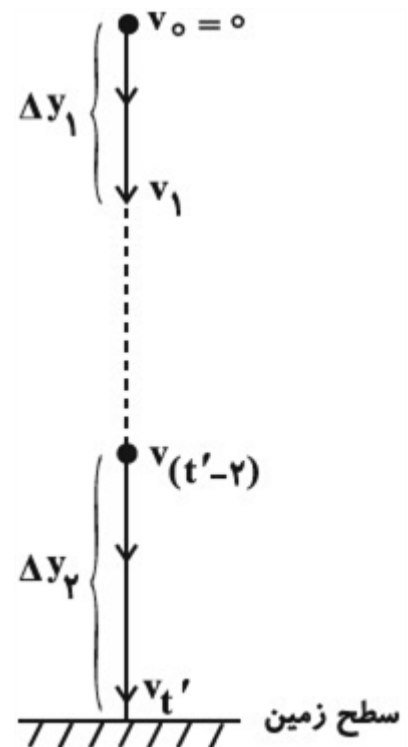
$$v_{t'} = -۱۰t' \xrightarrow{t'=۷s} |v_{t'}| = ۱۰ \times ۷ = ۷۰ \frac{m}{s}$$

توجه: از روش دیگر نیز می‌توان کل زمان سقوط را به دست آورد. با توجه به این که در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه، جسم در ثانیه اول حرکت خود مسافت ۵ متر را می‌پیماید، مسافت‌های طی شده توسط آن در ثانیه‌های بعدی تشکیل یک دنباله حسابی را می‌دهند.

$$\underbrace{۵, ۱۵, ۲۵, ۳۵, ۴۵, ۵۵, ۶۵, \dots}_{\text{۲ ثانیه اول}} \quad \underbrace{\dots}_{\text{۲ ثانیه آخر}}$$

$$\Delta y_1 = ۲۰m \quad \Delta y_2 = ۱۲۰m$$

پس زمان کل حرکت $t' = ۷s$ است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در حرکت با شتاب ثابت، اگر جهت حرکت متحرک تغییر کند، بعد از لحظه تغییر جهت، بردارهای سرعت و شتاب متحرک هم جهت می شوند. دقت کنید، اگر جهت بردارهای سرعت و شتاب متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 خلاف جهت هم باشند، تا قبل از عبور مجدد متحرک از مکان آن در لحظه t_1 تندی متحرک از تندی آن در لحظه t_1 کمتر است. با توجه به توضیحات داده شده، به بررسی گزینه ها می پردازیم:

گزینه ۱: چون $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ مثبت اند، جهت متحرک در این گزینه ثابت است و تندی متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 کاهش یافته است. بنابراین می تواند شتاب حرکت متحرک در این بازه زمانی ثابت باشد. (با استفاده از رابطه سرعت - جابه جایی می توانید شتاب حرکت متحرک را به دست آورید).

گزینه ۲: چون $v_1 < 0$ و $v_2 > 0$ است، جهت حرکت متحرک تغییر کرده است. با توجه به اینکه بردار سرعت متحرک در لحظه t_2 در جهت مثبت محور X است، بنابراین بردار شتاب بایستی در جهت مثبت باشد. از طرفی، چون متحرک هنوز از مکان خود در لحظه t_1 مجدداً عبور نکرده است، لذا باید تندی آن کمتر از $12 \frac{m}{s}$ باشد. بنابراین شتاب متحرک نمی تواند ثابت باشد. با استفاده از رابطه سرعت - جابه جایی (مستقل از زمان) شتاب حرکت برابر است با:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \xrightarrow{x_1 = -10m, x_2 = -20m, v_1 = -12 \frac{m}{s}, v_2 = 15 \frac{m}{s}} 225 = 144 + 2a(-20 - (-10))$$

$$\Rightarrow 81 = -20a \Rightarrow a = -4 / 0.5 \frac{m}{s^2}$$

با توجه به اینکه شتاب منفی است، لذا حرکت متحرک نمی تواند با شتاب ثابت باشد.

گزینه ۳: چون علامت بردار سرعت متحرک تغییر کرده است جهت حرکت متحرک نیز، تغییر کرده و شتاب هم جهت بردار سرعت متحرک در لحظه t_2 ، یعنی در جهت منفی است. با توجه به اینکه تندی متحرک کوچک تر از تندی آن قبل از عبور مجدد از مکان آن در لحظه t_1 است لذا شتاب حرکت متحرک می تواند ثابت باشد.

با استفاده از رابطه سرعت - جابه جایی شتاب حرکت را به دست می آوریم:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \xrightarrow{x_1 = -4m, x_2 = 0, v_1 = 8 \frac{m}{s}, v_2 = -5 \frac{m}{s}} 25 = 64 + 2a \times (0 - (-4))$$

$$\Rightarrow -39 = 8a \Rightarrow a = -\frac{39}{8} \frac{m}{s^2}$$

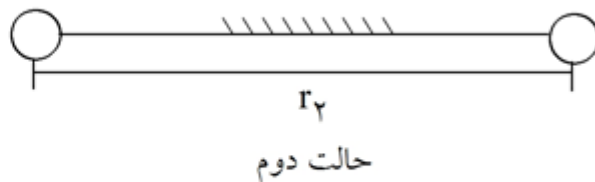
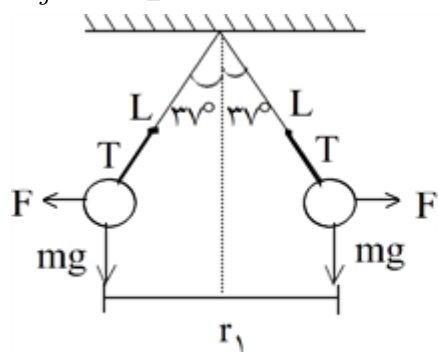
گزینه ۴: با توجه به توضیحات، گزینه ۴ شتاب ثابت است و اندازه آن برابر است با:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a(x_2 - x_1) \xrightarrow{x_1 = -10m, x_2 = -15m, v_1 = -15 \frac{m}{s}, v_2 = -20 \frac{m}{s}} 400 = 225 + 2a \times (-15 - (-10))$$

$$\Rightarrow 175 = -10a \Rightarrow a = -17.5 \frac{m}{s^2}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با بالا بردن گلوله‌ها تا زیر سقف، انرژی پتانسیل گرانشی گلوله‌ها به سبب افزایش ارتفاع نسبت به سطح پتانسیل مبنا، افزایش می‌یابد و انرژی پتانسیل الکتریکی به سبب افزایش فاصله‌ی گلوله‌های باردار، کاهش می‌یابد. می‌دانیم کارعامل خارجی برابر مجموع تغییر این انرژی‌هاست و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$W = \Delta U_g + \Delta U_E$$



حالت اول

$$\Delta U_g = 2mgh = 2mg(L \cos 37^\circ) = 2mgL \times (4/5) = 8/5 mgL$$

$$U_{E_1} = k \frac{q^2}{r_1} = k \frac{q^2}{2L \sin 37^\circ} = k \frac{q^2}{2L \times (3/4)} = k \frac{q^2}{1.5L}$$

$$U_{E_2} = k \frac{q^2}{r_2} = k \frac{q^2}{2L}$$

$$\Delta U_E = U_{E_2} - U_{E_1} = k \frac{q^2}{2L} - k \frac{q^2}{1.5L} = k \frac{q^2}{L} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1.5} \right) = -k \frac{q^2}{3L}$$

برای محاسبه‌ی دقیق تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی، وضعیت تعادل دو گلوله در حالت اول را بررسی می‌کنیم.

$$\vec{F} + \vec{W} + \vec{T} = 0 \rightarrow \vec{F} + \vec{W} = -\vec{T} \rightarrow \begin{cases} T \sin 37^\circ = F \\ T \cos 37^\circ = mg \end{cases} \rightarrow \tan 37^\circ = \frac{F}{mg}$$

$$\rightarrow \tan 37^\circ = \frac{k \frac{q^2}{r_1}}{mg} = \frac{kq^2}{mg (1.5L)}$$

$$\tan 37^\circ = \frac{3}{4} \rightarrow 0.75 = \frac{kq^2}{1.5L mg} \rightarrow \frac{kq^2}{L} = 1.08 mgL$$

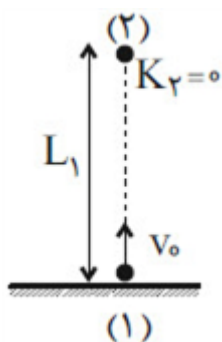
در ادامه خواهیم داشت:

$$\Delta U_E = -\frac{1}{3} k \frac{q^2}{L} = -\frac{1}{3} \times 1.08 mgL = -0.36 mgL$$

$$W = \Delta U_g + \Delta U_E = 8/5 mgL - 0.36 mgL = 1.24 mgL$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. همان گونه که می دانیم، در بالاترین نقطه مسیر، تندی جسم برابر صفر شده و انرژی جنبشی جسم نیز صفر می باشد. با توجه به قضیه کار - انرژی جنبشی ($W_t = K_2 - K_1$) برای حالت اول و دوم می توان گفت:

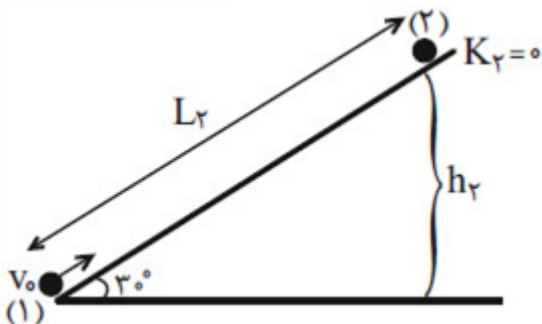
حالت اول:



$$W_{mg} = K_2 - K_1 \xrightarrow[h=L_1]{W_{mg} = -mgh} -mgL_1 = -\frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow L_1 = \frac{v^2}{2g}$$

حالت دوم:



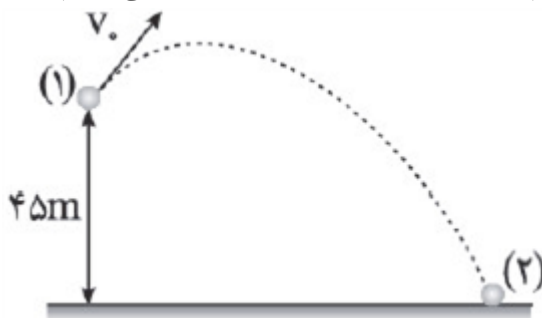
برای حالت دوم بر روی سطح شیبدار می توان گفت:

$$W_{mg} = K_2 - K_1 \Rightarrow -mgh_2 = -\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow h_2 = \frac{v^2}{2g} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{h_2}{L_2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h_2}{L_2}$$

$$\Rightarrow L_2 = 2h_2 = 2 \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{v^2}{g}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\frac{v^2}{2g}}{\frac{v^2}{g}} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر مبدأ پتانسیل گرانشی را سطح زمین فرض کنیم، با توجه به پایسته بودن انرژی مکانیکی داریم:

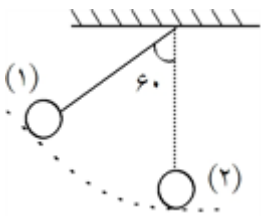


$$E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$\Rightarrow mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow 10 \times 45 + \frac{1}{2} \times 900$$

$$= \frac{1}{2}v_2^2 \Rightarrow 450 + 450 = \frac{1}{2}v_2^2 \Rightarrow v_2^2 = 900 \times 2$$

$$\Rightarrow v_2 = 30\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

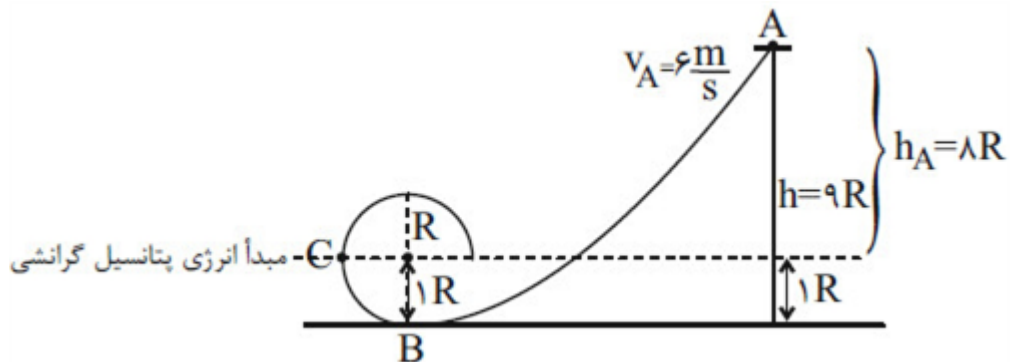


$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + mg(L - L \cos 60^\circ) = K_2 + 0 \Rightarrow K_2 = 0.5 \times 10 \times \left(2 - 2 \times \frac{1}{2}\right) = 2J$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. وقتی در سؤال می‌گویند سطح بدون اصطکاک است، یعنی نیروی اتلافی نداریم و در نتیجه انرژی مکانیکی پایسته می‌ماند. با توجه به شکل داریم:

(سطح گذرنده از نقطه C را به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی در نظر می‌گیریم)



$$E_A = E_C \Rightarrow U_A + K_A = U_C + K_C \xrightarrow{U_C=0} mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$\Rightarrow gh_A + \frac{1}{2}v_A^2 = \frac{1}{2}v_C^2 \Rightarrow (10 \times 8 \times 1/4) + \left(\frac{1}{2} \times 6^2\right) = \frac{1}{2}v_C^2$$

$$112 + 18 = \frac{1}{2}v_C^2 \Rightarrow 130 \times 2 = v_C^2 \Rightarrow v_C^2 = 260 \Rightarrow v_C = \sqrt{260} \frac{m}{s}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون اتلاف انرژی نداریم، با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$E_A = E_B \xrightarrow{E=K+U} K_A + U_A = K_B + U_B \xrightarrow{K_B=0, U_B=U_A+20} K_A + U_A = 0.5K_A + U_A + 20 \Rightarrow 0.5K_A = 20 \Rightarrow K_A = 40J$$

همچنین برای A و C می‌توان نوشت:

$$E_A = E_C \Rightarrow K_A + U_A = K_C + U_C \xrightarrow{K_C=1/6 K_A, U_C=0.8 U_A} K_A + U_A = 1/6 K_A + 0.8 U_A$$

$$\Rightarrow U_A = 3K_A = 120J$$

بنابراین انرژی مکانیکی گلوله در نقطه C به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E_C = E_A = U_A + K_A = 120 + 40 = 160J$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه‌ی بین توان و بازده داریم:

$$P_{\text{خروجی}} = 480 \text{ W} \Rightarrow P_{\text{خروجی}} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{\eta} \times 100 \Rightarrow 80 = \frac{P_{\text{خروجی}}}{600} \times 100 \Rightarrow P_{\text{خروجی}} = 480 \text{ W}$$

از طرفی با استفاده از قضیه‌ی کار و انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{\text{موتور}} + W_{\text{مغ}} = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Rightarrow (mgh \cos 180^\circ) + W_{\text{موتور}} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow W_{\text{موتور}} = mgh + \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{W_{\text{موتور}}}{t} = \frac{mgh + \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)}{t}$$

بنابراین:

$$m = \rho V = (10^3) \left(\frac{\pi}{4} \right) (2)^2 \times 1.5 = 2400 \text{ kg}, t = 1.5 \text{ min} = 90 \text{ s}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, h = 1.6 \text{ m}, v_1 = 0, P_{\text{خروجی}} = 480 \text{ W}$$

$$480 = \frac{(2400)(10)(1.6) + \frac{1}{2} (2400) v_2^2}{90} \Rightarrow v_2 = 2 \sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

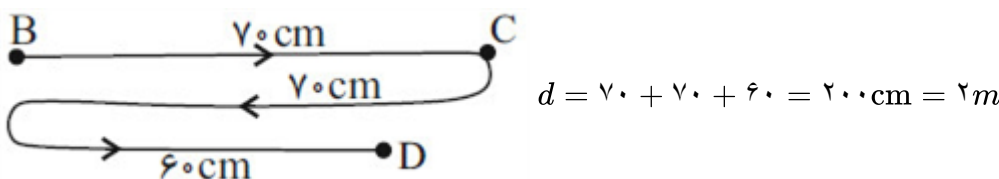
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید جسم بعد از چند حرکت رفت و برگشتی سرانجام در نقطه‌ی گرانشی D روی سطح افقی می‌ایستد. اگر سطح زمین را به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل در نظر بگیریم، از قانون پایستگی انرژی خواهیم داشت:

$$\sin 30^\circ = \frac{h_A}{\lambda_0} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h_A}{\lambda_0} \Rightarrow h_A = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}$$

$$E_D - E_A = W_{f_k} \Rightarrow (K_D + U_D) - (K_A + U_A) = W_{f_k} \Rightarrow -mgh_A = f_k d \cos 180^\circ$$

$$\Rightarrow -2 \times 10 \times 0.4 = 4 \times d \times (-1) \Rightarrow d = 2 \text{ m}$$

یعنی جسم در کل بعد از ۲ متر حرکت روی سطح دارای اصطکاک، کل انرژی مکانیکی‌اش تلف شده است. پس ابتدا ۷۰ cm به طرف راست رفته سپس از نقطه‌ی C گذاشته و بالاتر رفته، سپس برگشته و ۷۰ cm دیگر به طرف چپ رفته است تا به نقطه‌ی B برسد و در ادامه دوباره از نقطه‌ی B به طرف راست رفته تا در نقطه‌ی D متوقف شود، پس مسیر حرکت جسم روی سطح افقی به صورت زیر است:



پس در فاصله‌ی ۶۰ cm از نقطه‌ی B متوقف شده است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون دو پمپ تغییر تندی در آب ایجاد نکرده‌اند و کار غیرصفر دیگری جز کار پمپ و کار نیروی وزن وجود ندارد، می‌توان به این نتیجه رسید که کار پمپ معادل با اندازه‌ی کار نیروی وزن یعنی $W = mgh$ می‌باشد. هم‌چنین با توجه به رابطه‌ی $m = \rho V$ می‌توان نوشت:

$$W = \rho V g h$$

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\rho V g h}{\Delta t} \Rightarrow \frac{P_{A \text{ خروجی}}}{P_{B \text{ خروجی}}} = \frac{V_A}{V_B} \times \frac{h_A}{h_B} \times \frac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = \frac{2}{4} \times \frac{20}{8} \times \frac{1}{0.5} = \frac{5}{2}$$

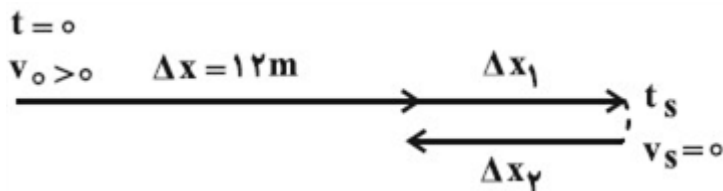
رابطه‌ی بازده (اگر آن را با Ra نمایش دهیم) به صورت زیر است:

$$Ra = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{کل}}} \Rightarrow \frac{Ra_A}{Ra_B} = \frac{P_{A \text{ خروجی}}}{P_{B \text{ خروجی}}} \times \frac{P_{B \text{ کل}}}{P_{A \text{ کل}}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \times \frac{P_{B \text{ کل}}}{P_{A \text{ کل}}} \Rightarrow \frac{P_{A \text{ کل}}}{P_{B \text{ کل}}} = 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا جابه‌جایی متحرک در ۶ ثانیه اول حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{v_{av} = \frac{2}{5} \frac{m}{s}, \Delta t = 6s} 2 = \frac{\Delta x}{6} \Rightarrow \Delta x = 12m$$

در حرکت بر روی خط راست، وقتی در یک بازه زمانی معین، مسافت طی شده (L) و جابه‌جایی متحرک (Δx) با هم برابر نیستند، یعنی متحرک در یک لحظه مانند t_s متوقف شده و جهت حرکت آن تغییر کرده است. با توجه به این که در لحظه $t = 0$ جهت حرکت در سوی مثبت محور X بوده است، داریم:



$$\Delta x_1 = \frac{L - \Delta x}{2} = \frac{12 - 12}{2} = 0 / 5m$$

$$\Delta x_2 = -\Delta x_1 = -0 / 5m$$

با استفاده از رابطه مستقل از سرعت اولیه می‌توان نوشت:

$$\Delta x + \Delta x_1 = -\frac{1}{2}at_s^2 + v_s t_s \xrightarrow{\Delta x = 12m, \Delta x_1 = 0 / 5m, v_s = 0} 12 / 5 = -\frac{1}{2}at_s^2 \quad (A)$$

همچنین با توجه به معادله جابه‌جایی داریم:

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}a(t - t_s)^2 + v_s(t - t_s) \xrightarrow{\Delta x_2 = -0 / 5m, t = 6s, v_s = 0} -0 / 5 = \frac{1}{2}a(6 - t_s)^2 \quad (B)$$

روابط A و B را بر هم تقسیم می‌کنیم تا لحظه توقف را به دست آوریم:

$$\frac{12 / 5}{-0 / 5} = \frac{-\frac{1}{2}at_s^2}{\frac{1}{2}a(6 - t_s)^2} \Rightarrow 25 = \frac{t_s^2}{(6 - t_s)^2} \Rightarrow 5 = \frac{t_s}{6 - t_s} \Rightarrow t_s = 5s$$

اکنون می‌توانیم شتاب حرکت را حساب کنیم:

$$12 / 5 = -\frac{1}{2}at_s^2 \xrightarrow{t_s = 5s} 12 / 5 = -\frac{1}{2}a(5^2) \Rightarrow a = -1 \frac{m}{s^2}$$

همچنین سرعت اولیه متحرک را نیز پیدا می‌کنیم:

$$v_s = at_s + v_0 \xrightarrow{v_s = 0, a = -1 \frac{m}{s^2}, t_s = 5s} 0 = -1 \times 5 + v_0 \Rightarrow v_0 = 5 \frac{m}{s}$$

در پایان تندی متحرک را در لحظه $t = 3s$ حساب می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{a = -1 \frac{m}{s^2}, t = 3s, v_0 = 5 \frac{m}{s}} v = -1 \times 3 + 5 = 2 \frac{m}{s} \Rightarrow s = |v| = 2 \frac{m}{s}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = 5t^2 \quad \text{گزینه ۱ پاسخ صحیح است.}$$

$$h' = \frac{1}{2}g(t - 1)^2 \Rightarrow h' = 5t^2 - 10t + 5$$

$$h - h' = 10t - 5$$

معادله بالا شبیه به معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت است ($x = vt + x_0$). بنابراین فاصله در هر ثانیه ۱۰ متر افزایش می‌یابد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا با استفاده از رابطه توان، کار انجام شده توسط بالابر را حساب می‌کنیم:

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow W = Pt \xrightarrow[t=10s]{P=300W} W = 300 \times 10 = 3000 J$$

بخشی از کار W که به صورت مفید روی بسته انجام شده، همان انرژی پتانسیل ذخیره شده در بسته (U_1) است. با توجه به

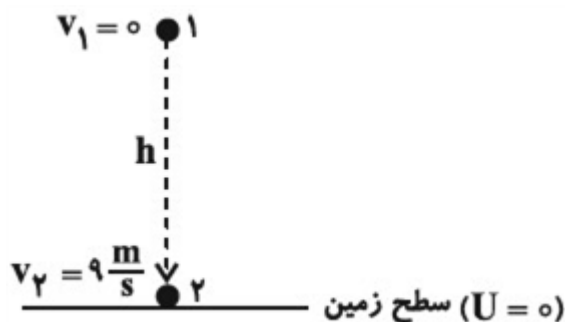
پایستگی انرژی مکانیکی هنگام سقوط بسته داریم: (با فرض زمین به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی)

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \xrightarrow[U_2=0]{K_1=0} U_1 = K_2 \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

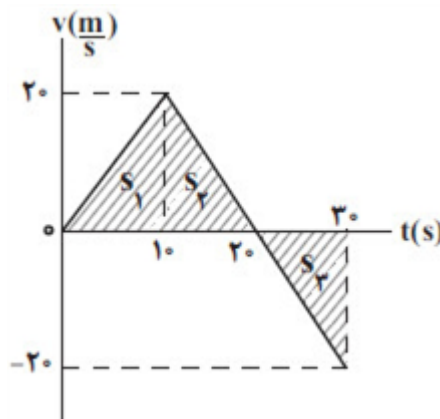
$$\xrightarrow[v_2=9\frac{m}{s}]{m=60\text{ kg}} U_1 = \frac{1}{2} \times 60 \times 9^2 \Rightarrow U_1 = 30 \times 81 J$$

در پایان، بازده بالابر را حساب می‌کنیم:

$$\text{بازده} = \frac{U_1}{W} \times 100 = \frac{30 \times 81}{3000} \times 100 = 81\%$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار سرعت - زمان داده شده نشان می‌دهد، در بازه زمانی ۰s تا ۱۰s شتاب متحرک ثابت و مثبت و حرکت آن تندشونده، بدون سرعت اولیه و در جهت محور X و در بازه زمانی ۱۰s تا ۳۰s شتاب متحرک ثابت و منفی و حرکت آن ابتدا کندشونده در جهت محور X (بازه زمانی ۱۰s تا ۲۰s) و سپس در لحظه $t = ۲۰s$ تغییر جهت می‌دهد و در بازه زمانی ۲۰s تا ۳۰s، حرکت متحرک تندشونده و در خلاف جهت محور X است. بنابراین، با توجه به اینکه مساحت سطح بین نمودار $v - t$ و محور t برابر جابه‌جایی متحرک است، ابتدا مکان متحرک را در لحظه‌های $t = ۱۰s$ ، $t = ۲۰s$ و $t = ۳۰s$ به دست می‌آوریم:



$$\Delta x_1 = s_1 = \frac{20 \times 10}{2} = 100m$$

$$x_{t=10s} = x_0 + \Delta x_1 \xrightarrow{x_0 = -10m}$$

$$x_{t=10s} = -10 + 100 = 90m$$

$$\Delta x_2 = s_2 = \frac{20 \times (20 - 10)}{2} = 100m$$

$$x_{t=20s} = x_{10s} + \Delta x_2 \xrightarrow{x_{10s} = 90m}$$

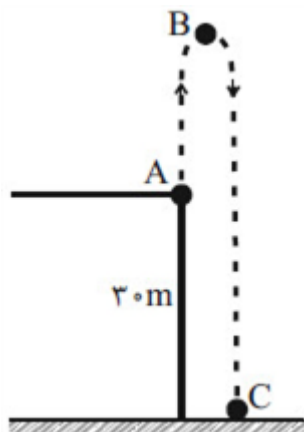
$$x_{t=20s} = 90 + 100 = 190m$$

$$\Delta x_3 = s_3 = \frac{-20 \times (30 - 20)}{2} = -100m$$

$$x_{t=30s} = x_{20s} + \Delta x_3 \xrightarrow{x_{20s} = 190m} x_{t=30s} = 190 - 100 = 90m$$

با مشخص شدن مکان متحرک در لحظه‌های ذکر شده، باید نمودار مکان - زمان به گونه‌ای باشد که در بازه زمانی ۰s تا ۱۰s شیب خط مماس بر نمودار که معرف سرعت است، مثبت و در حال افزایش و در بازه زمانی ۱۰s تا ۲۰s، شیب خط مماس بر نمودار مثبت و در حال کاهش به طوری که در لحظه $t = ۲۰s$ ، شیب خط مماس بر نمودار صفر باشد. در آخر، در بازه زمانی ۲۰s تا ۳۰s شیب خط مماس بر نمودار منفی و در حال افزایش باشد. دقت کنید، در هر بازه زمانی $a > 0$ باشد، تقعر نمودار سهمی شکل مکان - زمان به طرف بالا و اگر $a < 0$ باشد، تقعر نمودار مکان - زمان به طرف پایین خواهد بود. بنابراین، با توجه به توضیحات ذکر شده، نمودار گزینه ۱ درست است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی، ارتفاع اوج جسم را به دست می‌آوریم.



$$AB \text{ مسیر} \Rightarrow W_{mg} + W_{f_D} = \Delta K \Rightarrow -mgh - f_D \times h = \frac{1}{2}m(0^2 - 12^2)$$

$$\xrightarrow{f_D = 0.5mg} -m \times 10 \times h - \frac{1}{2}m \times 10 \times h = \frac{1}{2}m(-144)$$

$$\Rightarrow -12h = -72 \Rightarrow h = 6m$$

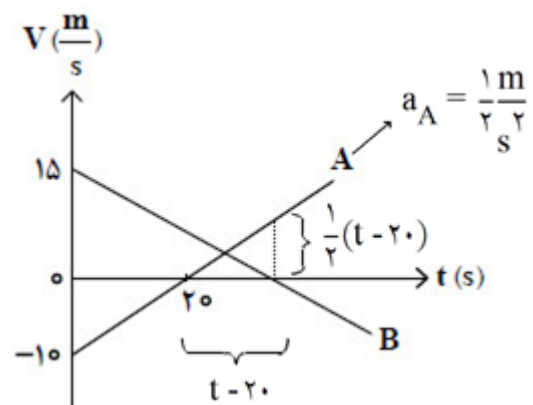
حال قضیه کار - انرژی جنبشی را برای مسیر برگشت می‌نویسیم:

$$BC \text{ مسیر} \Rightarrow W'_{mg} + W'_{f_D} = \Delta K' \Rightarrow m \times 10 \times 36 - f_D \times 36 = \Delta K'$$

$$\Rightarrow 360m - \frac{1}{2}m \times 10 \times 36 = \frac{1}{2}m(v_C^2 - 0^2) \Rightarrow 360 - 72 = \frac{1}{2}v_C^2$$

$$\Rightarrow v_C^2 = 2 \times 288 = 576 \Rightarrow v_C = 24 \frac{m}{s}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۹



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق رابطه بازده داریم: ۷۰

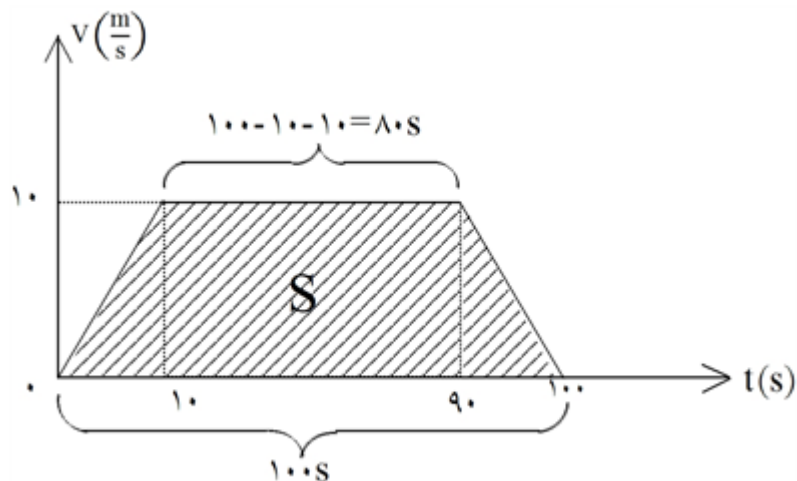
$$Ra = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 \Rightarrow Ra = \frac{\frac{W_{\text{مفيد}}}{t_1}}{\frac{W_{\text{كل}}}{t_2}} \times 100 \Rightarrow Ra = \frac{\frac{mgh}{t_1}}{\frac{W_{\text{ورودی}}}{t_2}} \times 100$$

$$\xrightarrow{V=20 \text{ lit} \Rightarrow m=\rho \times V=20 \text{ kg}} Ra = \frac{\frac{20 \times 10 \times 15}{1}}{\frac{12000}{3}} \times 100 = \frac{3000}{4000} \times 100 = 75\%$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا فاصله‌ی دو ایستگاه را محاسبه می‌کنیم. در شرایط عادی سرعت ثابت قطار $10 \frac{m}{s}$ است. پس اگر شتاب قطار $1 \frac{m}{s^2}$ باشد. مدت زمان سرعت گرفتن قطار و رسیدن سرعت قطار از 0 به $10 \frac{m}{s}$ برابر 10 ثانیه و مدت زمان توقف قطار و رسیدن سرعت قطار از $10 \frac{m}{s}$ به 0 نیز برابر 10 ثانیه است.

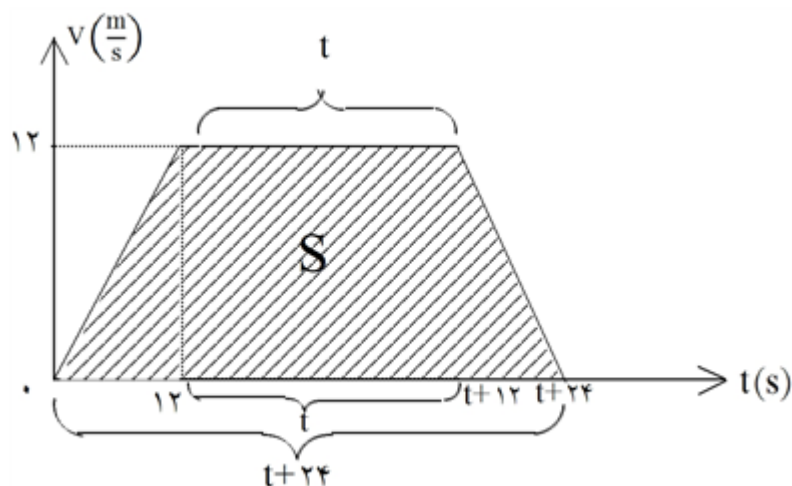
$$\Delta t_{\text{توقف کردن}} = \Delta t_{\text{سرعت گرفتن}} = \frac{|\Delta V|}{a} = \frac{|10 - 0|}{1} = 10 \text{ s}$$

باتوجه به این که کل مدت زمان حرکت قطار بین دو ایستگاه متوالی 100 ثانیه است، به این نتیجه می‌رسیم که 20 ثانیه‌ی این زمان برای سرعت گرفتن و توقف کردن می‌گذرد و مابقی این زمان یعنی 80 ثانیه، با سرعت ثابت $10 \frac{m}{s}$ به حرکت قطار اختصاص می‌یابد. بنابراین در این حالت می‌توانیم نمودار سرعت - زمان حرکت قطار را به صورت زیر در نظر بگیریم. سطح زیر نمودار منحنی $V - t$ در مدت 100 ثانیه، بیانگر جابه‌جایی قطار و فاصله‌ی بین دو ایستگاه متوالی می‌باشد.



$$S = \frac{(80 + 100) \times 10}{2} = 900 (m)$$

در شرایط اضطراری حداکثر سرعت قطار به مقدار ثابت $12 \frac{m}{s}$ می‌رسد. پس در این شرایط قطار فاصله‌ی 900 متری بین دو ایستگاه را در حداقل زمان طی می‌کند. در این حالت قطار 12 ثانیه با شتاب $1 \frac{m}{s^2}$ سرعت می‌گیرد تا سرعت آن از 0 به $12 \frac{m}{s}$ و در آخر نیز 12 ثانیه با شتاب $1 \frac{m}{s^2}$ ترمز می‌کند تا سرعت آن از $12 \frac{m}{s}$ به 0 برسد. پس نمودار سرعت - زمان حرکت قطار در شرایط اضطرار به صورت زیر می‌باشد.



در این شرایط نیز باید سطح زیر نمودار سرعت - زمان با جابه‌جایی و فاصله‌ی بین دو ایستگاه برابر باشد. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$S_{\text{نورته}} = \frac{1}{2} (t + 24 + t) \times 12 = 12t + 144 \rightarrow 900 = 12t + 144$$

$$\rightarrow t = \frac{756}{12} = 63 \text{ s}$$

پس زمان حرکت قطار بین دو ایستگاه در شرایط اضطرار برابر $87 \text{ s} = 63 + 24 = t + 24$ خواهد شد.

قطار فاصله‌ی بین دو ایستگاه را در شرایط عادی در 100 ثانیه و در شرایط اضطرار در 87 ثانیه می‌پیماید، یعنی در شرایط اضطرار قطار می‌تواند در فاصله‌ی بین دو ایستگاه متوالی 13 ثانیه از تأخیر زمانی خود را جبران کند. پس می‌توان گفت که اگر قطار در یک

ایستگاه 30 ثانیه بیش‌تر توقف کند این تأخیر زمانی را حداقل در $3 \cong 2/3 = \frac{30}{100}$ ایستگاه بعدی می‌تواند جبران کند.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. شتاب متحرک در هر لحظه برابر شیب خط مماس بر منحنی سرعت - زمان در آن لحظه می‌باشد. شیب خط مماس بر منحنی رسم شده در لحظه‌ی $t = t_0$ برابر $\tan 45^\circ$ است. اما می‌دانیم هر 1 cm بر محور سرعت‌ها معادل $10 \frac{m}{s}$ و هر 1 cm بر محور زمان معادل 1 s می‌باشد. در نتیجه :

$$a = \tan 45^\circ \times \frac{10}{1} = 1 \times \frac{10}{1} = 10 \frac{m}{s^2}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. برای این که در هر لحظه فقط یک قطره در حال سقوط باشد باید مدت زمان سقوط یک قطره کمتر از مدتی باشد که قطره‌ی دیگر از شیر جدا می‌شود. مدت زمان سقوط را می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد:

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

و فاصله‌ی زمانی رها شدن دو قطره‌ی متوالی برابر است با:

$$T = \frac{V}{Q}$$

$$T \geq t \rightarrow \frac{V}{Q} \geq \sqrt{\frac{2h}{g}} \rightarrow \frac{Q}{V} \leq \sqrt{\frac{g}{2h}} \rightarrow Q \leq V \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. پس از رها کردن وزنه‌ی m_2 اتفاقی که می‌افتد بدین صورت است که وزنه‌ی m_2 سقوط کرده تا به زمین برخورد کند و از آن پس طناب شل شده و وزنه‌ی m_1 به بالا پرتاب می‌شود. برای یافتن ارتفاع بیشینه‌ی وزنه‌ی m_1 ، سرعت این وزنه در لحظه‌ی شل شدن طناب را محاسبه می‌کنیم. از لحظه‌ی رها کردن m_2 تا برخورد آن با زمین رابطه‌ی بقای انرژی را برای مجموعه‌ی دو جسم می‌نویسیم. در حالی که می‌دانیم اول این که هرگاه m_2 به اندازه‌ی یک متر پایین بیاید، وزنه‌ی m_1 به اندازه‌ی یک متر بالا می‌رود و دوم این که تا لحظه‌ی شل شدن طناب سرعت دو جسم یکسان است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta U_{1,2} = m_1 g \Delta y_1 + m_2 g \Delta y_2 = 2 \times 10 \times (+1) + 3 \times 10 \times (-1) = 20 - 30 = -10 \text{ J}$$

$$\Delta K_{1,2} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2} \times (2 + 3) \times V^2 = \frac{5}{2} V^2$$

$$\Delta U_{1,2} + \Delta K_{1,2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{5}{2} V^2 = 10 \rightarrow V_1 = V_2 = 2 \frac{m}{s}$$

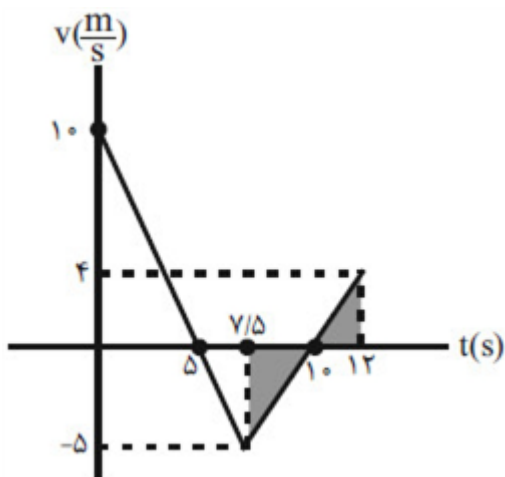
وزنه‌ی m_1 از ارتفاع یک متری با سرعت اولیه‌ی $2 \frac{m}{s}$ به بالا پرتاب می‌شود و تا ارتفاع h بالا می‌رود.

$$0 - V_1^2 = -2gh \rightarrow h = \frac{V_1^2}{2g} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \rightarrow h = 0.2 \text{ m}$$

$$\rightarrow H_{\max} = \Delta y_1 + h = 1 + 0.2 = 1.2 \text{ m}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثلث‌های هاشورخورده در شکل زیر با هم متشابه‌اند، بنابراین:

۷۵



$$\frac{v/5}{v_1} = \frac{5}{v_1} \Rightarrow v_1 = \frac{v \times 5}{v/5} = 4 \frac{m}{s}$$

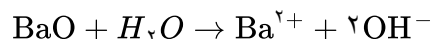
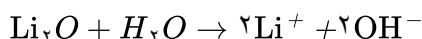
$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 2 \times (4^2 - 0^2) = 16 J$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. موارد سوم و چهارم صحیح هستند. بررسی موارد:

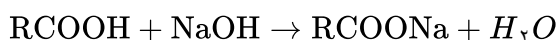
۷۶

مورد اول: HA نسبت به HB اسید قوی‌تری است اما برای مقایسه pH و $[H^+]$ دو محلول باید غلظت اولیه دو اسید نیز معلوم باشد.

مورد دوم: معادله واکنش این دو اکسید با آب به صورت زیر است:



با توجه به اینکه مول برابر از Li_2O و BaO، مول یکسانی OH^- تولید می‌کند، $[OH^-]$ و خاصیت بازی دو محلول برابر است. مورد سوم: فرآورده این واکنش، صابون جامد است:



مورد چهارم: با توجه به اینکه کاغذ pH تغییر رنگ نمی‌دهد، محلول حاصل خنثی بوده و از این رو شمار مول‌های NaOH و HCl مصرفی با یکدیگر برابر است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

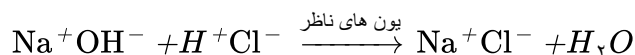
۷۷

$$pH = 1/3 \Rightarrow [H^+] = 5 \times 10^{-2} \Rightarrow \Delta t = \frac{5 \times 10^{-2} \times 1/5}{2 \times 10^{-2}} \times 60 = 225$$

$$pOH = 12/7 \Rightarrow [OH^-] = 2 \times 10^{-3} \Rightarrow \text{mol } OH^- = 2 \times 10^{-3} \times \frac{50}{1000} = 10^{-4}$$

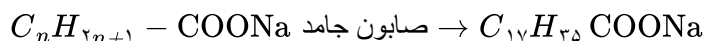
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۷۸



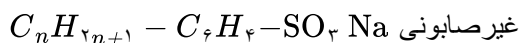
گزینه ۱: یون‌ها به صورت محلول هستند.

در گزینه ۴ دقت کنید که قوی‌تر بودن الزاماً به معنای سریع‌تر بودن تعادل نیست.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

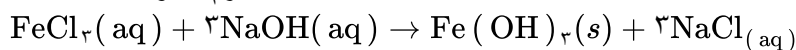
۷۹



$$2n + 1 - 4 = 31 \rightarrow 2n = 34 \rightarrow n = 17$$

$$\text{جرم مولی صابون} = 17(12) + 35 + 12 + 32 + 23 = 306 g$$

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \rightarrow 120 = \frac{\text{جرم حل شونده}}{10} \times 10^6 \rightarrow \text{جرم حل شونده} = 1/2 \times 10^{-3} \text{ gr NaOH}$$



$$1 \text{ mol } 2 \times 40 \text{ gr} \rightarrow x = 1 \times 10^{-5} \text{ mol FeCl}_2$$

$$x = 1/2 \times 10^{-3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۱

(آ) درست - صابون‌های RCOOK و RCOONH_4 هم مایع هستند.

(ب) نادرست - کلئوئید همانند سوسپانسیون یک مخلوط ناهمگن است.

(پ) درست - قدرت پاک‌کنندگی صابون در این نوع آب کاهش می‌یابد، زیرا با یون‌های موجود در آب سخت رسوب تشکیل می‌دهد.

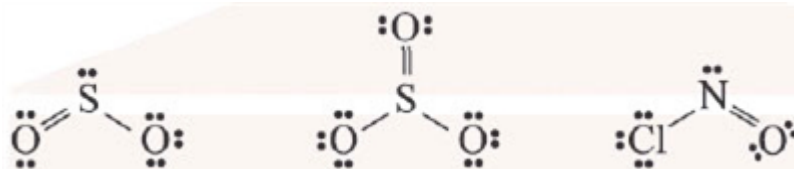
(ت) نادرست - برای این منظور به صابون‌ها ماده شیمیایی کلردار اضافه می‌کنند.

(ث) درست

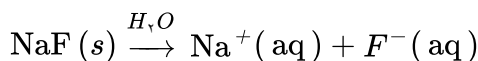
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تنها موارد اول نادرست است. بررسی موارد: ۸۲

مورد اول: نام صحیح Cl_2O ، دی‌کلرو مونواکسید است.مورد دوم: در تشکیل هر مول از ترکیب‌های Al_2O_3 و FeO به ترتیب ۶ و ۲ مول الکترون مبادله می‌شود.

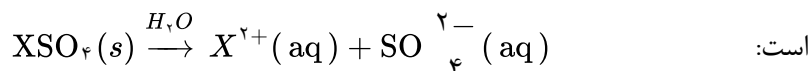
مورد سوم: ساختار لوویس ترکیب‌های ذکر شده به صورت زیر است:



مورد چهارم: معادله انحلال ترکیب‌های یونی ذکر شده در آب به صورت زیر است:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از غلظت یون SO_4^{2-} و جرم محلول، جرم مولی حل شونده را حساب می‌کنیم: ۸۳

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم } \text{SO}_4^{2-}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 2400 = \frac{\text{جرم } \text{SO}_4^{2-}}{100} \times 10^6 \Rightarrow \text{جرم } \text{SO}_4^{2-} = 0.24 \text{ g}$$

با توجه به دو ظرفیتی بودن فلز X ، فرمول شیمیایی سولفات آن به صورت XSO_4 و معادله انحلال آن در آب به صورت مقابل

بنابراین نسبت زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\text{جرم } \text{SO}_4^{2-}}{\text{جرم } \text{XSO}_4} = \frac{\text{جرم مولی } \text{SO}_4^{2-}}{\text{جرم مولی } \text{XSO}_4} \Rightarrow \frac{0.24}{0.37} = \frac{96}{X \text{ جرم مولی} + 96} \Rightarrow X \text{ جرم مولی} + 96 = \frac{37 \times 96}{24}$$

$$\Rightarrow X \text{ جرم مولی} = 52 \text{ g. mol}^{-1}$$

فلز مربوطه با توجه به اطلاعات سؤال، Cr^{2+} می‌باشد.

گزینه ۱: ممکن است اسیدی قوی‌تر باشد اما به مقدار ناچیزی در آب حل شده باشد و $[H^+]$ محلول آن بسیار کم باشد. خاصیت اسیدی $[H^+] =$

گزینه ۲: قدرت اسیدی به K_a و درجه یونش بستگی دارد نه به غلظت آن.

گزینه ۳: منیزیم هیدروکسید $(Mg(OH)_2)$ به عنوان ضد اسید به کار می‌رود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای حل سؤال ابتدا باید غلظت یون هیدرونیوم را در هر دو محلول اولیه محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} \text{HA در } [H^+] = 10^{-3/7} \Rightarrow [H^+] = 10^{-3/7} \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-4} \text{ mol. L}^{-1} \\ \text{HB در } [H^+] = 10^{-4/7} = 10^{-3/7} \times 10^{-5} = 2 \times 10^{-5} \text{ mol. L}^{-1} \end{cases}$$

حال برای محاسبه غلظت یون هیدرونیوم در محلول حاصل از مخلوط آن‌ها داریم:

$$[H^+]_{\text{نهایی}} = \frac{\text{mol } H^+}{\text{حجم کل محلول}} = \frac{2 \times 10^{-4} \text{ mol. L}^{-1} \times 0.02 \text{ L} + 2 \times 10^{-5} \text{ mol. L}^{-1} \times 0.03 \text{ L}}{(0.02 + 0.03) \text{ L}} \\ = 9/2 \times 10^{-5} \text{ mol. L}^{-1}$$

برای محاسبه pH محلول داریم: $pH = -\text{Log } [H^+] \rightarrow pH = -\text{Log } (9/2 \times 10^{-5})$

$$pH \simeq -(\text{Log } 9 + \text{Log } 10^{-5}) = -(2 \text{ Log } 3 + \text{Log } 10^{-5}) = (-2) \times 0.48 + 5 = 4.04 \simeq 4$$

توجه: مقدار عددی $\text{Log } 9/2$ با $\text{Log } 9$ اختلاف بسیار کمی دارد، پس به جای $\text{Log } 9/2$ ، $\text{Log } 9$ را محاسبه می‌کنیم.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بررسی عبارتهای نادرست:

(آ) این ترکیب NaCl است که به روش فیزیکی تبلور از آب دریا استخراج می‌شود.

(ب) SO_4^{2-} و NO_3^- ساختار لوویس و در نتیجه مدل فضاپرکن کاملاً متفاوتی دارند.

(پ) آب دریا یکی از منابع تهیه فلز منیزیم است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $N_2O_5(s) + H_2O(l) \rightarrow 2H^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$

$$[H^+][OH^-] = 1 \times 10^{-14} \Rightarrow [H^+] \times 5 \times 10^{-13} = 10^{-14} \Rightarrow [H^+] = 2 \times 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$[H^+] = M = \frac{n}{V} \Rightarrow 2 \times 10^{-2} = \frac{n}{2 \text{ L}} \Rightarrow n_{HNO_3} = 0.04 \text{ mol}$$

$$?gN_2O_5 = 0.04 \text{ mol HNO}_3 \times \frac{1 \text{ mol } N_2O_5}{2 \text{ mol HNO}_3} \times \frac{108gN_2O_5}{1 \text{ mol } N_2O_5} = 4.32gN_2O_5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بررسی عبارتهای:

(آ) در بدن انسان بالغ روزانه بین ۲ تا ۳ لیتر شیرۀ معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم در آن حدود 0.03 mol. L^{-1}

است؛ پس شمار مول‌های H^+ برابر است با:

$$M = \frac{n}{V} \Rightarrow n = MV \Rightarrow \text{مول } H^+ = 2 \times 0.03 = 0.06 \text{ mol تا } 3 \times 0.03 = 0.09 \text{ mol}$$

(ب) برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک به آن آهک (CaO) می‌افزایند.

(پ) در محلول‌های غیرالکترولیت حل‌شونده کاملاً به صورت مولکولی در آب حل می‌شود، در حالی که طبق نظریه آرنیوس اسید و یا باز ماده‌ای است که به هنگام انحلال در آب به ترتیب یون H^+ و OH^- تولید کند.

(ت) ثابت یونش یک باز تنها به دما وابسته است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به pH محلول سود سوزآور (NaOH) داریم:

$$\text{pH} = 10/7 \Rightarrow [H^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-10/7} = 10^{-11} \times 10^{0/7} = 10^{-11} \times 10^{0/7} = 2 \times 10^{-11} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$\xrightarrow{[H^+][OH^-] = 10^{-14}} [OH^-] = 5 \times 10^{-4} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$[OH^-] = \frac{n_1(OH^-)}{V(L)} \Rightarrow n_1(OH^-) = 5 \times 10^{-4} \times 5 = 25 \times 10^{-4} \text{ mol}$$

با توجه به pH نهایی محلول داریم:

$$\text{pH} = 12 \Rightarrow [H^+] = 10^{-12} \text{ mol. L}^{-1} \xrightarrow{[H^+][OH^-] = 10^{-14}} [OH^-] = 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$[OH^-] = \frac{n_2(OH^-)}{V(L)} \Rightarrow n_2(OH^-) = 10^{-2} \times 5 = 5 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

اکنون می‌توان مول OH^- اضافه شده به محلول را محاسبه نمود:

$$\text{مول-} OH^- \text{ اضافه شده} = n_2 - n_1 = 5 \times 10^{-2} - 25 \times 10^{-4} = 4/75 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

جرم $Ba(OH)_2$ اضافه شده به محلول برابر است با:

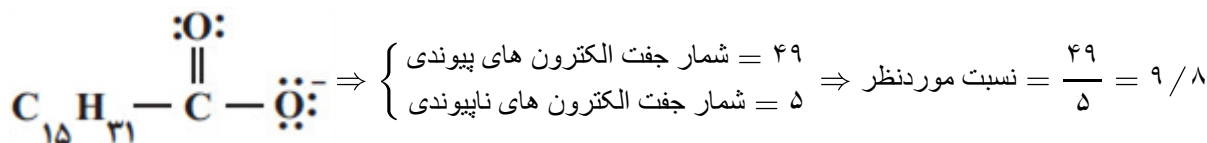
$$?gBa(OH)_2 = 4/75 \times 10^{-2} \text{ mol } OH^- \times \frac{1 \text{ mol } Ba(OH)_2}{2 \text{ mol } OH^-} \times \frac{170gBa(OH)_2}{1 \text{ mol } Ba(OH)_2} \simeq 4/04gBa(OH)_2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی موارد:

الف) نادرست است. در این مولکول فقط دو اتم کربن می‌توان یافت که به اتم هیدروژن متصل نیستند؛ دو اتم کربن از حلقه بنزنی

که یکی به گروه SO_3^- و دیگری به زنجیر هیدروکربنی متصل است.

ب) درست است. ساختار آنیون ترکیب b به صورت زیر است:



پ) درست است. ساختار a یک پاک‌کننده غیرصابونی است. از مواد پتروشیمیایی طی واکنش‌های پیچیده، در صنعت تولید می‌شود و قدرت پاک‌کنندگی آن از ساختار b که یک پاک‌کننده صابونی است در آب سخت بیشتر است و با یون‌های موجود در آب سخت رسوب نمی‌دهد.

ت) درست است. همگی کلویید بوده و رفتار مشابه در مقابل پرتو نور دارند و ذره‌های سازنده سوسپانسیون، ذرات ریزماده هستند که ته‌نشین می‌شوند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. جرم حل‌شونده x ، جرم محلول $60 + x$

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100 \Rightarrow 25 = \frac{x}{60 + x} \times 100 \Rightarrow x = 20g$$

$$\Rightarrow 20gNaOH \times \frac{1 \text{ mol}}{40gNaOH} = 0/5 \text{ mol}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا حجم مخزن را به دست می‌آوریم:

$$\text{حجم مخزن} = 20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} = 24000 \text{ cm}^3$$

از آنجا که یک سوم حجم این مخزن از آب پر شده در نتیجه 8000 cm^3 آب در این مخزن است که با توجه به چگالی آب بر حسب

$$8000 \text{ cm}^3 H_2O \times \frac{1 \text{ g } H_2O}{1 \text{ cm}^3 H_2O} = 8000 \text{ g } H_2O$$

گرم خواهد شد:

جرم کاتیون (یون آمونیوم) موجود در این محلول برابر است با:

$$396 \text{ g } (NH_4)_2SO_4 \times \frac{1 \text{ mol } (NH_4)_2SO_4}{132 \text{ g } (NH_4)_2SO_4} \times \frac{2 \text{ mol } NH_4^+}{1 \text{ mol } (NH_4)_2SO_4} \times \frac{18 \text{ g } NH_4^+}{1 \text{ mol } NH_4^+} = 108 \text{ g } NH_4^+$$

بنابراین غلظت یون آمونیوم بر حسب ppm برابر خواهد شد:

$$\text{ppm}_{NH_4^+} = \frac{108}{8 \times 10^3} \times 10^6 = 13500 = 1/35 \times 10^4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

الف) $ZnCO_3$ تعداد اتم = ۵، ۵ برابر الکترون مبادله شده در $LiOH$ (۱ مول) / درست

ب) $Al_2(SO_4)_3$ تعداد اتم = ۱۷، ۱ برابر الکترون مبادله شده در $Ga_2(CO_3)_3$ (۶ مول) / نادرست

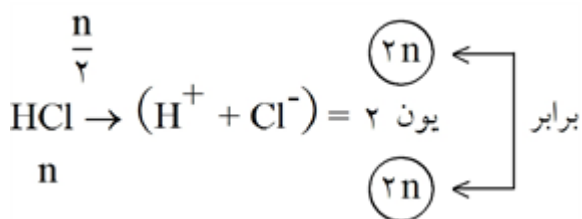
پ) $(NH_4)_2SO_4$ تعداد اتم = ۱۵، ۵ برابر الکترون مبادله شده در $AlPO_4$ (۳ مول) / درست

ت) $Mg(NO_3)_2$ تعداد اتم = ۹، ۳ برابر الکترون مبادله شده در $(NH_4)_3PO_4$ (۳ مول) / درست

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مورد اول: اگر ۲ اسید HX و HA هر دو قوی باشند قابل مقایسه نیست.

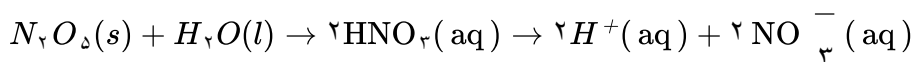
مورد دوم: $1 Li_2O + 1 H_2O \rightarrow 2 LiOH = 4$ یون



مورد سوم: به یونش اشاره نشده است.

مورد چهارم: $pH_{HI} > pH_{HCl}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. واکنش دی‌نیتروژن پنتاکسید با آب به صورت زیر می‌باشد:



با توجه به واکنش به ازای مصرف ۱ مول دی‌نیتروژن پنتاکسید (معادل ۱۰۸ گرم) و ۱ مول آب (معادل ۱۸ گرم) دو مول یون هیدروژن تولید می‌شود. بنابراین اختلاف جرم واکنش دهنده‌های مصرف شده برابر با ۹۰ گرم است. در نتیجه

$$\text{داریم: } ? \text{ mol } H^+ = ۱۲۵g \text{ اختلاف جرم} \times \frac{۲ \text{ mol } H^+}{۹۰ \text{ gr اختلاف جرم}} = \frac{۲۵}{۹} \text{ mol } H^+$$

در قدم بعد غلظت مولار یون هیدرونیوم را محاسبه و سپس pH محلول را به دست می‌آوریم:

$$[H^+] = \frac{۲۵}{۹} \times \frac{۱}{۱۲۵} = \frac{۱}{۴۵} \text{ mol. L}^{-1} \Rightarrow \text{pH} = -\text{Log } [H^+] \Rightarrow \text{pH} = -\text{Log } \frac{۱}{۴۵} = \text{Log } ۴۵$$

$$= \text{Log } ۳^۲ + \text{Log } ۵ = ۲(\cdot/۵) + ۰/۷ = ۱/۷$$

در نهایت pH محلول ۰/۳ مولار هیدروکلریک اسید را نیز محاسبه می‌کنیم باید توجه داشته باشید که هیدروکلریک اسید یک اسید قوی بوده و درجه یونش آن برابر با ۱ می‌باشد. پس داریم:

$$[H^+] = M\alpha \Rightarrow [H^+] = ۰/۳ \times ۱ = ۰/۳$$

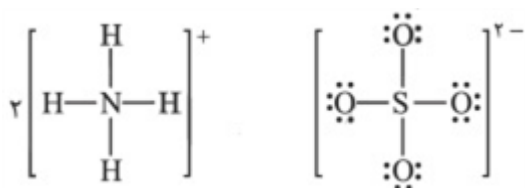
$$\text{pH} = -\text{Log } ۰/۳ \Rightarrow \text{pH} = ۰/۵$$

pH محلول اول نسبت به pH محلول هیدروکلریک اسید ۱/۲ واحد بزرگ‌تر می‌باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تنها مورد چهارم نادرست است، بررسی مواد:

مورد دوم: فرمول شیمیایی آمونیوم نیترات به صورت NH_4NO_3 است. در این ترکیب ۳ نوع عنصر وجود دارد.

مورد چهارم: فرمول شیمیایی ترکیب موردنظر به صورت $(NH_4)_2SO_4$ است و در نتیجه در هر واحد فرمولی آن ۱۲ پیوند اشتراکی وجود دارد.



$$\text{گزینه ۱ پاسخ صحیح است. محلول } ۴/۲g = ۴ \text{ ml} \times \frac{۱/۰۵g}{۱ \text{ ml}} = ۴ \text{ ml} \times ۰/۰۵g$$

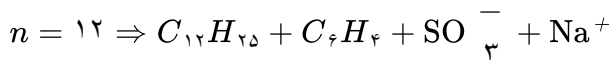
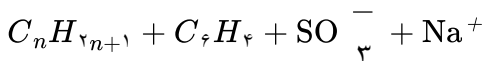
$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۰/۰۳۷ = \frac{x}{۴/۲} \times ۱۰۰ \Rightarrow x = ۱/۵۵۴ \times ۱۰^{-۳} gLi_2CO_3$$

$$?gLi^+ = ۱/۵۵۴ \times ۱۰^{-۳} gLi_2CO_3 \times \frac{۱ \text{ mol } Li_2CO_3}{۷۴gLi_2CO_3} \times \frac{۲ \text{ mol } Li^+}{۱ \text{ mol } Li_2CO_3} \times \frac{۷gLi^+}{۱ \text{ mol } Li^+} = ۲/۹۴ \times ۱۰^{-۴} g$$

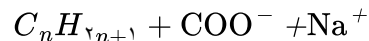
$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ = \frac{۲/۹۴ \times ۱۰^{-۴}}{(۴/۲ - ۲/۲)} \times ۱۰^۶ = ۱۴۷ \text{ ppm}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا فرمول ساختارهای ۱ و ۲ را به دست می‌آوریم:

پاک‌کننده غیرصابونی (۱)



پاک‌کننده صابونی جامد (۲)



بررسی عبارت‌ها:

الف) درست. ساختار ۲ متعلق به یک پاک‌کننده صابونی جامد است.

$$35 - 29 = 6$$

ب) درست

$$\frac{\text{تعداد } C}{\text{تعداد } O} = \frac{18}{3} = 6$$

پ) درست

$$\text{در ساختار ۲: } \frac{\text{تعداد } C}{\text{تعداد } O} = \frac{17 + 1}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

ت) درست. ساختار ۱ یک پاک‌کننده غیرصابونی بوده و قدرت پاک‌کنندگی آن در آب سخت بیشتر از قدرت پاک‌کنندگی ساختار ۲ در همان آب است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با مصرف این ضد اسید حجم محتویات معده از $0.8L$ به $1L$ و pH آنها از $2/3$ به $3/1$ رسیده است.

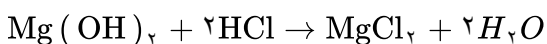
$$\text{اولیه } [H^+] = 10^{-pH} \Rightarrow [H^+] = 10^{-2/3} \Rightarrow 5 \times 10^{-3} \text{ mol. } L^{-1}$$

$$0.8L \times \frac{5 \times 10^{-3} \text{ mol}}{1L} = 4 \times 10^{-3} \text{ mol } H^+$$

$$\text{نهایی } [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-3/1} = 8 \times 10^{-4} \text{ mol. } L^{-1}$$

$$\left(1L \times \frac{8 \times 10^{-4} \text{ mol}}{1L} = 0.88 \times 10^{-3} \text{ mol } H^+ \right)$$

$$\Rightarrow \text{مول } H^+ \text{ نهایی} = 4 \times 10^{-3} - 0.88 \times 10^{-3} = 3.12 \times 10^{-3} \text{ mol } H^+$$



طی واکنش 3.12×10^{-3} مول از اسید موجود در معده خنثی شده است.

$$gMg(OH)_2 = 3.12 \times 10^{-3} \text{ mol } HCl \times \frac{1 \text{ mol } (OH)_2}{2 \text{ mol } HCl} \times \frac{58gMg(OH)_2}{1 \text{ mol } Mg(OH)_2} \approx 0.09gMg(OH)_2$$

$$\text{ppm} = \frac{\text{گرم حل شونده}}{\text{گرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow \frac{0.09}{300} \times 10^6 = 300 \text{ ppm}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

آ) نادرست، انسان‌ها چند هزار سال پیش از میلاد، به همراه آب از مواد شبیه صابون امروزی برای نظافت و پاکیزگی استفاده می‌کردند.

ب) درست

پ) درست

ت) نادرست، نام گروه عاملی OH - گروه هیدروکسیل می‌باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در اثر افزودن آب غلظت محلول $\frac{1}{4}(0/25)$ شده است. لذا آب تولید شده برابر $4/8 \times 3$ گرم است.

در نتیجه:

$$\frac{75 \times 0/67}{40} - \frac{4/8 \times 3}{18} = \frac{?}{40} \Rightarrow ? = 18/25 \Rightarrow$$

مقدار خالص مصرف شده MOH برابر است با:

$$50/25 - 18/25 = 32$$

مقدار خالص اولیه: $75 \times 0/67 = 50/25$

$$\frac{18/25}{40} = \frac{M \times 0/5}{36/5} \Rightarrow \frac{32}{50/25} = 64$$

$$M = 33$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا غلظت اسید را به دست می آوریم:

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-4/4} = 10^{-1} = 4 \times 10^{-5} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$K_a = \frac{[H^+]}{M_a - [H^+]} \Rightarrow 1/6 \times 10^{-4} = \frac{(4 \times 10^{-5})^2}{M_a - 4 \times 10^{-5}} \Rightarrow M_a = 5 \times 10^{-5}$$

سپس غلظت باز را محاسبه می کنیم:

$$pH = 9/5 \xrightarrow{pH+pOH=14} pOH = 4/5$$

$$[OH^-] = 10^{-pOH} = 10^{-4/5} = 10^{-0.8} = 3 \times 10^{-5} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$[OH^-] = M_b n_b \alpha_b \xrightarrow[n=2]{\alpha_b=1} M_b = \frac{3 \times 10^{-5}}{2 \times 1} = 1/5 \times 10^{-5} \text{ mol. L}^{-1}$$

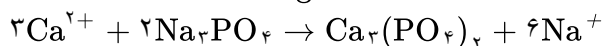
اکنون حجم باز مورد نیاز را محاسبه می کنیم:

$$M_a n_a V_a = M_b n_b V_b$$

$$\Rightarrow 5 \times 10^{-5} \times 1 \times 100 = 1/5 \times 10^{-5} \times 2 \times V_b \Rightarrow V_b = 166/7 \text{ mL}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{مقدار یون کلسیم} = \frac{500 \text{ mg}}{1 \text{ kg}} \times 5 \text{ kg} = 2500 \text{ mg} = 2/5 \text{ g Ca}^{2+}$$



$3 \times 40 \text{ g Ca}^{2+}$	$2 \times 165 \text{ g Na}_3\text{PO}_4$	$\Rightarrow x = 6/8 \text{ g}$
$2/5 \text{ g Ca}^{2+}$	x	

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. رسوب سفید رنگ تشکیل شده AgCl است؛ پس فقط کافی است جرم کاتیون Ag^+ را محاسبه کرده و سپس غلظت آن را به دست آوریم.

$$?g\text{Ag}^+ = 36 \text{ mg AgCl} \times \frac{1 \text{ g AgCl}}{1000 \text{ mg AgCl}} \times \frac{1 \text{ mol AgCl}}{143.5 \text{ g AgCl}} \times \frac{1 \text{ mol Ag}^+}{1 \text{ mol AgCl}} \times \frac{107.87 \text{ g Ag}^+}{1 \text{ mol Ag}^+} \approx 0.027 \text{ g}$$

$$\text{غلظت } \text{Ag}^+ = \frac{0.027 \text{ g}}{500 \text{ g}} \times 10^6 = 54 \text{ ppm}$$

برای بخش دوم سؤال با به دست آوردن میزان Cl^- در ترکیب یونی می‌توان به مقدار نمک خوراکی افزوده شده دست یافت.

$$9 \text{ mg Cl}^- \times \frac{58.5 \text{ mg NaCl}}{35.5 \text{ mg Cl}^-} = 14.75 \text{ mg NaCl}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا مقدار مول مخلوط گازی را حساب می‌کنیم:

$$8/4 \text{ L گاز} \times \frac{1 \text{ mol گاز}}{28 \text{ L گاز}} = 0.3 \text{ mol گاز}$$

حال مجموع غلظت این دو گاز در آب را به دست می‌آوریم:

$$\text{غلظت مولار} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم محلول}} = \frac{0.3 \text{ mol}}{4 \text{ L}} = 0.075 \text{ mol. L}^{-1}$$

غلظت گاز HB را برابر x مول بر لیتر و غلظت گاز HBr را $(0.075 - x)$ مول بر لیتر فرض می‌کنیم. HBr یک اسید قوی است و تمام مولکول‌های آن به یون تبدیل می‌شوند، اما HF یک اسید ضعیف است و تنها بخشی از مولکول‌های آن یونیده می‌شوند، بنابراین مقدار یون‌های H^+ و F^- حاصل از حل شدن HF را به دست می‌آوریم:

$$\text{HF} \text{ درجه یونش} = \frac{\text{شمار مولکول های یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول های حل شده}} = \frac{20}{220} = \frac{1}{11}$$

از این رو در اثر یونش HF و در حالت تعادل غلظت یون H^+ برابر $\frac{x}{11}$ مول بر لیتر است.

غلظت کل یون H^+ در محلول برابر است با:

$$[\text{H}^+]_{\text{کل}} = [\text{H}^+]_{\text{HF}} + [\text{H}^+]_{\text{HBr}} = \frac{x}{11} + (0.075 - x) = \left(0.075 - \frac{10x}{11}\right) \text{ mol. L}^{-1}$$

	HF	H^+	F^-
غلظت اولیه	x	$[\text{H}^+]_{\text{HF}}$	۰
تغییرات غلظت	$-\frac{x}{11}$	$+\frac{x}{11}$	$+\frac{x}{11}$
غلظت تعادلی	$\frac{10x}{11}$	$[\text{H}^+]_{\text{HF}} + \frac{x}{11}$	$\frac{x}{11}$

حال از روی pH داده شده مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$[\text{H}^+]_{\text{کل}} = 10^{-\text{pH}} = 10^{-1/4} = 10^{-2} \times 10^{3/4} = 2/5 \times 10^{-2} = 0.075 - \frac{10x}{11}$$

$$\Rightarrow x = 0.055 \text{ mol. L}^{-1}$$

بنابراین در حالت تعادل نهایی غلظت هر یک از گونه‌های H^+ ، F^- و HF به ترتیب برابر 0.025 ، 0.005 و 0.05 مول بر لیتر است. در نهایت ثابت یونش HF را محاسبه می‌کنیم:

$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{F}^-]}{[\text{HF}]} = \frac{25 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-2}} = 2/5 \times 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

